ACTUARIAL *Mathematics*

BOWERS
GERBER
HICKMAN
JONES
NESBITT

Second Edition

INDICE

INTRODUCCION vi

CAPÍTULO 1
ECONOMIA DEL SEGURO

1.1 Introducción. 1
1.2 Teoría de la Utilidad 3
1.3 Seguro y Utilidad 9
1.4 Elementos del Seguro 21
1.5 Seguro Optimo 23
1.6 Notas y Referencias 25
1.7 Apéndice 26
1.8 Ejercicios 28

CAPÍTULO 2
MODELOS INDIVIDUALES DE RIESGO PARA EL CORTO PLAZO

2.1 Introducción. 35
2.2 Modelos para variables aleatorias de reclamación individual 36
2.3 Sumas de variables aleatorias independientes 45
2.4 Aproximaciones para la distribución de la suma. 51
2.5 Aplicaciones a seguros. 52
2.6 Notas y referencias 58
2.7 Ejercicios 58

CAPÍTULO 3
DISTRIBUCIONES DE SOBREVIVENCIA Y TABLAS DE MORTALIDAD

3.1	Introducción.	63
3.2	Probabilidad para la Edad al Fallecimiento	64
3.2.1	La Función de Sobrevivencia	64
3.2.2	Tiempo transcurrido hasta el fallecimiento para una persona de edad x	65
3.2.3	Tiempo de vida futuro truncado	68
3.2.4	Fuerza de Mortalidad	68
3.3	Tablas de Mortalidad	73
3.3.1	Relaciones entre las Funciones de la Tabla de Mortalidad y la Función de Sobrevivencia.	73
3.3.2	Ejemplo de Tablas de Mortalidad	76
3.4	El grupo determinístico de sobrevivencia	84
3.5	Otras funciones de la Tabla de Mortalidad (87)	87
3.5.1	Fórmulas Recursivas	95
3.6	Supuestos para las edades fraccionarias	96
3.7	Algunas leyes analíticas de la mortalidad	103
3.8	Tablas Selectas y Últimas	105
3.9	Notas y referencias	110
3.10	Ejercicios	111

CAPÍTULO 4
SEGURO DE VIDA

4.1	Introducción.	121
4.2	Seguros pagaderos al momento de la muerte	122
4.2.1	Nivel de indemnización del seguro	123
4.2.2	Seguro dotal puro	131
4.2.3	Seguro diferido.	133
4.2.4	Seguro de beneficio variable	137
4.3	Seguros pagaderos al final del año del fallecimiento	142
4.4	Relaciones entre seguros pagaderos al momento del fallecimiento y al final del mismo año.	150
4.5	Ecuaciones recurrentes	156
4.6	Funciones conmutativas (conmutados)	160
4.7	Notas y referencias	163
4.8	Ejercicios	164

CAPÍTULO 5
ANUALIDADES

5.1	Introducción.	171
5.2	Pago único contingente de la sobrevivencia	173
5.3	Anualidades vitalicias continuas	176
5.4	Anualidades vitalicias discretas	187
5.5	Anualidades con pagos fraccionado (m-ésimos de año)	194
5.6	Fórmulas de funciones conmutadas para anualidades con pagos nivelados	200
5.7	Anualidades variables	204
5.8	Ecuaciones recurrentes	207
5.9	Anualidades vitalicias con pagos al final del periodo y anualidades anticipadas prorrateadas	209
5.10	Notas y referencias	215
5.11	Ejercicios	215

CAPÍTULO 6
PRIMAS NETAS

6.1	Introducción.	231
6.2	Primas totalmente continuas	232
6.3	Primas totalmente discretas	239
6.4	Primas reales pagaderas m veces	250
6.5	Primas prorrateadas	253
6.6	Funciones conmutativas	257
6.7	Indemnizaciones de tipo acumulativo	259
6.8	Notas y referencias	263
6.9	Ejercicios	264

CAPÍTULO 7
RESERVAS DE PRIMAS NETAS

7.1	Introducción.	271
7.2	Reservas de Primas Netas Totalmente Continuas	273
7.3	Otras fórmulas para reservas totalmente continuas	278
7.4	Reservas de primas netas totalmente discretas	283
7.5	Reservas con una Base Semicontinua	290
7.6	Reservas con base en primas m-ésimas iguales	291
7.7	Reservas sobre una base prorrateada o continua descontada	294
7.8	Fórmulas recurrentes para reservas totalmente discretas	296
7.9	Reservas de Duración Fraccionada	299
7.10	Asignación de Pérdidas para el año Póliza	302
7.11	Ecuaciones Diferenciables para Reservas Totalmente Continuas	311
7.12	Fórmulas de Reservas en Términos de Valores Conmutados	312
7.13	Notas y Referencias	315
7.14	Ejercicios	315

APENDICE I

Tabla de distribución normal 327-A

APENDICE II

Tabla de Mortalidad Ilustrativa 328-A

INDICE

INTRODUCCION

CAPÍTULO 8
FUNCIONES DE VIDAS MÚLTIPLES

8.1	Introducción.	327
8.2	El Estatus de Vida Conjunta	328
8.3	El Estatus del Último Sobreviviente	331
8.4	Probabilidades y Esperanzas	334
8.5	Indemnizaciones de Seguros y de Anualidades	338
8.6	Evaluación - Leyes Especiales de Mortalidad	346
8.7	Evaluación-Distribución Uniforme de los Fallecimientos	348
8.8	Funciones Contingentes Simples	351
8.9	Funciones Contingentes Simples – Evaluación	355
8.10	Notas y referencias	358
8.11	Ejercicios	359

CAPÍTULO 9
MODELOS DE DECREMENTO MÚLTIPLE

9.1	Introducción.	367
9.2	Dos Variables Aleatorias	369
9.3	Grupo Aleatorio de Sobrevivencia	379
9.4	Grupo Determinístico de Sobrevivencia	382
9.5	Tablas Asociadas de Decremento Simple	384
	9.5.1 Relaciones básicas	386
	9.5.2 Tasas Centrales de Decremento Múltiple	387
	9.5.3 Supuesto: Fuerzas Constante	388
	9.5.4 Supuesto de Distribución Uniforme para Decrementos Múltiples	390
9.6	Construcción de una Tabla de Decremento Múltiple	391
9.7	Primas Netas Únicas y su Evaluación Numérica	398
9.8	Notas y Referencias	403
9.9	Ejercicios	404

CAPÍTULO 10
TEORIA DE VALUACIÓN PARA PLANES DE PENSIONES

10.1	Introducción.	413
10.2	Funciones básicas	414
10.3	Contribuciones	417
10.4	Indemnizaciones de retiro por años de servicio	419
	10.4.1 Funciones de $R(x,h,t)$ independientes de salarios.	421
	10.4.2 Funciones $R(x,h,t)$ dependientes del salario final	422
	10.4.3 Función $R(x,h,t)$ determinada por el salario promedio de la carrera de servicios	427
10.5	Indemnizaciones por incapacidad	430
10.6	Indemnización por separación	432
10.7	Funciones conmutativas	435
10.8	Notas y referencias	441
	Ejercicios	442

APENDICE I

Tabla de distribución normal 447-A

APENDICE II

Tabla de Mortalidad Ilustrativa
- Funciones sobre una sola Vida 448-A
- Funciones sobre Vidas Conjuntas 454-A

Tabla de Servicios Ilustrativa 457-A

INDICE

INTRODUCCION

CAPÍTULO 11

MODELOS DE RIESGO COLECTIVO PARA UN SOLO PERIODO

11.1	Introducción.	447
11.2	La distribución de las reclamaciones agregadas	449
11.3	Selección de distribuciones básicas	455
	11.3.1 La distribución de N	455
	11.3.2 Distribución del monto de reclamaciones individuales	460
11.4	Propiedades de la distribución de Poisson compuesta	463
11.5	Aproximaciones a la distribución de las reclamaciones agregadas	473
11.6	Notas y referencias	480
	Apéndice	482
	Ejercicios	485

CAPÍTULO 12

MODELOS DE RIESGOS COLECTIVOS DURANTE UN PERIODO

12.1	Introducción.	491
12.2	Procesos de reclamaciones	493
12.3	El coeficiente de ajuste	498
12.4	Modelo de tiempo discreto	504
12.5	El primer excedente abajo del nivel inicial	511
12.6	La pérdida agregada máxima	514
12.7	Notas y referencias	522
	Apéndice	523
	Ejercicios	528

CAPÍTULO 13

APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL RIESGO

13.1	Introducción.	533
13.2	Las distribuciones del monto de las reclamaciones	534
13.3	Aproximación del modelo individual	540
13.4	Reaseguro Stop-Loss (Exceso de Pérdida)	545
13.5	El efecto del reaseguro sobre la probabilidad de la Ruina	554
13.6	Notas y referencias	564
	Apéndice	565
	Ejercicios	567

INDICE

INTRODUCCION

CAPÍTULO 14

MODELOS DE SEGUROS INCLUYENDO GASTOS

14.1	Introducción.	571
14.2	Gastos generales	
	14.2.1 Primas y reservas	573
	14.2.2 Contabilidad	577
14.3	Tipo de gastos	580
14.4	Gastos por póliza	584
14.5	Fundamentos algebraicos de la contabilidad	589
14.6	Métodos modificados de reservas	595
14.7	Terminal preliminar completo.	599
14.8	Temporal preliminar completo modificado	603
14.9	Estándar canadiense	608
14.10	Notas y referencias	609
	Ejercicios	610

CAPÍTULO 15

INDEMNIZACIONES Y DIVIDENDOS SIN PÉRDIDA LEGAL

15.1	Introducción.	619
15.2	Valores en efectivo	623
15.3	Opciones del seguro	631
	15.3.1 Seguro pagado	
	15.3.2 Plazo ampliado (Seguro Prorrogado)	633
	15.3.3 Préstamo automático sobre la prima	634
15.4	Participación en los activos	636
15.5	Ajustes derivados de la experiencia	640
15.6	Supuestos y Reservas	643
15.7	Notas y referencias	652
	Ejercicios	653

CAPÍTULO 16

ANUALIDADES Y SEGUROS ESPECIALES

16.1	Introducción.	659
16.2	Tipos especiales de beneficios de anualidad	660
16.3	Seguros de ingreso familiar	664
16.4	Pólizas de ingresos por retiro	667
16.5	Productos variables	669
	16.5.1 Anualidad variable	
	16.5.2 Seguro de Vida Totalmente Variable	672
	16.5.3 Seguro de vida variable con prima fija	673
	16.5.4 Incrementos del seguro pagado totalmente	
16.6	Productos de Planes Flexibles	675
	16.6.1 Ejemplo de plan flexible	
	16.6.2 Un diseño alternativo	680
16.7	Beneficios por incapacidad para un seguro de vida individual	681
	16.7.1 Beneficios de ingreso por incapacidad	
	16.7.2 Desistimiento del beneficio de las primas	685
	16.7.3 Primas y reservas netas anuales.	686
16.8	Notas y referencias	687
	Ejercicios	688

APÉNDICE I

Tabla de distribución normal 695-i

APÉNDICE II

Tabla de mortalidad ilustrativa 696-i

INDICE

INTRODUCCION

CAPÍTULO 17

TEORÍA AVANZADA DE VIDAS MULTIPLES

17.1	Introducción	695
17.2	Estatus más generales	696
17.3	Estatus Compuestos	705
17.4	Probabilidades y Seguros Contingentes	709
17.5	Funciones Contingentes Compuestas	711
17.6	Anualidades reversibles	716
17.7	Primas Netas y Reservas	721
	Notas y referencias	724
	Apéndice	725
	Ejercicios	727

CAPÍTULO 18

TEORÍA DE POBLACIÓN

18.1	Introducción	737
18.2	El Diagrama de Lexis	
18.3	Modelo continuo	739
18.4	Poblaciones estacionarias y estables	746
18.5	Aplicaciones actuariales	750
18.6	Poblaciones Dinámicas	755
	Notas y referencias	759
	Ejercicios	760

CAPÍTULO 19

TEORÍA DE FINANCIAMIENTO DE PENSIONES

19.1 Introducción. 765
19.2 El modelo 766
19.3 Reserva terminal 768
19.4 Acumulación de pasivo actuarial 770
19.5 Funciones básicas para miembros activos 772
19.5.1 Valor presente actuarial en el tiempo para pensiones futuras del grupo activo 773
19.5.2 Tasa de Costeo Normal 774
19.5.3 Pasivo actuarial acumulado 776
19.5.4 Valor presente actuarial de costos normales futuros 778
19.6 Métodos de costeo actuarial individual 781
19.7 Método de costeo agregado 785
19.8 Funciones básicas para miembros jubilados 790
19.8.1 Valor presente actuarial de beneficios futuros $(rA)(t)$ 791
19.8.2 Tasa de beneficios pagados 792
19.8.3 La ecuación asignada 793
19.9 Funciones básicas para miembros activos y jubilados 795
Notas y referencias 797
Ejercicios 798

APÉNDICE I
Tabla de distribución normal 804-A

APÉNDICE II
Tabla de mortalidad ilustrativa 805-A

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a:

- Act. Ricardo Villegas Azcorra, por la aportación de sus notas de trabajo sobre la versión 1986.
- Act. Jaime Vázquez Alamilla por la revisión técnica de los primeros tres capítulos.
- Act. Ana Rosa Camacho Lombilla, por el apoyo técnico del Cap. 7.

Asimismo al Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, por la libertad, disciplina, rigor y criterio, que como científicos y profesionistas nos han formado.

Así como su tiempo y paciencia, a:

Yeshúa, Issac David y Carla Ivonne, los pequeños Ángeles.

INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales de los alumnos al inicio de la licenciatura de Actuaría es el idioma ingles, lo cual constituye un obstáculo para la comprensión de terminologías y procesos matemáticos de la Ciencia Actuarial , en esta virtud el compromiso del presente trabajo es el elaborar las notas de clase de la materia de ***Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas I***, la cual tiene como base los primeros siete capítulos del libro de texto ***ACTUARIAL MATHEMATICS***, publicado por ***THE SOCIETY OF ACTUARIES*** **(SOA)** en 1986, dicha versión consta de 19 capítulos.

Aun cuando en 1997 la SOA publicó de nueva cuenta es este libro de texto, la diferencia radica en subdividir el capítulo 7 (edic. 1986) denominado *Reserva de Prima Neta* en su particularidad del *Análisis de la Reserva de Beneficio* e incluyendo en su parte final de la nueva versión (capítulo 21) el estudio sobre la *tasa de interés como variable aleatoria.*

Es importante indicar que en el medio asegurador y algunas escuelas, aun se continua utilizando el enfoque determinístico expuesto desde el siglo XVIII y como ejemplo de ello se tiene el libro de texto publicado por la SOA en 1967, que lleva como título **"Life Contingencies"**, del autor Ch. W. Jordan. Sin embargo este enfoque pierde de vista aspectos importantes relativos a la varianza de la variable aleatoria asociada a la función de probabilidad, aspectos que ya se habían apreciado en los trabajos de Menge (1937), Pollard y Pollard (1969), Follard (1976), Fibiger y Kellison(1971), Boyle (1974) y Taylor (1976), Hickman (1964), entre otros.

Por lo anterior, el nuevo enfoque rompe con el patrón establecido, durante los siglos XVIII, XIX y parte del s. XX, donde el cálculo de las funciones actuariales estuvo basado únicamente en el enfoque del valor presente determinístico, es decir, dada una función de mortalidad o de decrementos, se supone que la población a la cual se aplica seguirá dicho patrón y, en función de las cifras de siniestros que se van obteniendo al seguir dicho comportamiento, se van calculando los valores presentes de las obligaciones por cubrir.

En esta virtud el nuevo enfoque probabilístico del cálculo actuarial se fundamenta en la hipótesis de que, más que seguir una ley determinística, la *mortalidad sigue un patrón aleatorio*. Por lo que el punto de partida es el considerar el *tiempo restante de vida de una persona como una variable aleatoria*.

Act. Oscar Aranda Martínez
Act. Nadia Araceli Castillo García

29 de Junio de 2006
Cd. Universitaria, México, D.F.

Se agradece cualquier sugerencia o comentario al correo oam@fciencias.unam.mx

AGRADECIMIENTO

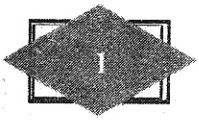
Quiero agradecer a:

- Act. Ricardo Villegas Azcorra, por la aportación de sus notas de trabajo sobre la versión 1986.
- Act. Jaime Vázquez Alamilla por la revisión técnica de los primeros tres capítulos.
- Act. Ana Rosa Camacho Lombilla, por el apoyo técnico del Cap. 7.

Asimismo al Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, por la libertad, disciplina, rigor y criterio, que como científicos y profesionistas nos han formado.

Así como su tiempo y paciencia, a:

Yeshúa, Issac David y Carla Ivonne, los pequeños Ángeles.



ECONOMÍA DEL SEGURO

1.1 Introducción.

Cada uno de nosotros hace planes y tiene expectativas acerca del curso que seguirá su vida. Sin embargo, la experiencia enseña que los planes no se desarrollan con certeza y algunas veces las expectativas no se realizan. Ocasionalmente, los planes se frustran porque estaban construidos sobre supuestos irreales. En otras situaciones interfieren circunstancias fortuitas. El seguro está diseñado para proteger en contra de reveses financieros severos que pueden resultar de eventos aleatorios que estorban los planes de los individuos.

Debemos entender algunas limitaciones básicas de la protección del seguro. Primero se restringe a reducir aquellas consecuencias de los eventos aleatorios que pueden medirse en términos monetarios. Otro tipo de pérdidas pueden ser muy importantes pero no pueden compensarse mediante el seguro.

Por ejemplo, la pena y el sufrimiento pueden ser causados por un evento aleatorio. Sin embargo, las coberturas del seguro diseñadas para compensar la pena y el sufrimiento a menudo han sido problemáticas por la dificultad de medir la pérdida en unidades monetarias. Por otra parte, las pérdidas económicas pueden ser causadas por eventos tales como el incendio de una propiedad por su dueño. No obstante que tales pérdidas pueden definirse fácilmente en términos monetarios, los eventos no son asegurables debido a la naturaleza no aleatoria de la causa de las pérdidas.

Una segunda limitación básica es que el seguro no reduce directamente la probabilidad de la pérdida. La existencia de un seguro contra huracanes no altera la probabilidad de una tormenta destructiva. Sin embargo, un sistema de seguro bien diseñado frecuentemente proporcionara los incentivos financieros para realizar acciones que permitan resarcir las pérdidas. Un seguro que aliente la destrucción de la propiedad o el retiro de una persona productiva de la fuerza de trabajo afectaría la probabilidad de estos eventos económicamente adversos. Tal tipo de seguro no seria de interés publico.

Los siguientes son algunos ejemplos de situaciones en las que los eventos aleatorios pueden causar pérdidas financieras:

- La destrucción de la propiedad por incendio o tormenta, generalmente, se considera como un evento aleatorio en el que la pérdida puede medirse en términos monetarios.
- La multa impuesta por un juzgado como resultado de un acto de negligencia, generalmente, se considera como un evento aleatorio que tiene como resultado, pérdidas económicas.
- Una enfermedad prolongada puede atacar en una época inesperada y provocar como resultado pérdidas financieras. Estás pérdidas se deberán a los gastos extra para recobrar la salud y reducen el ingreso obtenido.
- La muerte de un adulto joven puede ocurrir mientras que las obligaciones familiares o de negocios quedan sin cumplir. O, si el individuo sobrevive hasta una edad avanzada, los recursos para solventar el costo de vida pueden agotarse.

Estos ejemplos se diseñaron para ilustrar la definición:

*Un **sistema de seguro** es un mecanismo para reducir el efecto financiero adverso de los eventos aleatorios que impiden el cumplimiento de expectativas razonables.*

Es conveniente establecer ciertas distinciones entre el seguro y algunos sistemas relacionados. Las instituciones bancarias se desarrollaron con el propósito de recibir, invertir y prestar los ahorros de individuos y corporaciones. Los flujos de caja de activos y pasivos de una institución de ahorro no siguen patrones determinísticos. Sin embargo, a diferencia de los sistemas de seguro, las instituciones de ahorro no hacen pagos con base en el tamaño de una pérdida financiera ocurrida debido a un evento fuera del control de la persona que sufre la pérdida.

Otro sistema que si paga con base en la ocurrencia de eventos aleatorios es el de juegos de azar. Sin embargo, jugar o apostar contrasta con un sistema de seguros en que este último está diseñado para proteger contra el impacto económico de los riesgos que existen independientemente de, y están fuera del control, del asegurado. El típico arreglo de apuestas se establece mediante la definición de reglas de pago, acerca de la ocurrencia de un evento, por lo que

el riesgo los hace participes en forma voluntaria. Al igual que el seguro, un arreglo de apuesta típico redistribuye la riqueza, pero hasta aquí termina la similitud.

Nuestra definición de un sistema de seguro es, intencionalmente, amplia. Abarca sistemas que cubren pérdidas tanto de valores de propiedad como de vidas humanas. Pretende cubrir sistemas de seguro basados en las decisiones individuales de participar, así como también sistemas en donde la participación es una condición del empleo o la residencia.

La justificación económica del sistema de seguro es que contribuye al bienestar general mediante el mejoramiento de la perspectiva de que los planes no se frustraran por eventos aleatorios. Tales sistemas también pueden incrementar la producción total al alentar a los individuos y corporaciones a embarcarse en empresas arriesgadas en las que la posibilidad de grandes pérdidas inhibiría dichos proyectos en ausencia del seguro. El desarrollo del seguro marítimo para reducir el impacto financiero de los peligros del mar, es un ejemplo de este punto. El comercio exterior permitió la especialización y una producción más eficiente, sin embargo, las actividades comerciales mutuamente ventajosas podrían ser muy arriesgadas para algunos socios comerciales potenciales sin la existencia de un sistema de seguro que los cubriera de posibles pérdidas en el mar.

1.2 Teoría de la Utilidad

Si las personas pudieran anticipar las consecuencias de sus decisiones, sus vidas serían más simples pero menos interesantes. Todos tomaríamos decisiones sobre la base de las preferencias para ciertas consecuencias. Sin embargo, no poseemos una anticipación perfecta. Lo más que podemos hacer es seleccionar una acción que nos conducirá a un conjunto de incertidumbres en lugar de otras. Se ha desarrollado una teoría que proporciona conocimientos sobre la toma de decisiones frente a la incertidumbre. Este cuerpo de conocimientos se llama ***teoría de la utilidad***. Debido a su importancia para los sistemas de seguro, se esbozaran aquí sus puntos principales.

Una solución al problema de la toma de decisiones frente a la incertidumbre es definir el valor de un proyecto económico con un resultado aleatorio que sea su valor esperado. Mediante este ***principio del valor esperado*** la distribución de los resultados posibles puede reemplazarse, para propósitos de decisión,

por un solo número, el valor esperado de los resultados monetarios aleatorios. Mediante este principio, un administrador seria indiferente entre asumir la pérdida aleatoria X y pagar la cantidad $E[X]$ para poder mitigar la posible pérdida. Igualmente un administrador estaría dispuesto a pagar hasta $E[Y]$ para participar en una apuesta con un pago aleatorio Y. En economía el valor esperado de los prospectos aleatorios con pagos monetarios, frecuentemente se llama ***valor justo o valor actuarial del prospecto.***

Muchos administradores no adoptan el principio del valor esperado. Para ellos, su nivel de riqueza y otros aspectos de la distribución de los resultados influyen sobre sus decisiones.

Abajo se presenta una ilustración diseñada para mostrar lo inadecuado del principio del valor esperado para un administrador que considera el valor del seguro contra accidentes. En todos los casos, se supone que la probabilidad de un accidente es 0.01 y que la probabilidad de que no se presente un accidente es 0.99. Se presentan tres casos de acuerdo al monto de la pérdida proveniente de un accidente; se calcula para cada uno la pérdida esperada.

Caso	Posibles Pérdidas		Pérdida Esperada
1	0	1	0.01
2	0	1 000	10.00
3	0	1 000 000	10 000.00

Una pérdida de 1 podría preocupar muy poco al administrador quien, por lo tanto, no podría estar dispuesto a pagar más que la pérdida esperada para obtener un seguro. Sin embargo, la pérdida de 1,000,000 que podría exceder su valor neto, podría ser catastrófico. En este caso, el tomador de decisiones estaría dispuesto a pagar más que la pérdida esperada de 10,000 para obtener un seguro. La posibilidad de que difieran lo que un administrador estaría dispuesto a pagar para protegerse contra una pérdida aleatoria y el valor esperado de la misma, sugiere que el principio del valor esperado es inadecuado para dictar tal conducta.

Ahora estudiaremos otro enfoque para explicar por qué un administrador podría estar dispuesto a pagar una cantidad superior al valor esperado. Al principio simplemente supondremos que el valor o utilidad que un administrador determinado asocia a un monto de riqueza w, medida en

dólares, puede especificarse como una función $u(w)$, que se denomina ***función de utilidad.*** Demostraremos un procedimiento mediante el cual se pueden determinar algunos valores de dicha función. Para ello supondremos que nuestro administrador tiene un caudal igual a 20,000.Como veremos, una transformación lineal,

$$u^*(w) = au(w) + b \qquad a > 0,$$

produce una función $u^*(w)$, que esencialmente es equivalente a $u(w)$. De aquí se deduce que mediante la selección de a y b podemos determinar arbitrariamente el punto 0 y un punto adicional de la función de utilidad de un individuo. Por lo tanto, fijaremos $u(0) = -1$ y $u(20{,}000) = 0$. Estos valores son los puntos extremos de la línea sólida de la figura 1.2.1

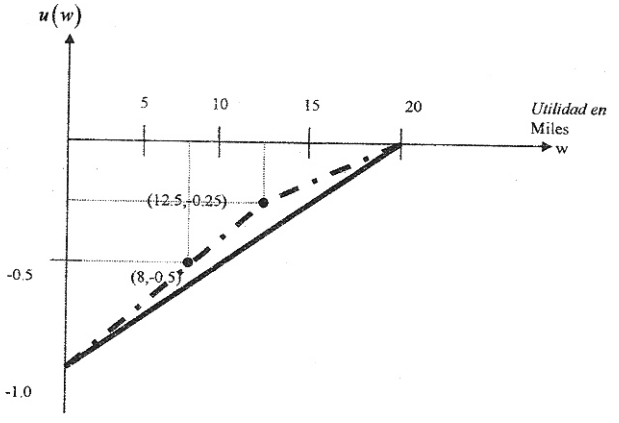


Figura 1.2.1 Determinación de la función de utilidad.

Ahora nos planteamos una pregunta de nuestro administrador: suponga que enfrenta una pérdida de 20,000 con una probabilidad 0.5, y que permanecerá en su actual nivel de riqueza con una probabilidad de 0.5 ¿Cuál es la máxima cantidad (*) G que estaría dispuesto a pagar por un seguro de protección completa contra está pérdida aleatoria?

(*) Por convención en la literatura de seguros las cantidades de las primas, se escriben en mayúsculas a pesar de que no sean variables aleatorias.

Podemos expresar está pregunta en la siguiente forma: ¿para qué valor de G,

$$u(20,000-G) = 0.5\,u(20,000) + 0.5\,u(0)$$
$$= (0.5)(0) + (0.5)(-1) = -0.5?$$

Si paga la cantidad G, su riqueza seguramente permanecerá en $20,000 - G$. El signo igual indica que el administrador será indiferente entre pagar G con certeza y aceptar la utilidad esperada de la riqueza expresada en el lado derecho de la ecuación.

Suponga que la respuesta del administrador es $G = 12,000$, por lo tanto,

$$u(20,000 - 12,000) = u(8,000) = -0.5$$

En la figura 1.2.1 se aprecia este resultado sobre la línea de puntos. Quizás el aspecto más importante de la respuesta del administrador es que está dispuesto a pagar una cantidad por el seguro que es mayor que:

$$(0.5)(0) + (0.5)(20,000) = 10,000$$

el valor esperado de la pérdida.

Este procedimiento puede utilizarse para añadir tantos puntos $[w, u(w)]$ para $0 \le w \le 20,000$, como sean necesarios para obtener una aproximación satisfactoria de la utilidad de la función de riqueza. Una vez que se ha asignado un valor de utilidad a los niveles de riqueza w_1 y w_2, en donde $0 \le w_1 < w_2 \le 20,000$, podemos determinar un punto adicional preguntando lo siguiente al administrador: ¿Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar por un seguro completo contra una situación que podría dejarlo en un nivel de riqueza w_2 con probabilidad especifica de p, o en un nivel menor de riqueza w_1 con probabilidad $1 - p$? Estamos pidiendo al administrador que fije un valor G tal que:

$$u(w_2 - G) = (1-p)\,u(w_1) + p\,u(w_2). \qquad (1.2.1)$$

Una vez que se tiene el valor $w_2 - G = w_3$, se determina el punto $[w_3, (1-p)\,u(w_1) + p\,u(w_2)]$ como otro punto de la función de utilidad. Se

utilizó el mismo procedimiento para determinar un cuarto punto (12 500, −0.25) el cual se aprecia en la figura 1.2.1.

Después de que el administrador ha determinado su función de utilidad de la riqueza por el método esbozado, la función puede utilizarse para comparar dos prospectos económicos aleatorios. Los prospectos se denotarán con las variables X y Y. Buscamos una regla de decisión que sea consistente con las preferencias ya deducidas en la determinación de la función de utilidad de la riqueza. Por lo tanto, si el administrador tiene una riqueza w y debe comparar los prospectos aleatorios X y Y, él escogerá X si

$$E\left[u(w+X)\right] > E\left[u(w+Y)\right]$$

y permanecerá indiferente entre X y Y si

$$E\left[u(w+X)\right] = E\left[u(w+Y)\right]$$

No obstante que el método para deducir y utilizar una función de utilidad puede parecer plausible, es claro que nuestro desarrollo informal debe crecer mediante una cadena de razonamientos más rigurosos si es que la teoría de la utilidad debe proporcionar un marco de trabajo coherente y comprehensivo para la toma de decisiones frente a la incertidumbre. Para comprender el rol económico del seguro es necesario contar con dicho marco. A continuación se presenta un esbozo de esta teoría más rigurosa.

La teoría se inicia con el supuesto de que cuando un administrador racional se enfrenta a dos distribuciones de resultados que afectan la riqueza, estará en posibilidad de expresar preferencia por una de las distribuciones o permanecerá indiferente ante ellas. Más aun, las preferencias deben satisfacer ciertos requisitos de consistencia. La teoría culmina con un teorema que establece que si las preferencias satisfacen los requisitos de consistencia existe una función de utilidad $u(w)$ tal que si la distribución de X es preferida a la distribución de Y, $E\left[u(X)\right] > E\left[u(Y)\right]$ y si el administrador es indiferente entre las dos distribuciones, $E\left[u(X)\right] = E\left[u(Y)\right]$ es decir, la preferencia cualitativa o la relación de indiferencia puede sustituirse por una comparación numérica consistente. En la sección 1.6, se proporcionan referencias bibliográficas sobre los desarrollos más detallados de está teoría.

Antes de pasar a las aplicaciones de la teoría de la utilidad dentro del seguro, debemos hacer algunas observaciones acerca de la utilidad.

Observaciones:

1. La teoría de la utilidad se construye sobre el supuesto de la existencia y consistencia de preferencias para las distribuciones de probabilidad de los resultados. Una función de utilidad no debería revelar sorpresas. Es una descripción numérica de las preferencias existentes.

2. Una función de utilidad no necesita, de hecho no puede ser determinada de manera única. Por ejemplo si

$$u^*(w) = a\,u(w) + b \quad a > 0,$$

entonces

$$E\left[u(X)\right] > E\left[u(Y)\right]$$

es equivalente a

$$E\left[u^*(X)\right] > E\left[u^*(Y)\right]$$

Es decir, las preferencias se conservan cuando la función de utilidad es una transformación lineal creciente de la forma original. Este hecho se utilizó en la Figura 1.2.1 en donde se escogieron dos puntos arbitrariamente.

3. Suponga que la función de utilidad es lineal, es decir,

$$u(w) = aw + b \quad a > 0$$

Entonces, si $E[X] = \mu_X$ y $E[Y] = \mu_Y$ tenemos

$$E\left[u(X)\right] = a\mu_X + b > E\left[u(Y)\right] = a\mu_Y + b$$

sí y sólo si $\mu_X > \mu_Y$. Es decir, para funciones lineales de utilidad crecientes de utilidad, las preferencias en la distribución de los resultados están en el mismo orden que los valores esperados de las distribuciones que están siendo comparadas. Por lo tanto, el principio del valor esperado para la conducta económica racional frente a la incertidumbre es consistente con la regla de la utilidad esperada cuando la función de utilidad es lineal y creciente.

1.3 Seguro y Utilidad

En la sección 1.2 delineamos la teoría de la utilidad con el propósito de obtener conocimiento del marco económico del seguro. Para examinar este marco empezamos con un ejemplo. Suponga que un administrador es dueño de una propiedad que puede dañarse o destruirse en el siguiente periodo contable. La cantidad de la pérdida, que puede ser 0, es una variable aleatoria que se denotará con X. Supondremos que la distribución de X es conocida. Entonces $E[X]$, la pérdida esperada en el siguiente periodo, puede interpretarse como la pérdida media a largo plazo si el experimento de exponer la propiedad al daño puede observarse bajo idénticas condiciones un gran número de veces. Es claro que este conjunto de pruebas de largo plazo no puede ser desarrollado por un solo administrador.

Suponga que se estableció una organización de seguros (***asegurador***) para ayudar a reducir las consecuencias financieras del daño o la destrucción de la propiedad. El asegurador puede establecer contratos (***pólizas***) que prometen pagar al poseedor de la propiedad una cantidad determinada igual o menor que la pérdida financiera si la propiedad resultara dañada o destruida durante el periodo de la póliza. El pago contingente vinculado a la cantidad de la pérdida se denomina pago por ***reclamación***. Como contraparte por la promesa contenida, el poseedor de la propiedad (***asegurado***) paga una cantidad (prima)

La cantidad del pago de la prima se determina siguiendo la adopción de un principio de decisión económica por el asegurador y el asegurado. Existe la oportunidad de una póliza de seguro mutuamente ventajosa cuando la prima de la póliza establecida por el asegurador es menor que la máxima cantidad que el dueño de la propiedad está dispuesto a pagar por el seguro.

Dentro del rango de los resultados financieros para una póliza individual de seguro, la función de utilidad del asegurador puede aproximarse mediante una línea recta. En este caso el asegurador adoptará el principio del valor esperado al establecer la prima, como se indicó en la Sección 1.2, Observación 3. Es decir el asegurador establecería su precio básico para un seguro de cobertura total según la pérdida esperada, $E[X]=\mu$. En este contexto μ se denomina ***prima neta o pura*** para la póliza de seguro de un periodo. Para pagar gastos, impuestos ganancias y alguna seguridad contra la experiencia adversa de pérdidas, el sistema de seguro decidiría establecer la prima de la póliza

mediante un recargo, sumándolo a la prima neta. Por ejemplo, la prima recargada, que se denota como H, puede estar dada por

$$H=(1+a)\mu+c \qquad a>0, c>0$$

En está expresión la cantidad $a\mu$ puede considerarse asociada a los gastos que varían con las perdías esperadas y con el riesgo de que la experiencia de reclamaciones se desviará de los esperado. La constante c reprenta los costos esperados que no varían con las pérdidas. Más adelante ilustraremos otros principios económicos para determinar primas que puede adoptar el asegurador.

Ahora aplicamos la teoría de la utilidad a los problemas de decisión enfrentados por el dueño de una propiedad sujeta a pérdida. El dueño de la propiedad tiene una función de utilidad de la riqueza $u(w)$ en donde w se mide en términos monetarios. El dueño enfrenta una posible pérdida debida a los eventos aleatorios que podrían dañar la propiedad. Se supone que se conoce la distribución de la pérdida aleatoria X. Igual que en (1.2.1) el poseedor sea indiferente entre pagar una cantidad G al asegurador, habiendo el asegurador asumido la pérdida financiera aleatoria y asumiendo él mismo el riesgo. La situación se puede expresar como:

$$u(w-G)=E\left[u(w-X)\right] \tag{1.3.1}$$

El lado derecho de (1.3.1) representa la utilidad esperada de no comprar seguro cuando la riqueza corriente del dueño es w. El lado izquierdo de (1.3.1) representa el valor esperado de pagar G por una protección financiera total.

Si el propietario tiene una función lineal creciente de utilidad,

$$u(w)=bw+d$$

estará adoptando el principio del valor esperado. Este caso (1.3.1) se transforma en:

$$u(w-G)=b(w-G)+d=E\left[u(w-X)\right]=E\left[b(w-X)+d\right]$$

$$b(w-G)+d=b(w-\mu)+d$$

$$G=\mu$$

Es decir, si el propietario tiene una función lineal creciente de utilidad, el pago de la prima que hará al dueño indiferente entre el seguro total y no asegurarse, es igual a la pérdida esperada. En la ausencia de un subsidio el asegurador, en el largo plazo, debe cargar más que sus pérdidas esperadas. Por lo tanto, en este caso, parece haber poca oportunidad de realizar un contrato de seguro mutuamente ventajoso. Si se quiere conseguir un contrato de seguro, el asegurador debe cargar una prima mayor que las pérdidas esperadas para evitar un sesgo hacia un ingreso insuficiente. Entonces el propietario del bien no puede tener una función lineal de utilidad.

En la sección 1.2 se mencionó que las preferencias de un administrador deben satisfacer ciertos requisitos de consistencia para asegurar la existencia de una función de utilidad. No obstante que estos requisitos no se mencionaron, no incluyen especificaciones que forzaran a las funciones de utilidad a ser lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas o de cualquier otra forma. En realidad, cada una de las funciones mencionadas podría servir como la función de utilidad para algún administrador o pueden juntarse para reflejar las preferencias de algún otro administrador.

Sin embargo, parece natural suponer que $u(w)$ es una función creciente; entre más, mejor. Además, se ha observado que para muchos administradores, cada adición de incrementos iguales de riqueza resultan en incrementos más pequeños de la utilidad asociada. Está es la idea de la utilidad marginal decreciente en economía.

La aproximación de la función de utilidad de la figura 1.1 consiste de segmentos de línea recta con pendientes positivas. Es tal que $\Delta^2 u(w) \leq 0$. Si se extienden estás ideas a funciones con variaciones más uniformes, las dos propiedades sugeridas por la observación son $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$. La segunda desigualdad indica que $u(w)$ es una función estrictamente cóncava hacia abajo.

Al discutir las decisiones de seguros utilizando funciones de utilidad estrictamente cóncavas hacia abajo, haremos uso de la ***desigualdad de Jensen***. Está desigualdad establece que si $u''(w) < 0$ y X es una variable aleatoria, entonces [2]:

$$E\left[u(X)\right] \leq u\left(E[X]\right) \quad ^{*} \qquad (1.3.2)$$

(*) La desigualdad es estricta, excepto cuando X es constante.

La ***desigualdad de Jensen*** requiere de la existencia de dos valores esperados. En el ejercicio 1.3, se pide una prueba de dicha desigualdad. Una segunda prueba se desprende casi inmediatamente de la consideración de la Figura 1.2

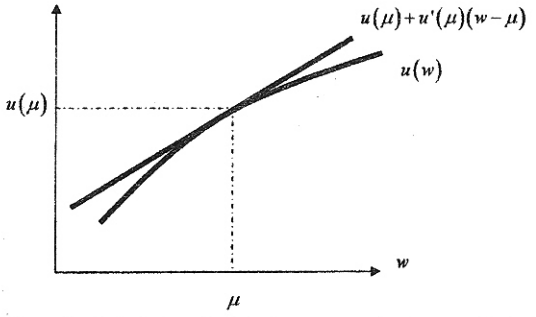


Figura 1.2 prueba de la desigualdad de Jensen suponiendo que $u'(w)>0$ y $u''(w)<0$

Si $E[X]=\mu$ existe, se considera la línea tangente,

$$y=u(\mu)+u'(\mu)(w-\mu)$$

en el punto $[\mu, u(\mu)]$. Debido a la característica de $u(w)$ de ser estrictamente cóncava, la grafica de $u(w)$ estará por debajo de la línea tangente. Esto es:

$$u(w)\le u(\mu)+u'(\mu)(w-\mu) \qquad (1.3.3)$$

para todos los valores de w. Si w se reemplaza por la variable aleatoria X y se toma la esperanza en ambos lados de la desigualdad (1.3.3) tenemos $E[u(X)]\le u(\mu)$. Está desigualdad básica tiene varias aplicaciones en matemáticas actuariales.

Apliquemos la ***desigualdad de Jensen*** al problema del seguro del administrador como se formuló en (1.3.1). Supondremos que las preferencias del administrador son tales que $u'(w)>0$ y $u''(w)<0$. Aplicando la desigualdad de Jensen a (1.3.1) tenemos:

$$u(w-G)=E\left[u(w-X)\right]\leq u(w-\mu) \qquad (1.3.4)$$

Como $u'(w)>0$, $u(w)$es una función creciente. Por lo tanto, (1.3.4) implica que $w-G\leq w-\mu$ o $G\geq\mu$, con $G>\mu$ a menos que X sea una constante. En términos económicos, hemos encontrado que si $u'(w)>0$ y $u''(w)<0$, el administrador pagará por el seguro una cantidad mayor que la pérdida esperada. Se dirá que dicho administrador es ***adverso (contrario) al riesgo***. Si Ges al menos igual a la prima establecida por el asegurador, existe la oportunidad de establecer una póliza de seguro mutuamente ventajosa.

Al principio de esta sección la función de utilidad de la riqueza del asegurador se representó en forma aproximada mediante una línea recta en el rango de resultados asociados con una póliza individual. Ahora emplearemos una función de utilidad general para el asegurador. Representemos por $u_I(w)$ la función de utilidad de la riqueza del asegurador y por w_I la riqueza actual del asegurador medida en términos monetarios. Entonces la prima mínima aceptable H, para asumir la pérdida aleatoria X, desde el punto de vista del asegurador, puede determinarse a partir de (1.3.5):

$$u_I(w_I)=E\left[u_I(w_I+H-X)\right] \qquad (1.3.5)$$

El lado izquierdo de (1.3.5) es la utilidad asociada a la posición actual del asegurador. El lado derecho es la utilidad esperada asociada con el cobro de la prima H y el pago de la pérdida aleatoria X. En otras palabras, el asegurador es indiferente entre su posición actual y la de proporcionar un seguro para X con una prima H. Si el asegurador es adverso al riesgo, $u'_I(w)>0$, $u''_I(w)<0$, podemos usar la desigualdad de Jensen junto con (1.3.5) para obtener:

$$u_I(w_I)=E\left[u_I(w_I+H-X)\right]\leq u_I(w_I+H-\mu)$$

Siguiendo la misma línea de razonamiento desarrollada en relación con (1.3.4), podemos concluir que $H\geq\mu$. Si G, como la determinó el administrador al resolver (1.3.4), es tal que $G\geq H\geq\mu$, la póliza de seguro es ***factible***, es decir, la utilidad esperada no se disminuye para ninguna de las partes del contrato.

La función de utilidad está basada sobre las preferencias del administrador para varias distribuciones de resultados. Un asegurador no necesita ser un individuo. Puede ser una sociedad, corporación o agencia gubernamental. En está situación la determinación de $u_I(w)$, la función de utilidad del asegurador, puede ser un asunto bastante complicado. Por ejemplo, si el asegurador es una corporación, una de las responsabilidades de la administración es la formulación de un conjunto de preferencias coherente para varias empresas de seguro riesgosas. Estás preferencias pueden incluir acuerdos entre actitudes conflictivas hacia el riesgo por parte de los grupos de accionistas.

Varias funciones elementales se utilizan para ilustrar las propiedades de las funciones de utilidad, aquí examinaremos las formas exponenciales, las potencias fraccionarias y las cuadráticas. Los ejercicios 1.6, 1.8, 1.9, 1.10 y 1.13 abarcan las funciones de utilidad logarítmicas.

Una ***función de utilidad exponencial*** tiene la forma de

$$u(w) = -e^{-\alpha w} \qquad \alpha > 0$$

y tiene varias características atractivas. Primero,

$$u'(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0$$

y

$$u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w} < 0$$

Por lo tanto, $u(w)$ puede servir como la función de utilidad de un individuo con aversión al riesgo. Segundo, encontrar

$$E\left[-e^{-\alpha X}\right] = -E\left[e^{-\alpha X}\right] = -M_X(-\alpha)$$

es esencialmente lo mismo que encontrar la ***función generadora de momentos*** *(f.g.m.)* de X. En esta expresión,

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

representa la *f.g.m* de X. Tercero, las primas del seguro no dependen de la riqueza del administrador. Está proposición se verifica para el asegurado mediante la sustitución de la función exponencial de utilidad en (1.3.1). Es decir,

$$-e^{-\alpha(w-G)} = E\left[-e^{-\alpha(w-X)}\right]$$

$$e^{\alpha G} = M_X(\alpha)$$

$$G = \frac{\log M_x(\alpha)}{\alpha}$$

y no depende de w.

La verificación para el asegurador se hace mediante la sustitución de la función de utilidad exponencial con parámetro α_I en (1.3.5):

$$-e^{-\alpha_I w_I} = E\left[-e^{-\alpha_I(w_I+H-X)}\right]$$

$$-e^{-\alpha_I w_I} = -e^{-\alpha_I(w_I+H)} M_X(\alpha_I)$$

$$H = \frac{\log M_X(\alpha_I)}{\alpha_I}.$$

Ejemplo 1.1:

La función de utilidad de un administrador dada por $u(w) = -e^{-5w}$, tiene dos prospectos económicos aleatorios disponibles. El primero resultado representado por X, tiene una distribución normal con media 5 y varianza 2. De aquí que, una proposición acerca de la distribución normal con media μ y varianza σ^2 se abreviará como $N(\mu,\sigma^2)$ y el segundo prospecto, representado por Y, se distribuye como $N(6,2.5)$. ¿Cuál prospecto será preferible?

Solución:

Tenemos

$$E\left[u(X)\right] = E\left[-e^{-5X}\right]$$

$$= -M_X(-5) = -e^{\left[-5(5)+\frac{(5^2)(2)}{2}\right]}$$

$$= -1,$$

y

$$E\left[u(Y)\right] = E\left[-e^{-5Y}\right]$$

$$= -M_Y(-5) = -e^{\left[-5(6)+\frac{(5^2)(2.5)}{2}\right]}$$

$$= -e^{1.25}$$

Por lo tanto,

$$E\left[u(X)\right] = -1 > E\left[u(Y)\right] = -e^{1.25}$$

y la distribución de X es preferible a la distribución de Y. ∇

En el ejemplo 1.1 el prospecto X es preferible al de Y a pesar del hecho de que $\mu_X = 5 < \mu_Y = 6$. Como el administrador tiene aversión al riesgo, el hecho de que la distribución de Y sea más difusa que la distribución de X tiene mayor ponderación que la distribución de Y al evaluar su conveniencia. Si Y tuviera una distribución $N(6,2.4)$, entonces $E[u(y)] = -1$ y el administrador sería indiferente entre la distribución de X y la de Y.

La familia de funciones de utilidad de potencia fraccionaria está dada por

$$u(w) = w^{\gamma} \qquad w > 0, \quad 0 < \gamma < 1$$

Un miembro de esta familia podría representar las preferencias de un administrador con aversión al riesgo ya que

$$u'(w) = \gamma w^{\gamma-1} > 0$$

y

$$u''(w) = \gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2} < 0$$

en está familia las primas dependen de la riqueza del administrador en una forma que puede ser bastante realista en muchas situaciones.

Ejemplo 1.2:

La función de utilidad de un administrador está dada por $u(w)=\sqrt{w}$, tiene una riqueza de $w=10$ y enfrenta una pérdida aleatoria X con una distribución uniforme en $(0,10)$. ¿Cuál es la cantidad máxima que pagará por un seguro completo contra la pérdida aleatoria?

Solución:

Sustituyendo dentro de (1.3.1) tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{10-G} &= E\left[\sqrt{10-X}\right] \\ &= \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{10}dx \\ &= \frac{-2\sqrt{(10-x)^3}}{3(10)}\Bigg|_0^{10} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{10} \\ G &= 5.5556\end{aligned}$$

El administrador tiene aversión al riesgo, y siguiendo con la discusión de la expresión (1.3.4), esperaríamos que $G>E[X]$ y en este ejemplo $G=5.5556>E[X]=5$ ∇

La familia ***de utilidad de funciones cuadráticas*** está dada por

$$u(w)=w-\alpha w^2 \qquad w<(2\alpha)^{-1}, \alpha>0.$$

Un miembro de está familia podría representar las preferencias de un administrador contrario al riesgo ya que $u'(w)=1-2\alpha w>0$, cuando $w<(2\alpha)^{-1}$ y $u''(w)=-2\alpha$. No obstante que la función de utilidad cuadrática es conveniente porque las decisiones dependerán solo de los dos primeros momentos de la distribución de resultados bajo consideración, hay ciertas consecuencias que se derivan de su uso que resultan irrazonables para algunas personas. El ejemplo 1.3 ilustrará una de estás consecuencias.

Ejemplo 1.3:

La función de utilidad de la riqueza del administrador está dada por

$$u(w) = w - 0.01w^2 \qquad w < 50$$

Él retendrá riqueza por la cantidad w, con probabilidad p y sufrirá una pérdida financiera de monto c, con probabilidad $1-p$. Encuentre la prima de seguro máxima que el administrador pagará por un seguro completo para los valores de w, c y p que se presentan más adelante.

Solución:

Por los hechos establecidos, (1.3.1) se transforma en

$$u(w-G) = pu(w) + (1-p)u(w-c)$$

$$(w-G) - 0.01(w-G)^2 = p\left[w - 0.01w^2\right] + (1-p)\left[(w-c) - 0.01(w-c)^2\right]$$

Para los valores dados de w, c y p está expresión se transforma en una ecuación cuadrática. Se presentan dos soluciones.

Riqueza w	Pérdida c	Probabilidad p	Prima de Seguro G
10	10	0.5	5.28
20	10	0.5	5.37

V

Como se había mencionado, en el ejemplo 1.3, G es más mayor que la pérdida esperada de 5. Sin embargo, la prima de seguro máxima para exactamente la misma distribución de la pérdida se incrementa con la riqueza del administrador. Este resultado parece poco razonable para aquellos que anticipen que una conducta más típica sería una disminución en la cantidad que el administrador pagaría por el seguro, cuando un incremento en la riqueza le permitiera absorber más pérdida aleatoria. Desafortunadamente, una prima máxima de seguro que aumenta con la riqueza, es una propiedad de las funciones cuadráticas de utilidad. Consecuentemente, estas funciones de utilidad no deben ser seleccionadas por un administrador quien percibe que su habilidad para absorber pérdidas aleatorias se incrementa con el aumento en la riqueza.

Si replanteamos el ejemplo 1.3 utilizando una función de utilidad exponencial, sabemos que la prima G no dependerá de w, la cantidad de riqueza. De hecho si $u(w) = -e^{-0.01w}$ puede mostrarse que $G = 5.12$ para $w = 10$ y $w = 20$.

Ejemplo 1.4:

La probabilidad de que una propiedad no sea dañada en el siguiente periodo es 0.75. La función de densidad de probabilidad (*f.d.p.*) de una pérdida positiva está dad por

$$f(x) = 0.25\left[0.01\ e^{-0.01x}\right] \qquad x > 0$$

El dueño de la propiedad tiene una función dada por

$$u(w) = -e^{-0.005w}$$

Calcule la pérdida esperada y la prima de seguro máxima que el dueño de la propiedad pagará.

Solución.

La pérdida esperada está dada por

$$\begin{aligned} E[X] &= 0.75(0) + 0.25\int_0^\infty x\left(0.01e^{-0.01x}\right)dx \\ &= 25 \end{aligned}$$

Aplicaremos (1.3.1) para determinar la prima máxima que el propietario pagará por el seguro completo. La prima será consistente con las preferencias del propietario como se resume en la función de utilidad:

$$\begin{aligned} u(w-G) &= 0.75u(w) + \int_0^\infty u(w-x)f(x)dx \\ -e^{-0.005(w-G)} &= -0.75e^{-0.005w} - 0.25\int_0^\infty e^{-0.005(w-x)}\left(0.01e^{-0.01x}\right)dx \\ e^{0.005G} &= 0.75 + (0.25)(2) \\ &= 1.25 \\ G &= 200\ \log 1.25 \\ &= 44.36 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo con la preferencias del propietario, este pagará hasta 44.63-25=19.63 en exceso de la pérdida esperada al comprar un seguro que cubra el total de pérdidas en el periodo siguiente. ∇

En el ejemplo 1.5 se introducirá la noción de seguro que cubre un poco menos que la perdía total. Se hará una modificación en (1.3.1) para tomar en cuenta el hecho de que las pérdidas serán compartidas por el administrador y el sistema de aseguramiento.

Ejemplo 1.5.

En el ejemplo 1.4 se le ofrece al propietario una póliza de seguro que pagará la mitad de cualquier pérdida durante el periodo siguiente. El valor esperado de los pagos parciales de la pérdida es $E[X/2]=12.50$

Calcule la prima máxima que el propietario pagará por este seguro.

Solución

Consistente con su actitud hacia el riesgo como se resume en su función de utilidad, la prima se determinara a partir de

$$0.75u(w-G)+\int_0^\infty u\left(w-G-\frac{x}{2}\right)f(x)dx$$

$$=0.75u(w)+\int_0^\infty u(w-x)f(x)dx$$

El miembro izquierdo de está ecuación representa la utilidad esperada con la cobertura de seguro parcial. El miembro derecho representa la utilidad esperada sin seguro. Para la función de utilidad exponencial y la *f.d.p* de las pérdidas especificada en el ejemplo 1.4, puede demostrarse que G es igual a 28.62. El administrador está dispuesto a pagar hasta $G-\mu=28.62-12.50=16.12$ más que la pérdida parcial esperada por la cobertura del seguro parcial ∇

1.4 Elementos del Seguro

Los individuos y las organizaciones enfrentan la amenaza de pérdidas financieras causadas por eventos aleatorios. En la sección 1.3 se vio como el seguro puede incrementar la utilidad esperada de un administrador que enfrenta dichas pérdidas aleatorias. Los sistemas de seguro son únicos en el sentido de que la principal razón de su existencia es mitigar las pérdidas financieras en las que el número, tamaño o tiempo de ocurrencia son aleatorios. En está sección revisaremos algunos de los factores que influyen la organización y manejo de un sistema de seguro.

Un sistema de seguro puede organizarse solo después de la identificación de una clase de situaciones en donde pueden ocurrir pérdidas aleatorias. La palabra ***aleatorio*** significa aquí, de acuerdo con otros atributos, que la frecuencia, tamaño o tiempo de la pérdida no está bajo el control del asegurado en prospecto. Si tal control existiera, o si una reclamación de pago excediera la pérdida financiera real, existiría un incentivo para incurrir en la pérdida. En tal situación, los supuestos bajo los cuales se organizó el sistema de seguro no serían válidos. Las condiciones reales bajo las que se cobran las primas y se pagan las reclamaciones serán diferentes de las asumidas al organizar el sistema. Este no alcanzará el objetivo propuesto de no disminuir las utilidades esperadas de los asegurados y el asegurador.

Una vez que se identifica una clase de situaciones susceptibles de asegurarse, se puede obtener información sobre las utilidades esperadas y el proceso de generación de pérdidas. La investigación de mercados de seguros puede verse como un esfuerzo para aprender acerca de las funciones de utilidad, es decir, sobre las preferencias de riesgo de los consumidores.

El proceso que genera el tamaño y tiempo de la pérdida puede ser suficientemente estable en el tiempo en tal forma que la información del pasado puede utilizarse para planear el sistema. Cuando se organiza un nuevo sistema de seguro, frecuentemente, no están disponibles estadísticas directamente relevantes. Sin embargo, puede obtenerse suficiente información fundamental de situaciones similares de riesgo para identificar los riesgos y proporcionar estimaciones preliminares de las distribuciones de probabilidad requeridas para determinar las primas. Debido a que la mayoría de los sistemas operan bajo condiciones dinámicas, es importante que exista un plan para recabar y analizar los datos operativos del seguro en tal forma que se pueda adaptar un sistema de seguro. La adaptación en este caso puede

significar cambiar primas, pagar un dividendo basado en la experiencia o un reembolso de la prima o modificar las pólizas futuras.

En una economía competitiva, las fuerzas del mercado estimularán a los aseguradores a fijar el precio de las pólizas de corto plazo de manera que las desviaciones del valor esperado observado se comporten como variables aleatorias independientes. Las desviaciones no deben exhibir un patrón que pudiese ser explotado por los asegurados o lo aseguradores para obtener ganancias consistentes. Tal tipo de desviaciones consistentes indicarían ineficiencias en el mercado asegurador.

Como resultado, la clasificación de riesgos en grupos homogéneos es una función importante del sistema asegurador basado en el mercado. Las desviaciones aleatorias de la experiencia indican eficiencia o equidad en la clasificación, en un mercado asegurador competitivo, la interacción continua de numerosos compradores y vendedores obliga a experimentar con los sistemas de clasificación ya que los participantes del mercado intentan sacar ventaja de los patrones percibidos. Debido a que las pérdidas de seguros pueden ser eventos relativamente escasos, frecuentemente es difícil identificar patrones no aleatorios. El costo de clasificar la información para obtener un sistema refinado establece, también, un límite a la experimentación en esta área.

Para los sistemas de seguro organizados para atender a grupos más que a individuos, la cuestión no es si las desviaciones de la experiencia de seguros son aleatorias para cada individuo. En lugar de ello, lo importante es si las desviaciones del grupo son aleatorias. En la práctica, la persistencia de desviaciones respecto a lo esperado indicaría la necesidad de revisar el sistema.

Las decisiones de un seguro de grupo no se sustentan en las comparaciones de la utilidad individual esperada. En vez de ello los planes de seguro de grupo se basan en una decisión colectiva respecto a sí el sistema incrementa el bienestar total del grupo. Un ejemplo es el seguro médico de grupo que proporciona beneficios a los empleados de una empresa.

1.5 Seguro Optimo

Las ideas esbozadas en las secciones 1.2, 1.3 y 1.4 se han utilizado como fundamento de una teoría elaborada para guiar a quienes toman decisiones acerca de seguros, a realizar acciones consistentes con sus preferencias. En esta sección presentaremos uno de los principales resultados de está teoría y revisaremos muchas de las ideas introducidas hasta el momento.

Un administrador tiene una cantidad de riqueza w y enfrenta una pérdida en el siguiente periodo. Está pérdida es una variable aleatoria y se denota con X. El administrador puede comprar una póliza de seguro que pagará $I(x)$ de la pérdida. Para eliminar el incentivo de incurrir en la pérdida supondremos que todas las pólizas de seguro disponibles son tales que $0 \le I(x) \le x$. Hacemos el supuesto de que cualquier póliza puede comprarse por el monto del pago de la reclamación esperada. Es decir, la prima para una póliza que paga $I(x)$ es $E[I(X)] \le E[X]$.

El administrador ha formulado una función de utilidad $u(w)$ que es consistente con sus preferencias sobre las distribuciones de los resultados. Supondremos que el administrador es contrario al riesgo, es decir, $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$. Además, suponemos que le administrador ha decidido sobre el monto a pagar por el seguro, denotado por P. La pregunta es ¿Cuál de las pólizas de seguro de entre los diversos tipos disponibles debería comprarse para maximizar la utilidad esperada del administrador?

Una subclase de pólizas se define como sigue:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & x < d \\ x - d & x \ge d \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

Está clase de pólizas se caracteriza por el hecho de que los pagos por reclamación no empiezan hasta que la pérdida excede la cantidad deducible d. Para las pérdidas que se sitúan por encima de la cantidad deducible, el excedente se paga bajo los términos de la póliza. Algunas veces a este tipo de póliza se llama seguro para prever pérdidas adicionales (***stop – loss***) o ***seguro de pérdida excedente*** (sobre la cantidad deducible).

En el problema que se plantea en esta sección la prima P es igual a las reclamaciones esperadas. En (1.5.2) el símbolo $f(x)$ denota la función de de densidad de probabilidad (*f.d.p.*) y el símbolo $F(x)$ denota la función de distribución (*f.d.*) asociada con la variable aleatoria X :

$$P = \int_d^{\infty} (x-d) f(x) dx \tag{1.5.2A}$$

o

$$P = \int_d^{\infty} \left[1 - F(x)\right] dx \tag{1.5.2B}$$

La ecuación (1.5.2B) se obtiene integrando por partes. En el siguiente desarrollo, el monto de la prima P está dada. Entonces (1.5.2) proporciona ecuaciones explicitas para el deducible correspondiente, denotado por d^*. En el Ejercicio 1.15, se demuestra que d^* existe y es único.

El principal resultado de está sección se expresa como un teorema.

Teorema 1.1:

Si un administrador:

- tiene una cantidad de riqueza w,
- es contrario al riesgo, en otras palabras, su función de utilidad de la riqueza $u(w)$ es tal que $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$,
- enfrenta una pérdida aleatoria X,
- gastará la cantidad P en un seguro donde $0 < P \leq E[X] = \mu$

y el mercado de seguro

- ofrece todas las pólizas de seguro posibles de la forma $I(x)$, $0 \leq I(x) \leq x$, y
- ofrece la compra de una póliza de seguro por el pago de la pérdida esperada, $E[I(X)]$,

Entonces la utilidad esperada del administrador se maximizará al comprar una póliza de seguro

$$I_{d^*}(x) = \begin{cases} 0 & 0 < d^* \\ x - d^* & x \geq d^* \end{cases}$$

en donde d^* es la solución de

$$P - \int_d^\infty (x-d) f(x) dx = 0$$

La prueba del teorema se presenta en el anexo de este capítulo.

El teorema 1.1 es un resultado importante y ejemplifica muchas de las ideas desarrolladas en este capítulo. Sin embargo, es instructivo considerar ciertas limitaciones de su aplicabilidad. Primero, el seguro no puede comprarse por el precio de las reclamaciones esperadas, a pesar de que las consideraciones adicionales para gastos, ganancias y seguridad son relativamente pequeñas en relación al costo básico, por tanto el teorema es valido para los individuos con más aversión al riesgo. También, a pesar de que el teorema indica la forma del seguro, no ayuda a determinar el monto P, a gastar. En el teorema P es fijo.

1.6 Notas y Referencias

El papel del riesgo en los negocios fue desarrollado en una tesis pionera por Willet (1951). Borch (1974) ha publicado una serie de escritos aplicando la teoría de la utilidad a temas de seguros. DeGroot (1970) da un desarrollo completo de la teoría de la utilidad empezando desde los axiomas básicos de la consistencia entre las preferencias para varias distribuciones de resultados. DeGroot y Borch discuten la importancia histórica de la paradoja de St. Petersburgo, esbozada en el Ejercicio 1.2. El escrito de Fiedman y Savage (1948) proporciona muchos conocimientos de la teoría de la utilidad y la conducta humana.

Pratt (1964) ha estudiado (1.3.1) y derivado varios teoremas acerca de las primas y las funciones de utilidad. El ejercicio 1.10, que utiliza dos aproximaciones generales, está relacionado con uno de los resultados de Pratt.

El teorema 1.1 sobre seguro óptimo fue probado por Arrow (1963) en el contexto del seguro médico. El teorema del Ejercicio 1.20 en el que la meta del seguro es minimizar la varianza de las pérdidas retenidas fue el tema de las ponencias de Borch (1960) y Kahn (1961).

1.7 Apéndice

Lema:

Si $u''(y) < 0$ para toda y en (z, w), entonces

$$u(w) - u(z) \leq (w - z)u'(z) \tag{1.A.1}$$

Prueba:

El lema puede establecerse con la ayuda de la Figura 1.2. Usando la forma de punto pendiente, una línea tangente a $u(w)$ en el punto $[w_0, u(w_0)]$ tiene la ecuación $y - u(w_0) = u'(w_0)(w - w_o)$ y estará por encima de la gráfica de la función $u(w)$ excepto en el punto $[w_0, u(w_0)]$. Por lo tanto:

$$u(w) - u(w_0) \leq u'(w_0)(w - w_0)$$

Puede repetirse el mismo argumento para cualquier número z. □

En el ejercicio 1.18 se requiere una prueba alternativa.

Prueba del Teorema 1.1;

Sea $I(x)$ asociado con una póliza de seguro que satisfaga la hipótesis del teorema. Entonces del lema

$$\begin{aligned} &u(w - x + I(x) - P) - u(w - x + I_{d^*}(x) - P) \\ &\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \end{aligned} \tag{1.A.2}$$

Además, afirmamos que

$$\begin{aligned} &[I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \\ &\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - d^* - P) \end{aligned} \tag{1.A.3}$$

Para establecer la desigualdad (1.A.3), debemos considerar tres casos:

Caso I. $I_{d^*}(x) = I(x)$

En este caso la igualdad se cumple, (1.A.3) es 0 en ambos lados.

Caso II. $I_{d^*}(x) > I(x)$

En este caso $I_{d^*}(x) > 0$ y de (1.5.1), $x - I_{d^*}(x) = d^*$. Por lo tanto, la igualdad se cumple en ambos casos de (1.A.3) igual a $\left[I(x) - I_{d^*}(x)\right]u'\left(w - d^* - P\right)$

Caso III $I_{d^*}(x) < I(x)$

En este caso $I(x) - I_{d^*}(x) > 0$. De (1.5.1) obtenemos $I_{d^*}(x) - x \geq -d^*$ y $I_{d^*}(x) - x - P \geq -d^* - P$.

$$\therefore \; u'\left(w - x + I_{d^*}(x) - P\right) \leq u'\left(w - d^* - P\right)$$

ya que la segunda derivada de $u(x)$es negativa y $u'(x)$es una función decreciente.

Por lo tanto, para cada caso

$$\left[I(x) - I_{d^*}(x)\right]u'\left(w - x + I_{d^*}(x) - P\right) \leq \left[I(x) - I_{d^*}(x)\right]u'\left(w - P - d^*\right)$$

estableciendo la desigualdad (1.A.3.)

Ahora combinando las desigualdades (1.A.2) y (1.A.3) y tomando su esperanza de ambos lados de la desigualdad, tenemos

$$E\left[u\left(w - X + I(X) - P\right)\right] - E\left[u\left(w - X + I_{d^*}(X) - P\right)\right]$$
$$\leq E\left[I(X) - I_{d^*}(X)\right]u'\left(w - d^* - P\right) = (P - P)u'\left(w - d^* - P\right) = 0$$

Por lo tanto,

$$E\left[u\left(w - X + I(X) - P\right)\right] \leq E\left[u\left(w - X + I_{d^*}(X) - P\right)\right]$$

y la utilidad esperada se maximizará al seleccionar $I_{d^*}(x)$, siendo una póliza stop Loss.

1.8 Ejercicios

Sección 1.2

1.1 Suponga que la riqueza actual de un administrador es 10,000. asigne $u(0)=-1$ y $u(10{,}000)=0$

a. Cuando enfrenta una pérdida de X con probabilidad 0.5 y permanece con su riqueza actual con una probabilidad 0.5, el administrador estaría dispuesto a pagar hasta G por un seguro completo. A continuación se dan valores de X y G en tres situaciones.

X	G
10,000	6,000
6,000	3,300
3,300	1,700

Determine tres valores de la función de utilidad de la riqueza u del administrador.

b. Calcule las primera y segundas diferencias divididas de los valores dados de $u(0)$, $u(10{,}000)$ y los tres valores intermedios de u determinada en la parte (a).

c. Póngase usted en el papel del administrador con una riqueza de 10,000. Además deduzca a los valores dados de $u(0)$ y $u(10{,}000)$, tres valores adicionales de su función de utilidad de la riqueza u.

d. Sobre la base de los cinco valores de su función de utilidad, calcule las primeras y segundas diferencias divididas.

1.2 **La paradoja de San Petersburgo**: considere un juego de azar que consiste en tirar una moneda hasta que salga águila. La probabilidad de obtener un águila es 0.5 y los ensayos son independientes. Sea N la variable aleatoria que denota el número del ensayo en el que se obtiene la primera águila

a. Demuestre que la función de probabilidad (*f.p.*) de N está dada por

$$f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad n=1,2,3,....$$

b. Encuentre $E(N)$ y $Var(N)$

c. Si se paga una recompensa de $X=2^N$, pruebe que la esperanza de la recompensa no existe.

d. Si esta recompensa tiene una utilidad $u(w)=\log w$, encuentre $E[u(X)]$.

Sección 1.3

1.3 **Desigualdad de Jensen:**

a. Suponga $u''(w)<0$, $E[X]=\mu$ y $E[u(X)]$ existen; pruebe que $E[u(X)]\le u(\mu)$ [sugerencia: exprese $u(w)$ como una serie alrededor del punto $w=\mu$ y termine la expansión con un término de error que involucre la segunda derivada. Note que la desigualdad de Jensen no requiere que $u'(w)>0$.]

b. Si $u''(w)>0$, pruebe que $E[u(X)]\ge u(\mu)$

c. Discuta la desigualdad de Jensen para el caso especial $u(w)=w^2$. ¿Qué significa $E[u(X)]-u(E[X])$?

1.4 Si una función de utilidad es tal que $u'(w)>0$ y $u''(w)>0$, use (1.3.1) para demostrar $G\le\mu$. Un administrador con preferencias consistentes con esta función de utilidad es *amante al riesgo*.

1.5 Construya un argumento geométrico, basado en una gráfica como la mostrada en la Figura 1.2, si $u'(w)<0$ y $u''(w)<0$ entonces determina (1.3.3).

1.6 Confirme que la función de utilidad $u(w)=\log w$, $w>0$, es la función de utilidad de un administrador que es adverso al riesgo para $w>0$.

1.7 Una función de utilidad está dada por

$$u(w)=\begin{cases} e^{\frac{-(w-100)^2}{200}} & w<100 \\ 2-e^{\frac{-(w-100)^2}{200}} & w\geq 100 \end{cases}$$

a. ¿Es $u'(w)\geq 0$?

b. ¿Para cuál rango de w es $u''(w)<0$?

1.8 Si uno supone, como lo hizo *J. Bernoulli* en sus comentarios a la paradoja de *San Petersburgo*, que la utilidad de la riqueza satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{du(w)}{dw}=\frac{d}{dw}u(w)=\frac{k}{w} \qquad w>0,\ k>0$$

Confirme que: $u(w)=k\log w+c$

1.9 Un administrador tiene una función de utilidad $u(w)=k\log w$. Tiene un monto de riqueza w, $w>1$, y enfrenta una pérdida aleatoria X que tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Utilice la expresión del punto (1.3.1) para demostrar que la prima máxima de seguro que pagará es:

$$G=w-\frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}$$

1.10

a. En la expresión (1.3.1) use las aproximaciones:

$$u(w-G)\cong u(w-\mu)+(\mu-G)u'(w-\mu)$$

$$u(w-x)\cong u(w-\mu)+(\mu-x)u'(w-\mu)+\frac{1}{2}(\mu-x)^2u''(w-\mu)$$

y derive la siguiente aproximación de G:

$$G\cong\mu-\frac{1}{2}\frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)}\sigma^2$$

b. Si $u(w)=k\log w$, utilice la aproximación desarrollada en el inciso anterior para obtener la aproximación.

$$G\cong \mu+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{(w-\mu)}$$

1.11 El administrador tiene una función de utilidad $u(w)=-e^{-\alpha w}$ y se enfrenta a una pérdida aleatoria que tiene una distribución ji-cuadrada con n grados de libertad. Si $0<\alpha<\frac{1}{2}$ utilice (1.3.1) para obtener una expresión para G que es la prima de seguro máxima que pagará el administrador, y pruebe que $G>n=\mu$.

1.12 Rehaga el ejemplo 1.4 para

a. $u(w)=-e^{-\frac{w}{400}}$

b. $u(w)=-e^{-\frac{w}{150}}$

1.13

a. Una aseguradora pequeña aceptó (y cobro la prima de) un riesgo X con un valor neto de 100 u.m., donde X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$\Pr(X=0)=\Pr(X=51)=\frac{1}{2}$$

¿Cuál es la cantidad máxima G que debería pagar un reasegurador para aceptar el 100% de está pérdida? Suponga que la función de utilidad de la riqueza del asegurador es $u(w)=\log w$.

b. Un reasegurador grande, con un monto de riqueza de 650 u.m. y la misma función de utilidad, $u(w)=\log w$, está considerado aceptar el riesgo mencionado arriba ¿Cuál es la cantidad mínima H que aceptaría como prima para reasegurar el 100% de la pérdida?

Sección 1.4

1.14 Se expide una póliza de gastos hospitalarios a un grupo que consiste de n individuos. La póliza paga B dólares cada vez que un miembro del grupo ingresa al hospital. El grupo no es homogéneo con respecto al número esperado de admisiones hospitalarias cada año. El grupo puede dividirse en r subgrupos. Hay n_i, individuos en el subgrupo i y $\sum_1^r n_i = n$, para el subgrupo i el número anual de admisiones para cada miembro está dado por una distribución Poisson con parámetro λ_i, $i = 1,2,...r$. El número anual de admisiones hospitalarias para los componentes del grupo son mutuamente independientes.

a. Demuestre que las reclamaciones de pago esperadas en 1 año son

$$B\sum_1^r n_i\lambda_i = Bn\bar{\lambda}$$

En donde

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_1^r n_i\lambda_i}{n}$$

b. Demuestre que el número de admisiones hospitalarias en 1 año para el grupo tiene una distribución de Poisson con parámetro $n\bar{\lambda}$:

Sección 1.5

1.15

a. Derive el lado derecho de la expresión (1.5.2A) con respecto a d.
b. Sea P un número tal que $0 < P < E[X]$. Demuestre que la expresión (1.5.2), tiene una solución única d^*.

1.16 Efectúe la integración por partes para la expresión (1.5.2B). Use el hecho de que si $E[X]$ existe, entonces $\lim_{x\to\infty} x[1 - F(x)] = 0$.

1.17 Sea X una variable aleatoria de pérdidas, la cual tiene una f.d.p. dada por

$$f(x) = 0.1\, e^{-0.1x} \qquad x > 0$$

a. Determine $E[X]$ y $Var[X]$

b. Si $P=5$ va a ser gastado en un seguro que se comprara por el pago de la prima pura, demuestre que

$$I(x)=\frac{x}{2}$$

y

$$I_d(x)=\begin{cases} 0 & x<10\log 2 \\ x-10\log 2 & x\geq 10\log 2 \end{cases}$$

Ambas representan pólizas de seguros posibles, con prima pura $P=5$. $I(x)$ se denomina ***seguro proporcional***

1.18 La variable aleatoria de pérdidas X tiene un f.d.p. dada por

$$f(x)=\frac{1}{100} \qquad 0<x<100$$

a. Determine $E[X]$ y $Var[X]$

b. Considere una póliza proporcional en donde

$$I_1(x)=kx \qquad 0<k<1$$

y una póliza (stop-Loss) en donde

$$I_2(x)=\begin{cases} 0 & x<d \\ x-d & x\geq d \end{cases}$$

Determine K y d tales que prima pura en cada caso sea $P=12.5$

c. Demuestre que $Var[X-I_1(X)]>Var[X-I_2(X)]$

1.19 Establezca el lema utilizando un argumento analítico en lugar de uno geométrico. [sugerencia: expanda $u(w)$ en la serie hasta el remanente de la segunda derivada cerca del punto w_0 y reste $u(w_0)$.]

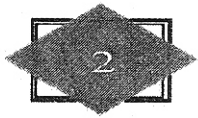
1.20 Adopte la hipótesis del Teorema 1.1 con respecto a la prima P y a las pólizas de seguro $I(x)$. Pruebe que :

$$Var\left[X - I[X]\right] = E\left[\left(X - I(X) - \mu + P\right)^2\right]$$

Es un mínimo cuando $I(x) = I_{d^*}(x)$. Estará probando que para una prima pura fija, una póliza de (Stop-Loss) minimizará la varianza de las reclamaciones retenidas. {Sugerencia: uno puede seguir la prueba del Teorema 1.1 probando primero que $x^2 - z^2 \geq (x-z)(2z)$ y después estableciendo que:

$$\begin{aligned}\left[x - I(x)\right]^2 - \left[x - I_{d^*}(x)\right]^2 &\geq \left[I_{d^*}(x) - I(x)\right]\left[2x - 2I_{d^*}(x)\right] \\ &\geq 2\left[I_{d^*}(x) - I(x)\right]d^*\end{aligned}$$

La desigualdad final puede establecerse dividiendo la prueba en tres casos. Alternativamente, mediante la selección adecuada del nivel de riqueza y de la función de utilidad, el resultado de este ejercicio es un caso especial de Teorema 1.1}



MODELOS INDIVIDUALES DE RIESGO PARA EL CORTO PLAZO

2.1 Introducción

En el Capítulo 1 se examinó como un administrador puede usar el seguro para reducir los efectos financieros adversos de varios tipos de eventos aleatorios. Esa revisión fue completamente general. El tomador de decisiones podría haber sido un individuo buscando protección contra pérdidas de propiedad, ahorro o ingreso. Podría tratarse, también, de una organización buscando protección contra el mismo tipo de pérdidas. De hecho la organización podría haber sido una compañía de seguros que buscaba protección contra pérdidas de fondos debido a demasiadas reclamaciones, ya sea de individuos o de su cartera de asegurados. Dicha protección se denomina reaseguramiento y será introducida en este capítulo.

Como se recordará, la teoría del Capítulo 1 requiere de un modelo probabilístico para las pérdidas potenciales. En esta parte se examinará uno de los dos modelos comúnmente utilizados en valoración de seguros, reservas y aplicaciones de reaseguros.

Para una organización de seguros, sea S la pérdida aleatoria sobre un segmento de su riesgo. Entonces S es la variable aleatoria para la cual se busca una distribución de probabilidad. Históricamente, se han establecido dos conjuntos de postulados para las distribuciones de S. El modelo de riesgo individual define

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{2.1.1}$$

en donde X_i es la pérdida sobre la unidad i asegurada y n es el número de unidades de riesgo aseguradas. Usualmente las X_i son postuladas como variables aleatorias independientes porque las matemáticas son más fáciles y no son necesarios datos históricos sobre las relaciones de dependencia. El otro modelo es el de riesgo colectivo que se describirá en el Capítulo 11.

El modelo de riesgo individual analizado en este capítulo no reconocerá el valor del dinero en el tiempo. Esto es para simplificar y porque el título se refiere al corto plazo. Los capítulos del 4 al 10 abarcan modelos para el largo plazo.

En este capítulo se discutirán sólo ***modelos cerrados***, es decir, el número de unidades aseguradas n en (2.1.1) es conocido y establecido al principio del periodo. Si se postularan migraciones hacia dentro y fuera del sistema de seguros se tendría un ***modelo abierto***.

2.2 Modelos para variables aleatorias de reclamación individual

Primero se revisarán los conceptos básicos del seguro de vida. En un ***seguro de vida a plazo de 1 - año*** el asegurador acepta pagar una cantidad b si el asegurado muere dentro del año de emisión de la póliza y no pagar nada si sobrevive a ese plazo. La probabilidad de una reclamación durante el año esta representada por q. La variable aleatoria de reclamaciones, X, tiene una distribución que puede ser descrita ya sea por su ***función de probabilidad f.p.*** o por su ***función de distribución. f.d.***

La ***f.p.*** es

$$f_x(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1-q & x = 0 \\ q & x = b \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

y la ***f.d.*** es

$$F_x(x) = \Pr(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-q & 0 \le x < b \\ 1 & x \ge b. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

de la ***f.p*** y de la definición de momentos

$$\begin{aligned} E[X] &= bq, \\ E[X^2] &= b^2 q, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

y

$$Var(X) = b^2 q(1-q) \tag{2.2.4}$$

Estas fórmulas pueden obtenerse también escribiendo

$$X = Ib \tag{2.2.5}$$

en donde b es la cantidad constante pagadera en el evento del fallecimiento e I es la variable aleatoria con valor de 1 para el evento fallecimiento y 0 en otro caso. Entonces $\Pr[I=0]=1-q$ y $\Pr[I=1]=q$, la media y la varianza de I son q y $q(1-q)$ respectivamente, y la media y varianza de X son bq y $b^2q(1-q)$ como se citó anteriormente.

La variable aleatoria I con su rango $\{0,1\}$ es ampliamente aplicable en los modelos actuariales. En los libros de texto de probabilidad se le denomina ***indicadora, variable aleatoria de Bernoulli***, o ***variable aleatoria binomial de una sola prueba.*** Nosotros nos referiremos a ella como una indicadora en aras de la brevedad y porque indica la ocurrencia $I=1$, o no ocurrencia, $I=0$, de un evento determinado.

Ahora buscaremos modelos más generales en los que la cantidad de reclamaciones es también una variable aleatoria y pueden ocurrir varias reclamaciones en un periodo. Las coberturas de salud, automóviles y otras propiedades y obligaciones proporcionan ejemplos inmediatos. Extendiendo (2.2.5) postulamos que

$$X = I\,B \tag{2.2.6}$$

en donde X es la variable aleatoria de reclamaciones para el periodo, B proporciona el monto total de las reclamaciones incurridas durante el periodo, e I es la indicadora para el evento de que al menos ocurra una reclamación. Como la indicadora de este evento, I reporta la ocurrencia $(I=1)$ o no $(I=0)$ de reclamaciones en este periodo y no el número de reclamaciones en el periodo. $\Pr(I=1)$ se denotará todavía con q.

Veamos varias situaciones y determinemos las distribuciones de I y B para un modelo. Primero considérese un seguro de vida de un año que paga un beneficio extra en caso de muerte accidental. Para especificar, si la muerte es accidental, el monto del beneficio es 50,000. Por otras causas de muerte el monto del beneficio es 25,000. Supongamos que dada la edad, salud y ocupación de un individuo determinado, la probabilidad de una muerte

accidental dentro del año es 0.0005 mientras que la probabilidad de muerte no accidental es 0.0020. Más suscintamente,

$$\Pr(I=1 \quad y \quad B=50{,}000)=0.0005$$

y

$$\Pr(I=1 \quad y \quad B=25{,}000)=0.0020$$

Sumando los valores posibles de B, tenemos

$$\Pr(I=1)=0.0025$$

Entonces

$$\Pr(I=0)=1-\Pr(I=1)=0.9975.$$

La distribución condicional de B, dado $I=1$, es

$$\Pr(B=25{,}000|I=1)=\frac{\Pr(B=25{,}000 \text{ y } I=1)}{\Pr(I=1)}=\frac{0.0020}{0.0025}=0.8$$

$$\Pr(B=50{,}000|I=1)=\frac{\Pr(B=50{,}000 \text{ y } I=1)}{\Pr(I=1)}=\frac{0.0005}{0.0025}=0.2.$$

Consideremos ahora un seguro de automóvil que contempla cobertura por colisión (indemniza al propietario en caso de daños a su auto por colisión) por arriba de un deducible de 250 y hasta una reclamación máxima de 2,000. Con propósitos ilustrativos, supóngase que para un individuo particular, la probabilidad de una reclamación en un periodo es 0.15 y la de más de una reclamación es 0:

$$\Pr(I=0)=0.85$$

$$\Pr(I=1)=0.15.$$

Se hace el supuesto irreal de no más de una reclamación por periodo para simplificar la distribución de B. Quitaremos este supuesto en una sección posterior después de discutir la distribución de la suma de un número de reclamaciones. Como B es la reclamación incurrida por el asegurador, más que la cantidad del daño al auto, podemos inferir dos características de I y B.

Primero, el evento $I=0$ incluye aquellas colisiones en las que el daño es menor que los 250 deducibles. La otra es que la distribución de las $B's$ tendrá una probabilidad del tamaño máximo de reclamación de 2,000. Supongamos que esta probabilidad es 0.1. Aún más, supongamos que las cantidades reclamadas entre 0 y 2,000 pueden graficarse mediante una distribución continua con una f.d.p. proporcional a $1-\frac{x}{2,000}$ para $0<x<2,000$. (En la práctica la curva continua elegida para representar la distribución de las reclamaciones sería el resultado de un estudio por tamaño de reclamaciones en un periodo reciente.). Resumiendo estos supuestos acerca de la distribución condicional de B, dado $I=1$, tenemos una distribución mixta con densidad positiva de 0 a 2 000 y una masa de 2,000. Esto se ilustra en la figura 2.1., La ***f.d.*** de esta distribución condicional es:

$$\Pr(B\le x|I=1)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 0.9\left[1-\left(1-\frac{x}{2,000}\right)^2\right] & 0<x<2,000\\ 1 & x\ge 2,000.\end{cases}$$

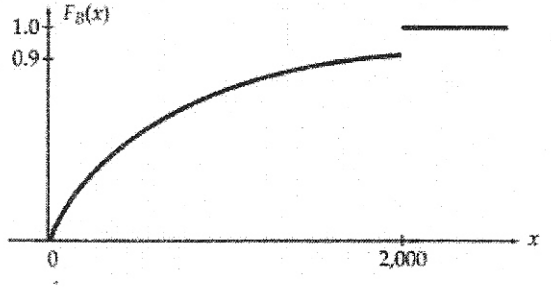


Figura 2.1 Funciones de Distribución para B, dado $I=1$

En la sección 2.4 veremos que los momentos de la variable aleatoria de reclamaciones, X, en especial la media y la varianza, son ampliamente

utilizadas. Para este seguro de automóvil, calcularemos la media y la varianza mediante dos métodos.

Primero deduciremos la función de distribución de X y la usaremos para calcular $E[X]$ y $Var[X]$. Sea $F_X(x)$ sea la ***f.d.*** de X, tenemos

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \le x) = \Pr(IB \le x) \\ &= \Pr(IB \le x | I = 0)\Pr(I = 0) \\ &\quad + \Pr(IB \le x | I = 1)\Pr(I = 1). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Para $x < 0$,

$$F_X(x) = 0(0.85) + 0(0.15) = 0.$$

Para $0 \le x < 2{,}000$

$$F_X(x) = 1(0.85) + 0.9\left[1 - \left(1 - \frac{x}{2{,}000}\right)^2\right](0.15).$$

Para $0 \ge 2{,}000$

$$F_X(x) = 1(0.85) + 1(0.15) = 1.$$

Esta es una distribución mixta. Tiene masas de probabilidad y partes continuas como puede observarse en la Figura 2.2.

Existe una combinación ***f.p.*** y ***f.d.p.*** que corresponde a esta ***f.d.*** dada por

$$\begin{aligned} f(0) &= \Pr(X = 0) = 0.85 \\ f(2{,}000) &= \Pr(X = 2{,}000) = 0.015 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

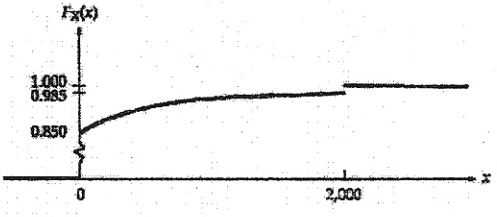


Figura 2.2 Función de Distribución de $X = IB$

$$f(x)=\begin{cases} F'(x)=0.000135\left(1-\dfrac{x}{2{,}000}\right) & 0<x<2{,}000 \\ 0 & \textit{en otra parte} \end{cases}$$

Pueden calcularse entonces los momentos de X mediante

$$E[X^k]=0f(0)+(2000)^k f(2000)+\int_0^{2000} x^k f(x)dx, \qquad (2.2.9)$$

específicamente,

$$E[X]=120$$

y

$$E[X^2]=150{,}000.$$

por lo tanto,

$$Var(X)=135{,}600.$$

Existen varias fórmulas generales relacionadas con los momentos de las variables aleatorias mediante esperanza condicional. Para la media y la varianza son:

$$E[W] = E[E[W|V]] \tag{2.2.10}$$

y

$$Var(W) = Var(E[W|V]) + E[Var(W|V)]. \tag{2.2.11}$$

En estas ecuaciones calculamos los términos del miembro izquierdo mediante el uso directo de la distribución de las $W's$. Los términos del lado derecho, la $E[W|V]$ y $Var[W|V]$ se determinan usando la distribución condicional de las $W's$ para un valor dado de V. Estos componentes son entonces funciones de la variable aleatoria V y podemos calcular sus momentos mediante el uso de la distribución de las $V's$.

Las distribuciones condicionales se utilizan en muchos modelos actuariales. Esto hace que las fórmulas anteriores sean directamente aplicables. En nuestro modelo, $X = IB$, podemos sustituir X por W e I por V para obtener:

$$E[X] = E[E[X|I]] \tag{2.2.12}$$

y

$$Var(X) = Var(E[X|I]) + E[Var(X|I)]. \tag{2.2.13}$$

Ahora rescribamos

$$\mu = E[B|I = 1], \tag{2.2.14}$$

$$\sigma^2 = Var(B|I = 1), \tag{2.2.15}$$

y observando las medias condicionales

$$E[X|I = 0] = 0 \tag{2.2.16}$$

y

$$E[X|I = 1] = E[B|I = 1] = \mu. \tag{2.2.17}$$

Las fórmulas (2.2.16) y (2.2.17) definen a $E[X|I]$ como una función de I, que puede expresarse mediante la fórmula

$$E[X|I] = \mu I. \tag{2.2.18}$$

Por tanto,

$$E[E[X|I]] = \mu E[I] = \mu\, q \tag{2.2.19}$$

y

$$Var\left[E\left[X|I\right]\right] = \mu^2 Var[I] = \mu^2 q(1-q) \tag{2.2.20}$$

Como $X = 0$ para $I = 0$, tenemos que

$$Var[X|I=0] = 0 \tag{2.2.21}$$

Para $I = 1$ tenemos que $X = B$ y

$$Var[X|I=1] = Var[B|I=1] = \sigma^2 \tag{2.2.22}$$

Las fórmulas (2.2.21) y (2.2.22) pueden combinarse como

$$Var[X|I] = \sigma^2 I \tag{2.2.23}$$

Entonces

$$E\left[Var\left[X|I\right]\right] = \sigma^2 E[I] = \sigma^2 q \tag{2.2.24}$$

Sustituyendo (2.2.19), (2.2.20) y (2.2.24) en (2.2.12) y (2.2.13) tenemos

$$E[X] = \mu\, q \tag{2.2.25}$$

y

$$Var[X] = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q \tag{2.2.26}$$

Apliquemos ahora estas fórmulas para calcular $E[X]$ y $Var[X]$ para el seguro del automóvil de (2.2.9). Como la ***f.d.p.*** para B, dado $I = 1$, es

$$f_{B|I}(x|1) = \begin{cases} 0.0009\left(1 - \dfrac{x}{2000}\right) & 0 < x < 2000 \\ 0 & \textit{en otra parte,} \end{cases}$$

con $\Pr(B = 2000|I = 1) = 0.1$ tenemos

$$\mu = \int_0^{2000} 0.0009x\left(1 - \frac{x}{2000}\right)\,dx + (0.1)(2000) = 800$$

$$E[B^2 \mid I = 1] = \int_0^{2000} 0.0009x^2\left(1 - \frac{x}{2000}\right)\,dx + (0.1)(2000)^2 = 1,000,000,$$

y

$$\sigma^2 = 1,000,000 - (800)^2 = 360,000.$$

Finalmente, con $q = 0.15$ obtenemos lo siguiente de (2.2.25) y (2.2.26):

$$E[X] = 800(0.15) = 120$$

y

$$\begin{aligned} Var(X) &= (800)^2(0.15)(0.85) + (360,000)(0.15) \\ &= 135,600. \end{aligned}$$

Existen otros modelos posibles para B en diferentes situaciones de seguro. Por ejemplo, consideremos un modelo para el número de muertes debidas a accidentes aéreos durante un año de operación de una aerolínea. Podemos empezar con una variable aleatoria para el número de muertes, X, en un solo vuelo y después añadir un conjunto de este tipo de variables aleatorias sobre el conjunto de vuelos del año. Para un solo vuelo, el evento $I = 1$ será el evento de un accidente durante el vuelo. El número de muertes en el accidente, B, se modelará como el producto de dos variables aleatorias, L y Q, en donde L es el factor de recargo, el número de personas a bordo en el momento del accidente, y Q es la proporción de muertes entre las personas a bordo. El número de muertes B, se modela en esta forma debido a que quizás sea más fácil disponer de datos estadísticos para las distribuciones de L y Q que los datos totales para B. Tenemos $X = ILQ$. No obstante, que la proporción de pasajeros muertos debido al accidente y la de asientos ocupados probablemente están relacionados, puede suponerse como una primera aproximación que L y Q son independientes.

2.3 Sumas de variables aleatorias independientes

En el modelo de riesgo individual, las reclamaciones de una organización aseguradora se modelan como la suma de reclamaciones de muchos individuos asegurados.

Se supone las reclamaciones individuales son independientes en la mayoría de las aplicaciones. En esta sección revisaremos dos métodos para determinar la distribución de la suma de variables aleatorias independientes. Primero consideremos la suma de dos variables aleatorias, $S = X + Y$, en el espacio muestral dibujado en la Figura 2.3.

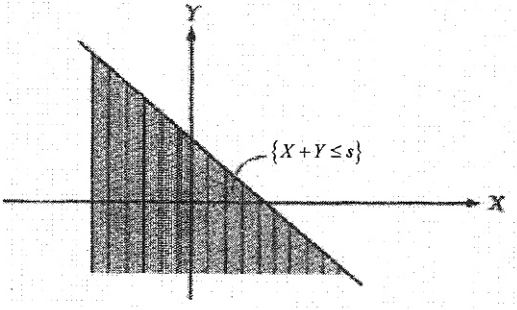


Figura 2.3 Evento $\{X+Y \le s\}$

La línea $X + Y = s$ y la región por debajo de la línea representan el evento $[S = X+Y \le s]$. Por tanto la ***f.d.*** de S es

$$F_s(s) = \Pr(S \le s) = \Pr(X+Y \le s). \tag{2.3.1}$$

Para dos variables aleatorias discretas, positivas, podemos usar la ley de la probabilidad total para expresar (2.3.1) como

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{\forall\ y \le s} \Pr(X+Y \le s | Y=y)\Pr(Y=y) \qquad (2.3.2) \\ &= \sum_{\forall\ y \le s} \Pr(X \le s-y | Y=y)\Pr(Y=y). \end{aligned}$$

Cuando X y Y son independientes, esta última suma se puede expresar

$$F_S(s) = \sum_{\forall\ y \le s} F_x(s-y) f_Y(y). \tag{2.3.3}$$

La *f.p.* correspondiente para esta *f.d.* puede calcularse mediante

$$f_S(s) = \sum_{\forall\ y \le s} f_x(s-y) f_Y(y). \tag{2.3.4}$$

Para variables aleatorias continuas, positivas las fórmulas correspondientes a (2.3.2), (2.3.3), y (2.3.4) son

$$F_S(s) = \int_0^s \Pr(X \le s-y | Y = y) f_Y(y) dy, \tag{2.3.5}$$

$$F_S(s) = \int_0^s F_x(s-y) f_Y(y) dy, \tag{2.3.6}$$

$$f_S(s) = \int_0^s f_x(s-y) f_Y(y) dy. \tag{2.3.7}$$

Cuando cualquiera de ellas, o ambas, de X y Y tienen una distribución de tipo mixto (típicas en las aplicaciones de modelos de riesgo individual), las fórmulas son análogas pero más complejas. Para variables aleatorias que también pueden tomar valores negativos, las sumas e integrales en las fórmulas anteriores son para todos los valores de $-\infty$ a $+\infty$.

En el análisis matemático la operación en (2.3.3) y (2.3.6) se denomina ***convolución*** del par de funciones de distribución $F_x(x)$ y $F_y(y)$, y se denota como $F_x * F_y$. El proceso de convolución es simple en concepto, sin embargo, puede ser tedioso de calcular aún en ejemplos simples.

Ejemplo 2.1.:

Sea X con una distribución uniforme en (0,2) y sea Y independiente de X con una distribución uniforme en (0,3). Determine la *f.d.* de $S = X + Y$.

Solución

Como X y Y son continuas, usaremos (2.3.6):

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{2} & 0\le x<2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

y

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 0<y<3\\ 0 & \text{en otra parte.}\end{cases}$$

Entonces

$$F_S(s)=\int_0^s F_x(s-y)f_Y(y)dy.$$

El espacio muestral X, Y se ilustra en la Figura 2.4.

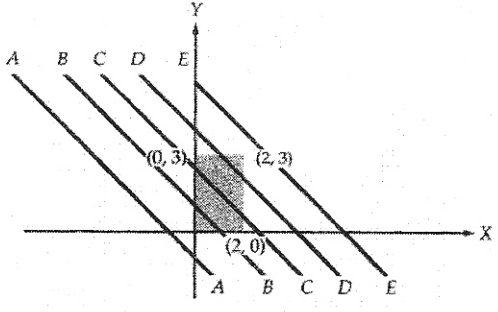


Figura 2.4 Convolución de dos Distribuciones Uniformes

La región rectangular contiene todas las probabilidades para X y Y. El evento de interés, $X+Y\le s$, se ilustra en la figura para cinco valores de s. Para cada valor, la línea intercepta el eje de las y en s y la línea de $x=2$ en $s-2$. Los valores de F_S para estos cinco casos son

$$F_S(s)=\begin{cases}0 & s<0 \quad \textit{linea A}\\ \int_0^s \frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy=\frac{s^2}{12} & 0\le s<2 \quad \textit{linea B}\\ \int_0^{s-2}\frac{1}{3}1dy+\int_{s-2}^{s}\frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy=\frac{s-1}{3} & 2\le s<3 \quad \textit{linea C}\\ \int_0^{s-2}\frac{1}{3}1dy+\int_{s-2}^{3}\frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy=1-\frac{(5-s)^2}{12} & 3\le s<5 \quad \textit{linea D}\\ 1 & s\ge 5 \quad \textit{linea E}\end{cases}$$

∇

Para determinar la distribución de la suma de más de dos variables aleatorias, podemos usar el proceso de convolución iterativamente. Para $S=X_1+X_2+\ldots+X_n$ en donde las X_i's son variables aleatorias independientes, F_i es la *f.d.* de X_i, y $F^{(k)}$ es la *f.d.* de $X_1+X_2+\ldots+X_k$, tendríamos

$$\begin{aligned}F^{(2)}&=F_2*F^{(1)}=F_2*F_1\\ F^{(3)}&=F_3*F^{(2)}\\ F^{(4)}&=F_4*F^{(3)}\\ &\vdots\\ F_S&=F^{(n)}=F_n*F^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2:

Las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 son independientes con distribuciones definidas por las Columnas (1), (2) y (3) del cuadro. Determine la *f.d.* y la *f.p.* de $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Solución:

La notación del párrafo anterior se utiliza en el cuadro:

- Las columnas (1) - (3) contienen la información ya proporcionada.
- La columna (4) es la *f.d.* de la columna (1).
- La columna (5) se obtiene de las columnas (2) y (4) usando (2.3.3).
- La columna (6) se obtiene de las columnas (3) y (5) usando (2.3.3).

La obtención de la columna (6) completa la determinación de la distribución de S, y su *f.p.* podría deducirse restando la columna (6). Con propósitos ilustrativos hemos incluido la columna (7), que puede deducirse de las columnas (1) y (2) usando (2.3.4). Entonces las columnas (3) y (7) pueden usarse en (2.3.4) para obtener la columna (8).

x	(1) $f_1(x)$	(2) $f_2(x)$	(3) $f_3(x)$	(4) $f^{(2)}(x)$	(5) $f^{(3)}(x)$	(6) $F_3(x)$	(7) $F^{(2)}(x)$	(8) $F^{(3)}(x)$
0	0.4	0.5	0.6	0.20	0.120	0.4	0.20	0.120
1	0.3	0.2	0.0	0.23	0.138	0.7	0.43	0.258
2	0.2	0.1	0.1	0.20	0.140	0.9	0.63	0.398
3	0.1	0.1	0.1	0.16	0.139	1.0	0.79	0.537
4		0.1	0.1	0.11	0.129	1.0	0.90	0.666
5			0.1	0.06	0.115	1.0	0.96	0.781
6				0.03	0.088	1.0	0.99	0.869
7				0.01	0.059	1.0	1.00	0.928
8					0.036	1.0	1.00	0.964
9					0.021	1.0	1.00	0.985
10					0.010	1.0	1.00	0.995
11					0.004	1.0	1.00	0.999
12					0.001	1.0	1.00	1.000

∇

Puede resultar muy complejo e involucrar numerosos cálculos, intentar varias iteraciones del proceso de convolución. En muchos casos, el resultado no puede representarse en alguna fórmula más simple que las expresadas anteriormente. Estas fórmulas son convenientes para utilizarse en calculadoras programables y computadoras.

Otro método para determinar la distribución de la suma de variables aleatorias independientes esta basado en la unicidad de la ***función generadora de momentos (f.g.m.)***, la que, para la variable aleatoria X, se define como $M_X(t) = E[e^{tX}]$. Si esta esperanza es finita para toda t en un intervalo abierto, entonces $M_X(t)$ es la única ***f.g.m.*** de la distribución de X y no es la ***f.g.m.*** de ninguna otra distribución. Esta unicidad puede emplearse en la siguiente forma: para la suma $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, tenemos

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E[e^{tS}] = E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}] \\ &= E[e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}]. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son independientes, entonces la esperanza del producto de (2.3.8) es igual a

$$E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\cdots E[e^{tX_n}]$$

así que

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t). \tag{2.3.9}$$

El reconocimiento de la distribución única que corresponde a (2.3.9) completaría la determinación de la distribución de las $S's$. Si no es posible la identificación mediante el reconocimiento, entonces deber emplearse un proceso basado en matemáticas que está fuera de los alcances de este libro (véase la sección 2.6).

2.4 Aproximaciones para la distribución de la suma.

El ***teorema del límite central*** sugiere un método para obtener valores numéricos para la distribución de la suma de variables aleatorias independientes. El planteamiento usual del teorema es para una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $X_1, X_2, \ldots$, con $E[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$. Para cada n, la distribución de $\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mu\right)/\sigma$, donde $\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$, tiene una media 0 y varianza 1. Se sabe que la sucesión de distribuciones $(n = 1, 2, \ldots)$ se aproxima a la distribución normal estándar. Cuando n es suficientemente grande, el teorema se aplica para aproximar la distribución de $\overline{X}_n$ con una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n. En forma equivalente la distribución de la suma de las n variables aleatorias se aproxima mediante una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$ La efectividad de estas aproximaciones depende no sólo del número de variables sino también de la desviación de los sumandos de la normalidad. Muchos libros de texto de estadística elemental recomiendan que n sea al menos 30 para que las aproximaciones resulten razonables. Una rutina utilizada para generar variables aleatorias normalmente distribuidas para simulación está basada en el promedio de sólo 12 variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en $(0,1)$.

En muchos modelos de riesgo individual las variables aleatorias no están idénticamente distribuidas en la suma. Esto se ilustrará mediante ejemplos en la siguiente sección. El teorema del límite central se extiende a sucesiones de variables aleatorias no distribuidas idénticamente.

Para ilustrar algunas aplicaciones del modelo de riesgo individual, usaremos una aproximación normal a la distribución de la suma de variables aleatorias independientes para obtener respuestas numéricas. Si

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

entonces

$$E[S] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k],$$

y además, bajo el supuesto de independencia,

$$Var(S) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$$

Para la aplicación sólo necesitamos

- evaluar las medias y varianzas de las variables aleatorias de pérdida individual
- sumarlas para obtener la media y la varianza de la pérdida de la organización aseguradora como un todo,
- aplicar la aproximación normal.

En la siguiente sección se presentan ilustraciones de este proceso.

2.5 Aplicaciones a seguros.

En esta sección, se ilustran los resultados de la sección 2.2 y el uso de la aproximación normal con 3 ejemplos.

Ejemplo 2.3:

Una compañía de seguros expide contratos de vida a plazo de un año con beneficios por la cantidad de 1 y 2 unidades a individuos con probabilidades de morir de 0.02 o 0.10. El siguiente cuadro muestra el número de individuos n_k en cada uno de las cuatro clases creadas con un beneficio por la cantidad b_k, y una probabilidad de reclamación q_k.

k	q_k	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500

La compañía desea recaudar, de esta población de 1800 individuos, una cantidad igual al percentil 95 de la distribución de las reclamaciones totales. Más aún, desea que la participación de cada individuo sea proporcional a la reclamación esperada por ese individuo. La participación del individuo j con media $E[X_j]$ sería $(1+\theta)E[X_j]$. El requisito del percentil 95 sugiere que

$\theta > 0$. Esta cantidad extra, $\theta E[X_j]$, es el ***recargo de seguridad*** y θ es el ***recargo de seguridad relativo***. Calcule θ.

Solución

El criterio para θ es $\Pr(S \leq (1+\theta)E[S]) = 0.95$ en donde $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1800}$.

Esta probabilidad es equivalente a obtener

$$\Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \leq \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) = 0.95.$$

Siguiendo la discusión del teorema del límite central de la sección 2.4, aproximaremos la distribución de $(S - E[S])/\sqrt{Var[S]}$ mediante la distribución normal estándar y el uso de su percentil 95 para obtener

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}} = 1.645.$$

Quedan por calcular la media y la varianza de S y calcular θ mediante esta ecuación.

Para las cuatro clases de individuos asegurados, tenemos los resultados que se muestran a continuación.

			Media	Varianza	
k	q_k	b_k	$b_k q_k$	$b_k^2 q_k(1-q_k)$	n_k
1	0.02	1	0.02	0.0196	500
2	0.02	2	0.04	0.0784	500
3	0.10	1	0.10	0.0900	300
4	0.10	2	0.20	0.3600	500

Entonces

$$E[S] = \sum_{j=1}^{1800} E[X_j] = \sum_{k=1}^{4} n_k \mu_k = 160$$

y

$$Var(S) = \sum_{j=1}^{1800} Var(X_j) = \sum_{k=1}^{4} n_k \sigma_k^2 = 256.$$

Por lo tanto, el recargo de seguridad relativo es

$$\theta = \frac{1.645\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = 1.645\frac{16}{160} = 0.1645.$$

Ejemplo 2.4:

Los tenedores de pólizas de una compañía aseguradora de automóviles se clasifican en dos clases.

Clase	Número	Probabilidad	Distribución del monto de reclamación, B_k, Parámetros de la Exponencial Truncada	
k	en la Clase	de Reclamación		
	n_k	q_k	λ	L
1	500	0.10	1	2.5
2	2000	0.05	2	5.0

Se define una distribución exponencial truncada mediante la *f.d.*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \le x < L \\ 1 & x \ge L. \end{cases}$$

Esta es una distribución mixtá con *f.d.p.* $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $0 < x < L$, y una masa de probabilidad $e^{-\lambda L}$. En la figura 2.5 aparecen la *f.d.p.* y la masa de probabilidad.

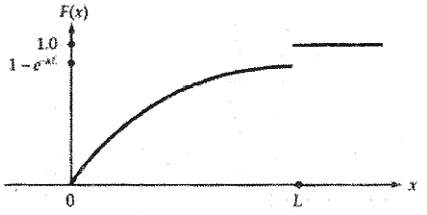


Figura2.5 Distribución exponencial Truncada

Otra vez, la probabilidad de que las reclamaciones totales excedan la cantidad recaudada de los tenedores de pólizas es 0.05. Suponemos que el recargo de seguridad relativo, θ, es el mismo para las dos clases. Calcule θ.

Solución

Este ejemplo es muy parecido al anterior. Difiere en que las cantidades de reclamación son variables aleatorias. Primero obtenemos fórmulas para los momentos de la distribución exponencial truncada como preparación para aplicar (2.2.25) y (2.2.26):

$$\mu = E[B\,|\,I=1] = \int_0^L x\lambda e^{-\lambda x}\,dx + Le^{-\lambda L} = \frac{1-e^{-\lambda L}}{\lambda}$$

$$E[B^2\,|\,I=1] = \int_0^L x^2\lambda e^{-\lambda x}dx + L^2e^{-\lambda L} = \frac{2}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda L}) - \frac{2L}{\lambda}e^{-\lambda L}$$

$$\sigma^2 = E[B^2\,|\,I=1] - (E[B\,|\,I=1])^2 = \frac{1-2\lambda Le^{\lambda L} - e^{-2\lambda L}}{\lambda^2}$$

Usando los valores de los parámetros dados y aplicando las fórmulas (2.2.25) y (2.2.26) obtenemos los siguientes resultados.

				Media	Varianza	
k	q_k	μ_k	σ_k^2	$q_k\mu_k$	$\mu_k^2 q_k(1-q_k)+\sigma^2 q_k$	n_k
1	0.10	0.9179	0.5828	0.09179	0.13411	500
2	0.05	0.5000	0.2498	0.02500	0.02437	2000

Entonces S, la suma de las reclamaciones, tiene momentos

$$E[S] = 500(0.09179) + 2000(0.02500) = 95.89$$
$$Var[S] = 500(0.13411) + 2000(0.02436) = 115.78.$$

El criterio de θ es el mismo que el del ejemplo 2.3,

$$\Pr(S \leq (1+\theta)E[S]) = 0.95.$$

Otra vez mediante la aproximación normal,

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var[S]}} = 1.645$$

y

$$\theta = \frac{1.645\sqrt{115.78}}{95.89} = 0.1846.$$

∇

Ejemplo 2.5:

Una compañía de seguros de vida cubre 16 000 vidas por un plazo de un año en las cantidades que se señalan a continuación.

Moto del Beneficio b_k	Número Cubierto n_k
10 000	8 000
20 000	3 500
30 000	2 500
50 000	1 500
100 000	500

La probabilidad de una reclamación q_K para cada una de las 16,000 vidas, que se supone son mutuamente independientes, es 0.02. La compañía quiere establecer un límite de retención. Por cada vida, el ***límite de retención*** es la cantidad abajo de la cual esta compañía (transferente) retendrá el seguro y por encima de la cual comprará el reaseguro de otra compañía (reaseguradora). Por ejemplo, si el límite de retención es 20,000, la compañía retiene hasta 20,000 en cada vida y compra reaseguro para el excedente a partir de esa cantidad para cada uno de los 4,500 individuos con montos de beneficios superiores a 20,000. Como criterio de decisión la compañía desea minimizar

la probabilidad de que las reclamaciones retenidas más la cantidad que paga por el reaseguro excedan 8,250,000. El reaseguro está disponible a un costo de 0.025 por unidad de cobertura (a 125% de la cantidad de reclamación esperada por unidad, 0.02). Consideraremos el paquete del negocio como cerrado. Las nuevas pólizas vendidas durante el año no pueden entrar a este proceso de decisión. Calcule el límite de retención que minimice la probabilidad de que las reclamaciones retenidas por la compañía más el costo del reaseguro excedan 8,250,000.

Solución parcial:

Primero, hagamos todos los cálculos en unidades beneficio de 10,000. Como paso ilustrativo sea S la cantidad de reclamaciones retenidas pagadas cuando el límite de retención es 2(20,000). Nuestra cartera de negocios retenidos está dada por

Monto de Retenidos b_k	Número Cubierto n_k
1	8 000
2	8 000

$$E[S]=\sum_{k=1}^{2} n_k b_k q_k = 8000(1)(0.02)+8000(2)(0.02)=480$$

y

$$Var[S]=\sum_{k=1}^{2} n_k b_k^2 q_k(1-q_k) = 8000(1)(0.02)(0.98)+8000(4)(0.02)(0.98)=784$$

Además de las reclamaciones retenidas, S, tenemos el costo de las primas de reaseguro. La cobertura total del plan es

$$8000(1)+3500(2)+2500(3)+1500(5)+500(10)=35000$$

La cantidad retenida es

$$8000(1)+8000(2)=24000$$

Por lo tanto, la cantidad total reasegurada es $35,000-24,000=11,000$ y el costo de reaseguro es 11,000(0.025) = 275. Por lo tanto, con el límite de retención de 2, las reclamaciones retenidas más el costo de reaseguro es $S+275$. El criterio de decisión se basa en la probabilidad de que este costo total exceda 825,

$$\Pr(S+275>825)=\Pr(S>550)$$
$$=\Pr\left(\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var[S]}}>\frac{550-E[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right)$$
$$=\Pr\left(\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var[S]}}>2.5\right)$$

Utilizando la distribución normal tenemos que esto es aproximadamente 0.0062. La solución se completa en los ejercicios 2.13 y 2.14

∇

2.6 Notas y referencias

La base del material de las secciones 2.2, 2.3 y 2.4 pueden encontrarse en varios textos de probabilidad y estadística, Mood (1974) probó los teoremas dados en las fórmulas (2.2.1) y (2.2.11). También presenta en el texto una extensa discusión de los métodos matemáticos avanzados para deducir la función de distribución que corresponde a una función generadora de momentos determinada (véase también Bellman , 1966).

DeGroot (1986) presenta la discusión de varias condiciones bajo las que se sustenta el teorema del límite central. Kendall y Stuart (1977) proporcionan material sobre expansiones normales de potencia que pueden considerarse como modificaciones de la aproximación normal para mejorar los resultados numéricos. Bowers (1967) también describe el uso de las expansiones normales de potencia y da una aplicación para aproximar la distribución de los valores presentes para una cartera anual.

2.7 Ejercicios

Sección 2.2

2.1. Utilice (2.2.3) y (2.2.4) para obtener la media y la varianza de la variable aleatoria de reclamaciones X en donde $q=0.05$ y el monto de reclamaciones es fijada en 10.

2.2. Obtener la media y la varianza de la variable aleatoria de reclamaciones X en donde $q=0.05$ y la variable aleatoria de reclamaciones B esta distribuida uniformemente entre 0 y 20.

2.3. Sea X el número de águilas observadas en cinco tiradas de una moneda. Después, se arrojan X dados (honestos). Sea Y la suma de los números que se obtienen en los dados. Determine la media y la varianza de Y [Sugerencia: aplique (2.2.10) y (2.2.11).]

2.4. Sea X el número que se observa cuando se arroja un dado (honesto). Sea Y el número de águilas que se obtienen cuando se arrojan X monedas honestas. Calcule $E[Y]$ y $Var[Y]$.

2.5. Sea X el número que se obtiene cuando se arroja un dado (honesto). Sea Y la suma de los números obtenidos cuando se tiran después X dados sin cargar. Calcule $E[Y]$ y $Var[Y]$.

2.6. La probabilidad de un incendio en una cierta estructura en un tiempo determinado es 0.02. Si ocurre un incendio, el daño a la estructura esta distribuido uniformemente en el intervalo de 0 a su valor total de pérdida,

a. Determine la media y varianza del daño del incendio a la estructura dentro del periodo de tiempo.

Sección 2.3

2.7. Las variables aleatorias independientes X_k para cuatro vidas tienen las funciones discretas de probabilidad que se muestran abajo.

x	$\Pr(X_1 = x)$	$\Pr(X_2 = x)$	$\Pr(X_3 = x)$	$\Pr(X_3 = x)$
0	0.6	0.7	0.6	0.9
1	0.0	0.2	0.0	0.0
2	0.3	0.1	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.4	0.0
4	0.1	0.0	0.0	0.1

Utilice un proceso de convolución en los valores nonegativos enteros de x para obtener $F_s(x)$ para $x = 0,1,2,...,13$, donde $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

2.8 Sea X_i para $i = 1,2,3$ independiente e idénticamente distribuida con la ***f.d.***

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

Si $S=X_1+X_2+X_3$.

a. Demuestre que $F_s(x)$ esta dada por

$$F_s(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3/6 & 0\le x<1\\ [x^3-3(x-1)^3]/6 & 1\le x<2\\ [x^3-3(x-1)^3+3(x-2)^3]/6 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3.\end{cases}$$

b. Demuestre que $E[S]=1.5$ y $Var[S]=0.25$.

c. Evalúe las siguientes probabilidades usando la ***f.d.*** de la parte (a).

(*i*) $\Pr(S\le 0.5)$

(*ii*) $\Pr(S\le 1.0)$

(*iii*) $\Pr(S\le 1.5)$

2.9 Considere tres variables aleatorias independientes X_1, X_2, X_3. Cada una tiene una distribución exponencial con $E[X_i]=i$, $i=1,2,3$. Determine ***f.d.p.*** de $S=X_1+X_2+X_3$.

a. mediante el proceso de convolución

b. a partir del *f.g.m.* de S usando fracciones parciales.

Sección 2.4

2.10 Calcule la media y la varianza de X y Y del ejemplo 2.1. Utilice la distribución normal para aproximar $\Pr(X+Y>4)$. Compárelo con la respuesta exacta.

2.11 a. Use el teorema del límite central para calcular b, c y d, para una a determinada, en la proposición

$$\Pr\left[\sum_{1}^{n} X_i \geq n\mu + a\sqrt{n}\ \sigma \right] \cong c + b\Phi(d)$$

donde las X_i's son independientes e idénticamente distribuidas con una media μ y varianza σ^2 y $\Phi(z)$ es la ***f.d.*** de la distribución normal estándar.

b. Evalúe las probabilidades de (2.8.c) usando la aproximación normal desarrollada en la parte (a).

2.12 La variable aleatoria U tiene una ***f.g.m.***

$$M_U(t) = (1-2t)^{-9} \qquad t < \frac{1}{2}.$$

a. Use la f.g.m. para calcular la media y la varianza de U.

b. Use una aproximación normal para calcular los puntos $y_{0.05}$ y $y_{0.01}$ tales que $\Pr(U > y_\epsilon) = \epsilon$.

Nótese que la variable aleatoria U tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha = 9$ y $\beta = 1/2$. Las distribuciones gama con $\alpha = n/2$ y $\beta = 1/2$ son distribuciones ji-cuadrada con n grados de libertad. Por lo tanto U tiene una distribución ji-cuadrada con 18 grados de libertad. De las tablas de ***f.d.*** de las distribuciones ji-cuadrada, obtenemos $y_{0.05} = 28.869$ y $y_{0.01} = 34.805$

Sección 2.5

2.13 Calcule la probabilidad de que el costo total del ejemplo 2.5 exceda 8,250,000; si el límite de retención es

a. 30,000

b. 50,000

2.14 Calcule el límite de retención que minimice la probabilidad de que el costo total del ejemplo 2.5 exceda 8,250,000. Suponga que el límite esta entre 30,000 y 50,000.

2.15 Una compañía de seguros cubre 160 estructuras en contra de daños por el riesgo de incendio, hasta una cantidad establecida en el contrato. El número de contratos y las sumas aseguradas contratadas se dan en el siguiente cuadro:

Suma Asegurada Contratada	No. de Contratos
10,000	80
20,000	35
30,000	25
50,000	15
100,000	5

Suponga, que para cada una de las estructuras, la probabilidad de una reclamación dentro del periodo de un año es de 0.04 y que la probabilidad de más de una reclamación es 0. Suponga que los incendios en las estructuras son eventos mutuamente independientes. Aún más, suponga que la distribución condicional del tamaño de la reclamación, suponiendo que ya ocurrió una reclamación está uniformemente distribuida sobre el intervalo de 0 a la suma asegurada contratada. Sea N el número de reclamaciones y S el monto de reclamaciones en el periodo de un año.

a. Calcule la media y la varianza de N.

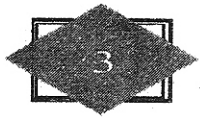
b. Calcule la media y la varianza de S.

c. ¿Cual es el recargo de seguridad relativo, θ que debería usarse, de tal forma que la compañía pueda cobrar una cantidad igual al percentil 99 de la distribución de las reclamaciones totales? (Utilice una aproximación normal.)

2.16 Considere una cartera de 32 pólizas. Para cada póliza, la probabilidad q de una reclamación es 1/6 y B el monto del beneficio otorgado dado que existe una reclamación, la cual tiene una ***f.d.p.***

$$f(y)=\begin{cases}2(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{en otra parte}\end{cases}$$

Sea S las reclamaciones totales de la cartera. Utilizando una aproximación normal, estime $\Pr(S>4)$.



DISTRIBUCIONES DE SOBREVIVENCIA Y TABLAS DE MORTALIDAD

3.1 Introducción

El Capítulo 1 estuvo dedicado a mostrar cómo el seguro puede incrementar la utilidad esperada de los individuos que enfrentan pérdidas aleatorias. En el Capítulo 2 se desarrollaron modelos simples para pólizas de seguro de un periodo único. Las bases de estos modelos fueron las variables aleatorias de Bernoulli asociadas con la ocurrencia o no de una pérdida. Los Capítulos del 4 al 7 tendrán que ver principalmente con los modelos referidos a sistemas de seguros diseñados para manejar pérdidas aleatorias en donde la aleatoriedad está relacionada con el tiempo de sobrevivencia individual. En estos capítulos la variable aleatoria del ***tiempo transcurrido hasta el fallecimiento***, $T(x)$, será la pieza fundamental. Este capitulo desarrollará un conjunto de ideas para describir y utilizar la distribución del tiempo transcurrido hasta el fallecimiento, y la distribución correspondiente de la edad al fallecimiento X.

Demostraremos cómo la distribución de la variable aleatoria, edad al fallecimiento, puede resumirse mediante una ***tabla de mortalidad***. Dichas tablas son útiles en muchos campos de la ciencia. Consecuentemente se ha desarrollado una profusa notación y nomenclatura entre las diversas profesiones que las utilizan. Por ejemplo, los ingenieros las utilizan para estudiar la confiabilidad de sistemas mecánicos y electrónicos complejos. Los bioestadísticos lo hacen para comparar la efectividad de tratamientos alternativos de enfermedades graves. Los demógrafos se valen de ellas como herramientas en las proyecciones de población. En este texto, las tablas de mortalidad se utilizarán para construir modelos para sistemas de seguros diseñados para ayudar a los individuos a enfrentar las incertidumbres relativas a la fecha de su muerte. Esta aplicación determinará el punto de vista adoptado. Sin embargo, cuando las tablas de mortalidad proporcionen un puente con otras disciplinas, se añadirán notas relativas para aplicaciones alternativas.

Una tabla de mortalidad es un componente indispensable de muchas modelos en la ciencia actuarial. De hecho, algunos académicos sitúan la fecha de inicio de la ciencia actuarial en 1693. En ese año, **Edmund Halley** publicó *"Una estimación de los grados de mortalidad de la humanidad, tomado de varias tablas de nacimientos y funerales de la ciudad de Breslau."* La tabla de mortalidad, llamada Tabla de Breslau, contenida en el estudio de Halley continúa teniendo interés debido a su notación e ideas sorprendentemente modernas.

3.2 Probabilidad para la Edad al Fallecimiento

En esta sección fórmulamos la incertidumbre de la edad al fallecimiento en términos de probabilidad.

3.2.1 La Función de Sobrevivencia

Consideremos a un niño recién nacido. Sea X una variable aleatoria de tipo continuo que representa la edad al fallecimiento de este recién nacido y consideremos que $F(x)$ representa la ***función de distribución*** (*f.d.*) de X,

$$F(x) = \Pr(X \le x) \qquad x \ge 0, \tag{3.2.1}$$

y asentemos que

$$s(x) = 1 - F(x) = \Pr(X > x) \qquad x \ge 0, \tag{3.2.2}$$

Siempre supondremos que $F(0) = 0$, lo que implica $s(0) = 1$. La función $s(x)$ se denomina ***función de sobrevivencia***. Para cualquier x positiva, $s(x)$ es la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x. La distribución de X puede definirse especificando ya sea la función $F(x)$ o la función $s(x)$ En la ciencia actuarial y la demografía, la función de sobrevivencia tradicionalmente se ha utilizado como punto de partida para desarrollos. Para la probabilidad y la estadística, la *f.d.* generalmente juega ese papel. Sin embargo, de las propiedades de la *f.d.*, se pueden deducir propiedades correspondientes a la función de sobrevivencia.

Utilizando las leyes de probabilidad, se pueden hacer planteamientos de probabilidad acerca de la edad al fallecimiento en términos ya sea de la

función de sobrevivencia o de la función de distribución. Por ejemplo, la probabilidad de que un recién nacido muera entre la edad x y z, con $x < z$ es

$$\begin{aligned}\Pr(x < X \le z) &= F(z) - F(x) \\ &= s(x) - s(z)\end{aligned}$$

3.2.2 Tiempo transcurrido hasta el fallecimiento para una persona de edad x

La probabilidad condicional de que un recién nacido muera entre las edades x y z, dada la sobrevivencia a la edad x, es

$$\begin{aligned}\Pr(x < X \le z | X > x) &= \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \qquad (3.2.3)\end{aligned}$$

El símbolo (x) se usa para denotar a una ***vida de x años***. El ***tiempo futuro de vida*** de (x), $X - x$, también se denotará con $T(x)$.

En la ciencia actuarial, frecuentemente, es necesario hacer proposiciones de probabilidad acerca de $T(x)$. Con este propósito, y para promover la investigación y la comunicación, originalmente se adoptó un conjunto de símbolos por el Congreso Internacional Actuarial de 1898, que forman parte de la notación actuarial internacional. Se establecieron símbolos para funciones actuariales comunes y lineamientos para adoptar nuevos símbolos. Desde entonces este sistema ha estado sujeto a constantes revisiones y el comité permanente de notación de la Asociación Internacional Actuarial, revisa o amplía lo que resulta necesario. Hasta donde sea posible, se seguirán estas notaciones convencionales.

Estos símbolos difieren de los que utiliza la notación de probabilidad, y el lector puede no estar familiarizado con ellos. Por ejemplo, una función de una sola variable que se escribiría como $q(x)$ en la notación de probabilidad, en este sistema se escribe como q_x. De la misma manera, una función multivariada se escribe en notación actuarial usando combinaciones de subíndices, índices y otros símbolos. Las reglas generales para definir una

función en la notación actuarial se dan en el Anexo 4. El lector puede estudiar estas formas, si así lo desea, antes de continuar con las discusiones del texto sobre la variable aleatoria del tiempo de vida futuro.

Para hacer planteamientos de probabilidad acerca de $T(x)$, tenemos las notaciones

$$ {}_tq_x = \Pr[T(x) \le t] \qquad t \ge 0 \tag{3.2.4} $$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \Pr[T(x) > t] \qquad t \ge 0 \tag{3.2.5} $$

El símbolo ${}_tq_x$ puede interpretarse como la probabilidad de que (x) muera dentro de t años; es decir, ${}_tq_x$ es la función de distribución de $T(x)$. Por otra parte, ${}_tP_x$ puede interpretarse como la probabilidad de que (x) alcance la edad $x+t$ es decir ${}_tP_x$ es la función de sobrevivencia para (x). En el caso específico de una vida de edad 0, tenemos $T(0) = X$ y

$$ {}_xp_0 = s(x) \qquad x \ge 0 \tag{3.2.6} $$

Si $t = 1$, la convención nos permite omitir el prefijo en los símbolos definidos en (3.2.4) y (3.2.5), y tenemos

$$ q_x = \Pr[(x) \text{ muera en el término de un año}] $$

$$ p_x = \Pr[(x) \text{ alcance la edad de x+1}] $$

Existe un símbolo especial para el evento más general de que (x) sobreviva t años y muera dentro de los siguientes u años; es decir que (x) muera entre las edades $(x+t)$ y $(x+t+u)$. Este símbolo especial está dado por

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \Pr[t < T(x) \le t+u] \\ &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \end{aligned} \tag{3.2.7} $$

Como antes si $u = 1$ se elimina el prefijo en ${}_{1|u}q_x$ y tenemos ${}_{t|}q_x$.

En este punto parece que existen dos expresiones para la probabilidad de que (x) muera entre la edades x y $x+u$. La fórmula (3.2.7) con $t=0$ es una de ellas, (3.2.3) con $z = x+u$ es una segunda expresión. ¿Son diferentes estas dos probabilidades? La (3.2.3) puede interpretarse como la probabilidad condicional de que un recién nacido muera entre la edad x y $z = x+u$, dada la edad de sobrevivencia x. La única información sobre el recién nacido, actualmente de edad x, es su sobrevivencia a esa edad. Por lo tanto el planteamiento de probabilidad está basado en una distribución condicional de la sobrevivencia de los recién nacidos.

Por otra parte, (3.2.7) con $t=0$ define la probabilidad de que una ***vida observada*** a la edad x, muera entre la edad x y $x+u$. La observación de una vida a la edad x, podría incluir otra información además de la simple sobrevivencia. Esta podría ser que la persona de edad x acaba de pasar un examen físico para el seguro, o podría ser que la persona ha iniciado un tratamiento debido a una enfermedad seria. Las tablas de mortalidad en las que la observación de una vida en la edad x implica más que la simple sobrevivencia de un recién nacido a la edad x, será discutida en las sección 3.8. En esta sección continuaremos el desarrollo de la teoría sin más referencias a la distinción entre (3.2.3) y (3.2.7). La observación de sobrevivencia a la edad x producirá la misma distribución condicional que la hipótesis de que un recién nacido sobrevive la edad de x es decir,

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{3.2.8} $$

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{3.2.9} $$

Bajo este enfoque, (3.2.7), y sus múltiples casos especiales pueden expresarse como

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} \\ &= {}_tp_x \; {}_uq_{x+t}. \end{aligned} \tag{3.2.10} $$

3.2.3 Tiempo de vida futuro truncado

Una variable aleatoria discreta asociada con el tiempo de vida futuro es el número de años futuros completados por (x) antes de su muerte o el tiempo de vida futuro truncado de (x). Esta variable aleatoria, $K(x)$, tiene la *f.p.*

$$\begin{aligned}\Pr[K(x)=k] &= \Pr[k \le T(x) < k+1] \\ &= \Pr[k < T(x) \le k+1] \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\ &= {}_kp_x q_{x+k} = {}_{k|}q_x \qquad k=0,1,2,.... \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

El cambio de desigualdades es posible ya que, bajo nuestro supuesto de que $T(x)$ es una variable aleatoria de tipo continuo, $\Pr[T(x)=k]=\Pr[T(x)=k+1]=0$. La expresión (3.2.11) es un caso especial de (3.2.7) en donde $u=1$ y k es un entero no negativo $(0,1,2,3,...)$. De (3.2.11) podemos ver que la *f.d.* de $K(x)$ es la función escalonada

$$\sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x = {}_{K+1}q_x, k=0,1,2,...$$

De este contexto, frecuentemente se sigue que $T(x)$ es el tiempo de vida futuro de (x) en cuyo caso podemos escribir T en lugar de $T(x)$. De la misma forma podemos escribir K en lugar de $K(x)$.

3.2.4 Fuerza de Mortalidad

La fórmula (3.2.3) expresa, en términos de la *f.d.* y de la función de sobrevivencia, la probabilidad condicional de que un recién nacido (edad 0) muera entre la edad de x y z, dada la sobrevivencia a la edad x. Con $z-x$ constante, digamos en c, considerada posteriormente como función de x, esta probabilidad condicional describe la distribución de la probabilidad de muerte en el futuro inmediato (entre el tiempo 0 y c) para una vida que alcanzó la edad x. Se puede obtener una función análoga para la muerte instantánea utilizando la densidad de probabilidad de muerte a la edad alcanzada x, es decir, usando (3.2.3) con $z = x + \Delta x$,

$$\Pr[x < X \le x+\Delta x \mid X > x] = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)} \cong \frac{f(x)\Delta x}{1-F(x)} \qquad (3.2.12)$$

En esta expresión $F'(x) = f(x)$ es la *f.d.p.* de la variable aleatoria continua de la edad a la muerte. La función

$$\frac{f(x)}{1-F(x)}$$

en (3.2.12) tiene una interpretación condicional de la densidad de probabilidad. Para cada edad x., proporciona el valor de la *f.d.p.* condicional de X a la edad exacta de x, dada la sobrevivencia en esa edad. Se denota como μ_x. Tenemos

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)} \qquad (3.2.13)$$

Las propiedades de $f(x)$ y de $1-F(x)$ implican que $\mu_x \ge 0$.

En la ciencia actuarial y en demografía μ_x se denomina ***fuerza de mortalidad.*** En la teoría de la confiabilidad, el estudio de las probabilidades de sobrevivencia de partes manufacturadas y de sistemas, μ_x se denomina ***tasa de fracasos*** o ***tasa de azar*** o, más aún ***función de tasa de azar***.

Así como es válido para la función de sobrevivencia, la fuerza de mortalidad puede usarse para especificar la función de distribución de X. Para obtener este resultado, consideremos la expresión definida en (3.2.13), realicemos un cambio de variable, es decir x por y y arreglemos la expresión para obtener

$$-\mu_y dy = d\log\, s(y).$$

Integrando la expresión de x a $x+n$, tenemos

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \log\left[\frac{s(x+n)}{s(x)}\right] .$$

$$= \log_n p_x$$

y al tomar exponenciales se obtiene

$$ {}_n p_x = \exp(-\int_x^{x+n} \mu_y dy) \tag{3.2.14}$$

Algunas veces es conveniente volver a expresar (3.2.14), con $s = y - x$, como

$$ {}_n p_x = \exp(-\int_0^n \mu_{x+s} ds). \tag{3.2.15}$$

En particular, cambiaremos la notación para que sea congruente con la que se usó en (3.2.6) estableciendo la edad ya vivida en 0 y denotando el tiempo de sobrevivencia por x. Tenemos entonces.

$$ {}_x p_0 = s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds). \tag{3.2.16}$$

Además

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp(-\int_0^x \mu_s ds) \tag{3.2.17}$$

y

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &= \exp(-\int_0^x \mu_s ds)\mu_x \\ &= {}_x p_0 \mu_x \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Sea $G(t)$ y $g(t)$ respectivamente, la *f.d.* y la *f.d.p.* de $T(x)$, el tiempo futuro de vida de (x). A partir de (3.2.4) sabemos que $G(t) = {}_t q_x$. Por lo tanto,

$$g(t) = \frac{d}{dt} {}_t q_x$$

$$= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \right]$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} \right] \qquad (3.2.19)$$

$$= {}_tp_x\mu_{x+t} \qquad t \geq 0.$$

Por lo tanto ${}_tp_x\mu_{x+t}dt$ es la probabilidad de que (x) muera entre t y $t+dt$, y

$$\int_0^\infty {}_tp_x\ \mu_{x+t}dt = 1$$

donde el límite superior de la integral está definido como infinito positivo (una abreviación para integrar sobre toda la probabilidad de densidad positiva).

De (3.2.19) se sigue que

$$\frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = -\frac{d}{dt}{}_tp_x = {}_tp_x\mu_{x+t}. \qquad (3.2.20)$$

Esta equivalencia es útil para varios desarrollos en matemáticas actuariales.

Ya que

$$\lim_{n\to\infty} {}_np_x = 0,$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(-\log {}_np_x) = \infty;$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^{x+n} \mu_y dy = \infty.$$

Los desarrollos de esta sección se resumen en los cuadros 3.1.1 y 3.1.2.

Cuadro 3.1.1 Definiciones

Nombre del concepto	Símbolo
Variable aleatoria de la edad al fallecimiento	X
Vida de edad-x	x
Variable aleatoria del tiempo transcurrido antes del fallecimiento Variable aleatoria del tiempo de vida futuro de (x) Variable aleatoria del tiempo de vida restante de (x)	$T(x)$ o T

Cuadro 3.1.2 Funciones de la teoría de probabilidad para edad al fallecimiento, X

	f.d $F(x)$	*f.d.p.* $f(x)$	Función de Sobrevivencia $s(x)$	Fuerza de Mortalidad μ_x
		Requisitos		
Para $x<0$	$F(x)=0$	$f(x)=0$	$s(x)=1$	$\mu_x=0$
Para $x=0$	$F(x)=0$	$f(x)\geq 0$	$s(x)=1$	$\mu_x\geq 0$
Para $x\geq 0$	*no-decreciente*	$f(x)\geq 0$	*no-creciente*	$\mu_x\geq 0$
$\lim_{x\to\infty}$	$F(\infty)=1$	$\int_0^\infty f(x)\,dx=1$	$s(\infty)=0$	$\int_0^\infty \mu_x\,dx=\infty$
		Relaciones		
Función en términos de				
$F(x)$	$F(x)$	$F'(x)$	$1-F$	$F'(x)/[1-F(x)]$
$f(x)$	$\int_0^\infty f(s)ds$	$f(x)$	$1-\int_0^\infty f(s)ds$	$f(x)/\int_x^\infty f(s)ds$
$s(x)={}_xp_0$	$1-s(x)$	$-s'(x)$	$s(x)$	$-s'(x)/s(x)$
μ_x	$1-e^{\left(-\int_0^x \mu_s ds\right)}$	$e^{\left(-\int_0^x \mu_s ds\right)}\mu_x$	$e^{\left(-\int_0^x \mu_s ds\right)}$	μ_x

La parte media inferior del cuadro 3.1.2 resume algunas de las relaciones entre las funciones de la teoría general de probabilidad y las específicas para aplicaciones para la edad al fallecimiento. Existen otros muchos ejemplos en los que las cuestiones de edad a la muerte pueden formarse en el escenario de probabilidad más general. Lo siguiente ilustra este punto.

Ejemplo 3.1

Si $\overline{A}$ se refiere al complemento del evento A dentro del espacio muestral y la $\Pr(\overline{A}) \neq 0$, lo siguiente expresa una identidad en teoría de la probabilidad

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(\overline{A})\ \Pr(B|\overline{A})$$

Rescriba esta identidad en notación actuarial para los eventos $A = [T(x) \leq t]$ y $B = [t < T(x) \leq 1]$, $\quad 0 < t < 1$.

Solución

$\Pr(A \cup B)$ se transforma en $\Pr[T(x) \leq 1] = q_x$, $\Pr(A)$ es ${}_tq_x$ y $\Pr(B|\overline{A})$ es ${}_{1-t}q_{x+t}$, por tanto

$$q_x = {}_tq_x + {}_tp_x\ {}_{1-t}q_{x+t}.$$

3.3. Tablas de Mortalidad

Las tablas de mortalidad que se publican contienen usualmente tabulaciones, por edades individuales, de las funciones básicas q_x, l_x, d_x, y posiblemente funciones derivadas adicionales. Antes de presentar dicha tabla, examinaremos una interpretación de estas funciones que está directamente relacionada con las funciones de probabilidad discutidas en la presente sección.

3.3.1 Relaciones entre las Funciones de la Tabla de Mortalidad y la Función de Sobrevivencia.

En (3.2.9) expresamos la probabilidad condicional de que (x) fallezca dentro de t años como

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

y, en particular, tenemos

$$q_x = 1 - \frac{s(x+1)}{s(x)}$$

Ahora consideramos un grupo de l_0 recién nacidos, $l_0 = 100{,}000$ por ejemplo. Cada edad al fallecimiento de los recién nacidos tiene una distribución definida por la función de sobrevivencia $s(x)$. Además, sea $\mathcal{I}(x)$ el número de sobrevivientes de la cohorte a la edad x. Indexamos estas vidas con $j = 1, 2, \cdots, l_0$ y observamos que

$$\mathcal{I}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

en donde I_j es un indicador para la sobrevivencia del individuo j; es decir,

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo } j \text{ sobrevive a la edad } x \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Dado que $E[I_j] = s(x)$,

$$\mathrm{E}[\mathcal{I}(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0 S(x)$$

Representemos $\mathrm{E}[\mathcal{I}(x)]$ por l_x; esto es, l_x representa el número esperado de que los l_0 recién nacidos sobrevivan a la edad x, y tendremos

$$l_x = l_0 \; s(x) \tag{3.3.1}$$

Además, bajo el supuesto de que los indicadores I_j son mutuamente independientes, $\mathrm{E}[\mathcal{I}(x)]$ tiene una ***distribución binomial*** con parámetros $n = l_0$ y $p = s(x)$. Sin embargo, notemos que la expresión (3.3.1) no requiere del supuesto de independencia.

En un arreglo similar, ${}_n\mathcal{D}_x$ representará el número de muertes entre las edades x y $x+n$ dentro de un grupo inicial l_0. Denotemos $E[{}_n\mathcal{D}_x]$ como ${}_nd_x$. Ya que un recién nacido tiene una probabilidad $s(x) - s(x+n)$ de morir entre las edades x y $x+n$ podemos, por un argumento similar al empleado para l_x, expresar

$$\begin{aligned} {}_nd_x &= E[{}_n\mathcal{D}_x] = l_0[s(x) - s(x+n)] \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Cuando $n = 1$, omitimos el prefijo sobre ${}_n\mathcal{D}_x$ y ${}_nd_x$.

De (3.3.1), tenemos que

$$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx} = \mu_x \tag{3.3.3}$$

y

$$-dl_x = l_x \mu_x dx. \tag{3.3.4}$$

Dado que

$$l_x \mu_x = l_{0\,x} p_0 \mu_x = l_0 f(x)$$

el factor $l_x \mu_x$ en (3.3.4) puede ser interpretado como la densidad esperada de muertes en el intervalo de edades $(x,\ x + dx)$. Notamos adicionalmente que

$$l_x = l_0 \exp(-\int_0^x \mu_y\ dy) \tag{3.3.5}$$

$$l_{x+n} = l_x \exp(-\int_x^{x+n} \mu_y\ dy) \tag{3.3.6}$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_y \mu_y\ dy \tag{3.3.7}$$

En los seres humanos, ha habido pocas observaciones de edad al fallecimiento más allá de 110 años. Consecuentemente, se supone que hay una edad ω tal que $s(x) > 0$ para $x < \omega$ y $s(x) = 0$ para $x \geq \omega$. La edad ω, se denomina la ***edad límite***.

Por conveniencia, para referirse al concepto de l_0, que denota en número de recién nacidos, cada uno con función de sobrevivencia $s(x)$, lo denominaremos un ***grupo aleatorio de sobrevivencia***.

3.3.2 Ejemplo de Tablas de Mortalidad

En la "Tabla de mortalidad para la población Total: Estados Unidos, 1979-81" (cuadro 3.2), las funciones ${}_tq_x$, l_x y ${}_td_x$ están presentadas con $l_0 = 10{,}000$. Excepto para el primer año de vida, el valor de t en las funciones tabuladas ${}_tq_x$ y ${}_td_x$ es 1. Las otras funciones que aparecen en la tabla se discutirán en la sección 3.5.

La tabla citada no fue construida observando 100,000 recién nacidos hasta el fallecimiento del último sobreviviente. En lugar de ello, se estimaron probabilidades de muerte, dada la sobrevivencia a varias edades, derivadas de la experiencia de la población total de Estados Unidos en los años cercanos al censo de 1980. Al usar el concepto de grupo aleatorio de sobrevivencia con esta tabla, debemos hacer la suposición de que las probabilidades derivadas de la tabla serán apropiadas para el tiempo de vida de los que pertenecen al grupo de sobrevivencia.

Cuadro 3.2. Tabla de Mortalidad para la población total: Estados Unidos, 1979 – 81

Intervalo de Edad	Proporción que muere	De 100,000 nacidos vivos		Población Estacionaria* (años vividos)		Tiempo medio de vida remanente
Periodo de vida entre dos edades	Proporción de personas con vida al principio del intervalo de edad, que mueren durante el intervalo	Número que viven al inicio del intervalo de edad	Número que mueren durante el intervalo de edad	En el intervalo de edad	En este y en todos los intervalos de edad subsiguientes	Número promedio de años de vida que restan al principio del intervalo de edad
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x ó $x+t$	${}_tq_x$	l_x	${}_td_x$	${}_tL_x$	T_x	$\mathring{e}_x$
Días						
0–1	0.00463	100 000	463	273	7 387 758	73.88
1–7	0.00246	99 537	245	1 635	7 387 485	74.22
7–28	0.00139	99 292	138	5 708	7 385 850	74.38
28–365	0.00418	99 154	414	91 357	7 380 142	74.43

Cuadro 3.2. Tabla de Mortalidad para la población total: Estados Unidos, 1979 – 81

Intervalo de Edad	Proporción que muere	De 100,000 nacidos vivos		Población Estacionaria* (años vividos)		Tiempo medio de vida remanente
Período de vida entre dos edades	Proporción de personas con vida al principio del intervalo de edad, que mueren durante el intervalo	Número que viven al inicio del intervalo de edad	Número que mueren durante el intervalo de edad	En el intervalo de edad	En este y en todos los intervalos de edad subsiguientes	Número promedio de años de vida que restan al principio del intervalo de edad
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x ó $x+t$	${}_tq_x$	l_x	${}_td_x$	${}_tL_x$	T_x	$\overset{o}{e}_x$
Años						
0–1	0.01260	100 000	1 260	98 973	7 387 758	73.88
1–2	0.00093	98 740	92	98 694	7 288 785	73.82
2–3	0.00065	98 648	64	98 617	7 190 091	72.89
3–4	0.00050	98 584	49	98 560	7 091 474	71.93
4–5	0.00040	98 535	40	98 515	6 992 914	70.97
5–6	0.00037	98 495	36	98 477	6 894 399	70.00
6–7	0.00033	98 459	33	98 442	6 795 922	69.02
7–8	0.00030	98 426	30	98 412	6 697 480	68.05
8–9	0.00027	98 396	26	98 383	6 599 068	67.07
9–10	0.00023	98 370	23	98 358	6 500 685	66.08
10–11	0.00020	98 347	19	98 338	6 402 327	65.10
11–12	0.00019	98 328	19	98 319	6 303 989	64.11
12–13	0.00025	98 309	24	98 297	6 205 670	63.12
13–14	0.00037	98 285	37	98 266	6 107 373	62.14
14–15	0.00053	98 248	52	98 222	6 009 107	61.16
15–16	0.00069	98 196	67	98 163	5 910 885	60.19
16–17	0.00083	98 129	82	98 087	5 812 722	59.24
17–18	0.00095	98 047	94	98 000	5 714 635	58.28
18–19	0.00105	97 953	102	97 902	5 616 635	57.34
19–20	0.00112	97 851	110	97 796	5 518 733	56.40
20–21	0.00120	97 741	118	97 682	5 420 937	55.46
21–22	0.00127	97 623	124	97 561	5 323 255	54.53
22–23	0.00132	97 499	129	97 435	5 225 694	53.60
23–24	0.00134	97 370	130	97 306	5 128 259	52.67
24–25	0.00133	97 240	130	97 175	5 030 953	51.74
25–26	0.00132	97 110	128	97 046	4 933 778	50.81
26–27	0.00131	96 982	126	96 919	4 836 732	49.87
27–28	0.00130	96 856	126	96 793	4 739 813	48.94
28–29	0.00130	96 730	126	96 667	4 643 020	48.00
29–30	0.00131	96 604	127	96 541	4 546 353	47.06

* La población estacionaria es un concepto demográfico que se trata en el capítulo 18.

Cuadro 3.2. Tabla de Mortalidad para la población total: Estados Unidos, 1979 – 81 continuación

Intervalo de Edad	Proporción que muere	De 100,000 nacidos vivos		Población Estacionaria* (años vividos)		Tiempo medio de vida remanente
Período de vida entre dos edades	Proporción de personas con vida al principio del intervalo de edad, que mueren durante el intervalo	Número que viven al inicio del intervalo de edad	Número que mueren durante el intervalo de edad	En el intervalo de edad	En este y en todos los intervalos de edad subsiguientes	Número promedio de años de vida que restan al principio del intervalo de edad
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x ó $x+t$	${}_tq_x$	l_x	${}_td_x$	${}_tL_x$	T_x	$\overset{o}{e}_x$
Años						
30–31	0.00133	96 477	127	96 414	4 449 812	46.12
31–32	0.00134	96 350	130	96 284	4 353 398	45.18
32–33	0.00137	96 220	132	96 155	4 257 114	44.24
33–34	0.00142	96 088	137	96 019	4 160 959	43.30
34–35	0.00150	95 951	143	95 880	4 064 940	42.36
35–36	0.00159	95 808	153	95 731	3 969 060	41.43
36–37	0.00170	95 655	163	95 574	3 873 329	40.49
37–38	0.00183	95 492	175	95 404	3 777 755	39.56
38–39	0.00197	95 317	188	95 224	3 682 351	38.63
39–40	0.00213	95 129	203	95 027	3 587 127	37.71
40–41	0.00232	94 926	220	94 817	3 492 100	36.79
41–42	0.00254	94 706	241	94 585	3 397 283	35.87
42–43	0.00279	94 465	264	94 334	3 302 698	34.96
43–44	0.00306	94 201	288	94 057	3 208 364	34.06
44–45	0.00335	93 913	314	93 756	3 114 307	33.16
45–46	0.00366	93 599	343	93 427	3 020 551	32.27
46–47	0.00401	93 256	374	93 069	2 927 124	31.39
47–48	0.00442	92 882	410	92 677	2 834 055	30.51
48–49	0.00488	92 472	451	92 246	2 741 378	29.65
49–50	0.00538	92 021	495	91 773	2 649 132	28.79
50–51	0.00589	91 526	540	91 256	2 557 359	27.94
51–52	0.00642	90 986	584	90 695	2 466 103	27.10
52–53	0.00699	90 402	631	90 086	2 375 408	26.28
53–54	0.00761	89 771	684	89 430	2 285 322	25.46
54–55	0.00830	89 087	739	88 717	2 195 892	24.65
55–56	0.00902	88 348	797	87 950	2 107 175	23.85
56–57	0.00978	87 551	856	87 122	2 019 225	23.06
57–58	0.01059	86 695	919	86 236	1 932 103	22.29
58–59	0.01151	85 776	987	85 283	1 845 867	21.52
59–60	0.01254	84 789	1 063	84 258	1 760 584	20.76
60–61	0.01368	83 726	1 145	83 153	1 676 326	20.02
61–62	0.01493	82 581	1 233	81 965	1 593 173	19.29
62–63	0.01628	81 348	1 324	80 686	1 511 208	18.58
63–64	0.01767	80 024	1 415	79 316	1 430 522	17.88
64–65	0.01911	78 609	1 502	77 859	1 351 206	17.19

* La población estacionaria es un concepto demográfico que se trata en el capitulo 18.

Cuadro 3.2. Tabla de Mortalidad para la población total: Estados Unidos, 1979 – 81 continuación

Intervalo de Edad	Proporción que muere	De 100,000 nacidos vivos		Población Estacionaria* (años vividos)		Tiempo medio de vida remanente
Período de vida entre dos edades	Proporción de personas con vida al principio del intervalo de edad, que mueren durante el intervalo	Número que viven al inicio del intervalo de edad	Número que mueren durante el intervalo de edad	En el intervalo de edad	En este y en todos los intervalos de edad subsiguientes	Número promedio de años de vida que restan al principio del intervalo de edad
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x ó $x+t$	${}_tq_x$	l_x	${}_td_x$	${}_tL_x$	T_x	$\overset{o}{e}_x$
Años						
65–66	0.02059	77 107	1 587	76 314	1 273 347	16.51
66–67	0.02216	75 520	1 674	74 683	1 197 033	15.85
67–68	0.02389	73 846	1 764	72 964	1 122 350	15.20
68–69	0.02585	72 082	1 864	71 150	1 049 386	14.56
69–70	0.02806	70 218	1 970	69 233	978 236	13.93
70–71	0.03052	68 248	2 083	67 206	909 003	13.32
71–72	0.03315	66 165	2 193	65 069	841 797	12.72
72–73	0.03593	63 972	2 299	62 823	776 728	12.14
73–74	0.03882	61 673	2 394	60 476	713 905	11.58
74–75	0.04184	59 279	2 480	58 039	653 429	11.02
75–76	0.04507	56 799	2 560	55 520	595 390	10.48
76–77	0.04867	54 239	2 640	52 919	539 870	9.95
77–78	0.05274	51 599	2 721	50 238	486 951	9.44
78–79	0.05742	48 878	2 807	47 475	436 713	8.93
79–80	0.06277	46 071	2 891	44 626	389 238	8.45
80–81	0.06882	43 180	2 972	41 694	344 612	7.98
81–82	0.07552	40 208	3 036	38 689	302 918	7.53
82–83	0.08278	37 172	3 077	35 634	264 229	7.11
83–84	0.09041	34 095	3 083	32 553	228 595	6.70
84–85	0.09842	31 012	3 052	29 486	196 042	6.32
85–86	0.10725	27 960	2 999	26 461	166 556	5.96
86–87	0.11712	24 961	2 923	23 500	140 095	5.61
87–88	0.12717	22 038	2 803	20 636	116 595	5.29
88–89	0.13708	19 235	2 637	17 917	95 959	4.99
89–90	0.14728	16 598	2 444	15 376	78 042	4.70
90–91	0.15868	14 154	2 246	13 031	62 666	4.43
91–92	0.17169	11 908	2 045	10 886	49 635	4.17
92–93	0.18570	9 863	1 831	8 948	38 749	3.93
93–94	0.20023	8 032	1 608	7 228	29 801	3.71
94–95	0.21495	6 424	1 381	5 733	22 573	3.51
95–96	0.22976	5 043	1 159	4 463	16 840	3.34
96–97	0.24338	3 884	945	3 412	12 377	3.19
97–98	0.25637	2 939	754	2 562	8 965	3.05
98–99	0.26868	2 185	587	1 892	6 403	2.93
99–100	0.28030	1 598	448	1 374	4 511	2.82

* La población estacionaria es un concepto demográfico que se trata en el capitulo 18.

Cuadro 3.2. Tabla de Mortalidad para la población total: Estados Unidos, 1979 – 81 continuación

Intervalo de Edad	Proporción que muere	De 100,000 nacidos vivos		Población Estacionaria* (años vividos)		Tiempo medio de vida remanente
Período de vida entre dos edades	Proporción de personas con vida al principio del intervalo de edad, que mueren durante el intervalo	Número que viven al inicio del intervalo de edad	Número que mueren durante el intervalo de edad	En el intervalo de edad	En este y en todos los intervalos de edad subsiguientes	Número promedio de años de vida que restan al principio del intervalo de edad
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x ó $x+t$	${}_nq_x$	l_x	${}_nd_x$	${}_nL_x$	T_x	$\overset{o}{e}_x$
Años						
100–101	0.29120	1 150	335	983	3 137	2.73
101–102	0.30139	815	245	692	2 154	2.64
102–103	0.31089	570	177	481	1 462	2.57
103–104	0.31970	393	126	330	981	2.50
104–105	0.32786	267	88	223	651	2.44
105–106	0.33539	179	60	150	428	2.38
106–107	0.34233	119	41	99	278	2.33
107–108	0.34870	78	27	64	179	2.29
108–109	0.35453	51	18	42	115	2.24
109–110	0.35988	33	12	27	73	2.20

* La población estacionaria es un concepto demográfico que se trata en el capitulo 18.

Varias observaciones acerca de la tabla en cuestión son:

Observaciones:

1. Se esperaría que muriera, aproximadamente, 1% de un grupo de sobrevivencia de recién nacidos durante el primer año de vida.

2. Se esperaría que cerca del 77% de un grupo de recién nacidos sobreviviera hasta la edad de 65 años.

3. Se esperaría que el número máximo de muertes dentro de un grupo ocurra a la edad de 83 años.

4. La edad límite no esta definida. Está claro que hay una probabilidad de sobrevivencia a la edad de 110 años, pero la tabla no indica la edad ω donde $s(w)=0$.

5. Los mínimos locales del número esperado de muertes ocurren alrededor de las edades 11 y 27.

6. Aunque los valores de l_x han sido redondeados a enteros, de acuerdo con (3.3.1) no hay razones que obliguen a hacerlo así.

Una presentación como la del cuadro 3.2 es el método convencional para describir la distribución de la edad al fallecimiento. Alternativamente, una función de sobrevivencia podría describirse en una forma analítica, como $s(x) = e^{-cx}$, $c > 0$, $x \geq 0$. Sin embargo, la mayoría de los estudios de la mortalidad humana para propósitos de seguros utiliza la representación $s(x) = l_x / l_0$, como se ilustra en el cuadro 3.2. Como 100,000 $s(x)$ se presenta sólo para valores enteros de x, no hay necesidad de interpolar para evaluar $s(x)$ para valores fraccionarios. Esto será tema de la sección 3.6.

Ejemplo 3.2:

Sobre la base del cuadro 3.2, evalúe la probabilidad de que un individuo de edad 20 años.

a. Viva a los 100 años
b. Muera antes de los 70 años
c. Muera en la décima década de su vida

Solución:

a. $$\frac{s(100)}{s(20)} = \frac{l_{100}}{l_{20}} = \frac{1150}{97,741} = 0.0118$$

b. $$\frac{[s(20) - s(70)]}{s(20)} = 1 - \frac{l_{70}}{l_{20}} = 1 - \frac{68,248}{97,741} = 0.3017$$

c. $$\frac{[s(90) - s(100)]}{s(20)} = \frac{(l_{90} - l_{100})}{l_{20}} = \frac{(14,154 - 1150)}{97,741} = 0.1330$$ V

La comprensión de las funciones de la tabla de mortalidad puede obtenerse estudiando las figuras 3.1, 3.2 y 3.3. Estas se muestran para representar la mortalidad humana común y no se consideró en el cuadro 3.2.

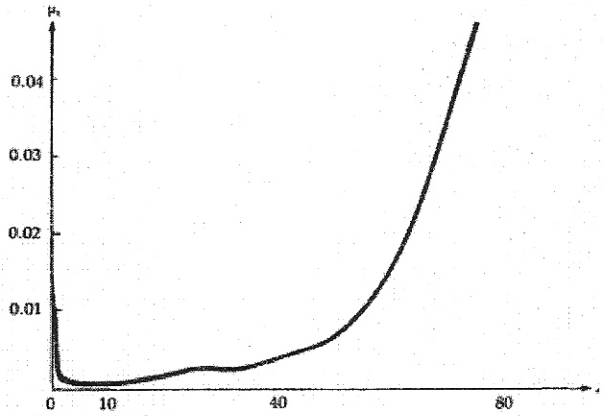


Figura 3.1 Fuerza de mortalidad μ_x

En la figura 3.1 observemos que:

- La fuerza de mortalidad es positiva y el requisito

$$\int_0^\infty \mu_x dx = \infty$$

se satisface. (Veáse el cuadro 3.1.2)

- La ***fuerza de mortalidad*** se inicia muy alta y luego cae a un mínimo alrededor de la edad 10.

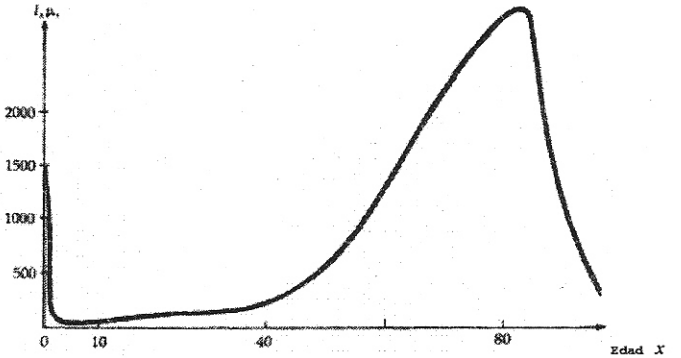


Figura 3.2 Gráfica de $l_x\mu_x$

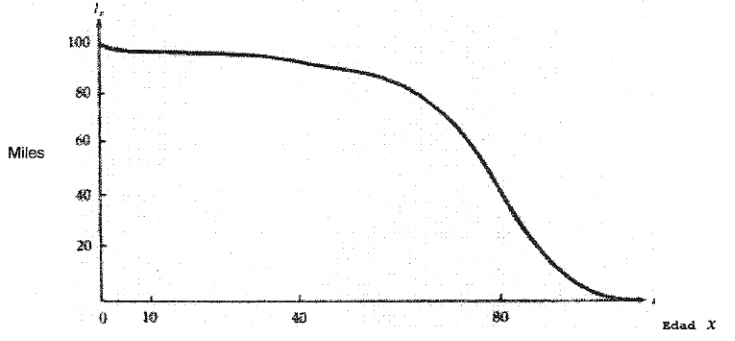


Figura 3.3 Gráfica de l_x

En las figuras 3.2 y 3.3 se aprecia que:

- La función $l_x\mu_x$ es proporcional a la ***f.d.p.*** de la edad al fallecimiento de un recién nacido. Dado que $l_x\mu_x$ es la densidad esperada de muertes a la edad x, bajo la idea del grupo de sobrevivencia aleatoria, la figura de $l_x\mu_x$ se llama la ***curva de fallecimientos***.

- Hay un mínimo local $l_x\mu_x$ aproximadamente en la edad 10. La moda de la distribución de fallecimientos -la edad a la cual ocurre el máximo de fallecimientos en la curva - es cercano a la edad de 80 años.
- La función l_x es proporcional a la función de sobrevivencia $s(x)$. Puede también interpretarse como el número esperado de vivos a la edad x a partir de un grupo inicial de tamaño l_0.
- Los puntos extremos locales de $l_x\mu_x$ corresponden a puntos de inflexión de l_x ya que

$$\frac{d}{dx}l_x\mu_x = \frac{d}{dx}\left(-\frac{d}{dx}l_x \right) = -\frac{d^2}{dx^2}l_x$$

3.4 El grupo determinístico de sobrevivencia

Procederemos ahora a una segunda, y no probabilística, interpretación de la tabla de mortalidad. Esta interpretación está enraizada matemáticamente en el concepto de tasas de decremento (crecimiento negativo). Como tal, está relacionada con las aplicaciones de la tasa de crecimiento en biología y economía. Es de naturaleza determinística y conduce al concepto de un grupo o cohorte determinístico de sobrevivencia. Un ***grupo determinístico de sobrevivencia***, como se representa en una tabla de mortalidad, tiene las siguientes características:

- El grupo inicialmente consiste de l_0 vivos de edad 0.
- Los integrantes del grupo están sujetos en cada edad de sus vidas, a tasas efectivas anuales de mortalidad (decremento) especificadas por los valores de q_x en la tabla de mortalidad.
- El grupo es cerrado. No se permite la entrada después del l_0 inicial. El único decremento se da como un resultado de las tasas efectivas anuales de mortalidad (decremento).

A partir de estas características se entiende que el desarrollo del grupo estará determinado por

$$l_1 = l_0(1-q_0) = l_0 - d_0$$

$$l_2 = l_1(1-q_1) = l_1 - d_1 = l_0 - (d_0 + d_1)$$

. . . .

. . . . (3.4.1)

$$l_x = l_{x-1}(1-q_{x-1}) = l_{x-1} - d_{x-1} = l_0 - \sum_{y=0}^{x-1} d_y$$

$$= l_0\left(1 - \frac{\sum_{y=0}^{x-1} d_y}{l_0}\right) = l_0(1 - {}_xq_0)$$

en donde l_x es el número de integrantes que llegan a la edad x en el grupo de sobrevivencia. Esta cadena de igualdades generada mediante un valor l_0 llamado raíz y un conjunto de valores q_x, puede volverse a expresar como

$$l_1 = l_0 p_0$$
$$l_2 = l_1 p_1 = (l_0 p_0) p_1$$

. . . .

. . . . (3.4.2)

$$l_x = l_{x-1} p_{x-1} = l_0 \left(\prod_{y=0}^{x-1} p_y\right) = l_0 \, {}_xp_0$$

Existe una analogía entre el grupo determinístico de sobrevivencia y el modelo del interés compuesto. El cuadro 3.3 se diseña para resumir este paralelismo

Cuadro 3.3

Conceptos relacionados de las matemáticas del interés compuesto y de los grupos deterministicos de sobrevivencia.

Interés compuesto	Grupo de sobrevivencia
$A(t)$ = Tamaño del fondo en el tiempo t, medido en años	l_x = Tamaño del grupo en la edad x, edad medida en años
Tasa anual efectiva de interés (incremento) $i_t = \dfrac{A(t+1)-A(t)}{A(t)}$	Tasa anual efectiva de mortalidad (decremento) $q_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$
Tasa efectiva de interés en el año n, empezando en el año t (*) ${}_n i_t = \dfrac{A(t+n)-A(t)}{A(t)}$	Tasa efectiva de mortalidad en el año n, empezando en la edad x ${}_n q_x = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$
Fuerza de interés en el tiempo t $\delta_t = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{A(t)\Delta t}\right]$ $= \dfrac{1}{A(t)}\dfrac{dA(t)}{dt}$	Fuerza de mortalidad en la edad x $\mu_x = \lim_{\Delta_x \to 0}\left[\dfrac{l_x - l_{x+\Delta_x}}{l_x \Delta x}\right]$ $= -\dfrac{1}{l_x}\dfrac{dl_x}{dx}$

(*) No existe un símbolo universalmente aceptado para una tasa efectiva de interés en el año n.

Los encabezados de las columnas ${}_1q_x$, l_x y ${}_1d_x$ en el cuadro 3.2 se refieren a la interpretación del grupo determinístico de sobrevivencia. Mientras las bases matemáticas del grupo aleatorio de sobrevivencia y el grupo determinístico de sobrevivencia son diferentes, las funciones resultantes q_x, l_x, d_x tienen las mismas propiedades matemáticas y el subsecuente análisis. El concepto de grupo aleatorio de sobrevivencia tiene la ventaja de permitir el uso total de la teoría de probabilidad. El grupo determinístico de sobrevivencia es conceptualmente simple y fácil de aplicar, pero no toma en cuenta la variación aleatoria en el número de sobrevivientes.

3.5 Otras funciones de la Tabla de Mortalidad

Antes de proceder a derivar expresiones para los momentos de la distribución de $T(x)$ probaremos un teorema que es útil para el cálculo de los valores esperados. Se probarán dos versiones del teorema. Una versión, teorema 3.1, para variables aleatorias continuas. La segunda, teorema 3.2, para variables aleatorias discretas.

Teorema 3.1:
Si T es un tipo de variable aleatoria continua con ***f.d.*** $G(t)$, tal que $G(0)=0$ y ***f.d.p.*** $G'(t)=g(t)$, y $z(t)$ es tal que

- Es una función diferenciable, monótona, no negativa (0,1,2, . . .) y
- $E[z(T)]$ existe,

entonces

$$E[z(T)] = \int_0^\infty z(t)g(t)\,dt$$

$$= z(0) + \int_0^\infty z'(t)[1-G(t)]\,dt.$$

Demostración.
Integrando por partes tenemos

$$\int_0^t z(s)g(s)\,ds = -\int_0^t z(s)d[1-G(s)]$$

$$= -z(s)[1-G(s)]\Big|_0^t + \int_0^t [1-G(s)]\,z'(s)\,ds$$

El teorema se cumple si $\lim_{t\to\infty} z(t)[1-G(t)]=0$. Consideramos dos casos:

a. Si la función no negativa (0,1,2, ...) $z(t)$ no es creciente, entonces claramente $\lim_{t\to\infty} z(t)[1-G(t)]=0$.

b. Si la función no negativa (0,1,2, ...) $z(t)$ no es decreciente, entonces

$$0 \le z(t)[1-G(t)] = z(t)\int_t^\infty g(s)ds \le \int_t^\infty z(s)g(s)ds$$

Pero si $E[z(T)]$ existe, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty z(s)g(s)ds = 0$$

De aquí que

$$\lim_{t\to\infty} z(t)[1-G(t)] = 0$$

y se cumple el teorema. □

El teorema 3.1 se utilizar para relacionar dos fórmulas para $E[T(x)]$. Este valor esperado se representa por $\overset{o}{e}_x$ el que se denomina ***esperanza de vida completa***. Por definición, tenemos

$$\overset{o}{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty {}_tp_x\mu_{x+t}dt \qquad (3.5.1)$$

Usando el teorema 3.1 con $z(t) = t$ y $G(t) = 1 - {}_tp_x$, tenemos

$$\overset{o}{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt \qquad (3.5.2)$$

La ***esperanza de vida completa*** a varias edades se utiliza a menudo para comparar niveles de salud pública entre poblaciones diferentes.

También usamos el teorema 3.1 con $z(t) = t^2$ para obtener expresiones equivalentes para $E[T(x)^2]$ por medio de

$$E[T(x)^2] = \int_0^\infty t^2\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

$$= 2\int_0^\infty {}_tp_x dt$$

Este resultado es útil para el cálculo de la $Var[T(x)]$ mediante

$$Var[T(x)] = E[T(x)^2] - E[T(x)]^2$$

$$= 2\int_0^\infty t\, {}_tp_x\, dt - \mathring{e}_x^{\,2}$$

En estas aplicaciones del teorema 3.1 hemos asumido que existen $E[T(x)]$ y $E[T(x)^2]$. Uno puede construir funciones de sobrevivencia tales como $s(x) = (1+x)^{-1}$ donde esto no sería verdadero.

Pueden determinarse otras características de la distribución de $T(x)$.
La ***mediana del tiempo de vida futuro*** de (x), representado por $m(x)$, puede encontrarse resolviendo

$$\Pr[T(x) > m(x)] = \frac{1}{2},$$

o

$$\frac{s[x+m(x)]}{s(x)} = \frac{1}{2}, \tag{3.5.3}$$

para $m(x)$. En particular, $m(0)$ es dada mediante la solución de $s[m(0)] = 1/2$. También puede uno encontrar la ***moda*** de $T(x)$ mediante la localización del valor de t que producirá un valor máximo de ${}_tp_x\mu_{x+t}$.

Para variables aleatorias discretas, tenemos un teorema análogo al teorema 3.1 el que puede establecerse mediante una prueba paralela.

Teorema 3.2

Si K es una variable aleatoria discreta con probabilidad sólo para enteros no negativos, con ***f.d.*** $G(k)$ y ***f.p.*** $g(k) = \Delta G(k-1)$, y $z(k)$ es una función monótona, no negativa tal que existe $E[z(K)]$, entonces

$$E[z(K)] = \sum_{k=0}^{\infty} z(k)g(k)$$

$$= z(0) + \sum_{k=0}^{\infty} [1 - G(k)]\Delta z(k)$$

Demostración:
Sumando por partes tenemos

$$\sum_{j=0}^{k-1} z(j)g(j) = -\sum_{j=0}^{k-1} z(j)\Delta\left[1-G(j-1)\right]$$

$$= -z(j)\left[1-G(j-1)\right]\Big|_0^k + \sum_{j=0}^{k-1}\left[1-G(j)\right]\Delta z(j).$$

El teorema se cumple si

$$\lim_{k\to\infty} z(k)\left[1-G(k-1)\right] = 0.$$

Consideramos

- Si la función no negativa $z(k)$ es no creciente, entonces es claro que

$$\lim_{k\to\infty} z(k)\left[1-G(k-1)\right] = 0.$$

- Si la función no negativa $z(k)$ es no decreciente, entonces

$$0 \le z(k)\left[1-G(k-1)\right] = z(k)\sum_{j=k}^{\infty} g(j) \le \sum_{j=K}^{\infty} z(j)g(j).$$

Pero, si existe $E\left[z(K)\right]$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j) = 0,$$

de aquí que

$$\lim_{k\to\infty} z(k)\left[1-G(k-1)\right] = 0,$$

y se cumple el teorema. □

En el caso especial donde K es el tiempo de vida truncado de (x), podemos usar el teorema 3.2 para establecer la conclusión

$$E[z(K)] = z(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta z(k)\, {}_{k+1}p_x \tag{3.5.4}$$

Este resultado puede utilizarse para calcular algunas de las propiedades de la distribución de K, siguiendo un proceso semejante al usado en el teorema 3.1 en relación con T. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} E[K] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_kp_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

donde, al aplicar el teorema 3.2, k juega el papel de $z(k)$. El símbolo para $E[K]$ es e_x y se llama ***esperanza de vida truncada.***

Siguiendo el mismo proceso utilizado en el modelo continuo, tenemos

$$\begin{aligned} E[K^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, {}_kp_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, {}_{k+1}p_x \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

En la expresión (3.5.6) el teorema 3.2 es utilizado con k^2 jugando el papel de $z(k)$. Entonces

$$\begin{aligned} Var[K] &= E[K^2] - E[K]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, {}_{k+1}p_x - e_x^2 \end{aligned}$$

Para completar la discusión de algunos de los componentes del cuadro 3.2, debemos definir funciones adicionales. El símbolo L_x representa el número esperado total de años de vida entre las edades x y $x+1$ de los sobrevivientes del grupo inicial de l_0 vidas. Tenemos

$$L_x = \int_0^1 t\; l_{x+t}\mu_{x+t}\, dt + l_{x+1} \tag{3.5.7}$$

donde la integral contabiliza los años vividos por aquellos que murieron entre las edades x y $x+1$ y el termino l_{x+1} contabiliza los años vividos entre las edades x y $x+1$ de los que sobrevivieron a la edad $x+1$. Integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} L_x &= -\int_0^1 t\, dl_{x+t} + l_{x+1} \\ &= -t\, l_{x+t}\Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t}\,dt + l_{x+1} \\ &= \int_0^1 l_{x+t}\,dt \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

La función L_x se utiliza para definir la ***tasa central de mortalidad*** a la edad x, representada por m_x donde

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt}{\int_0^1 l_{x+t}\,dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x} \tag{3.5.9}$$

En el capitulo 9 se encuentra una aplicación de esta función.

Las definiciones para m_x y L_x, pueden extenderse para intervalos largos, esto es:

$$ {}_nL_x = \int_0^n t\, l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt + nl_{x+n} = \int_0^n l_{x+t}\,dt $$

$$ {}_nm_x = \frac{\int_0^n l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt}{\int_0^n l_{x+t}\,dt} = \frac{l_x - l_{x+n}}{{}_nL_x} $$

${}_nL_x$: es el número esperado total de años de vida del grupo de la variable de supervivencia entre las edades x y $x+n$ de los sobrevivientes del grupo inicial de l_0 vidas y ${}_nm_x$ es el promedio de la tasa de fallecimiento experimentada por el grupo en el intervalo $(x, x+n)$.

El símbolo T_x, denotará el ***número total de años vividos*** después de la edad x por el grupo sobreviviente con l_0 integrantes iniciales. Tenemos que

$$\begin{aligned} T_x &= \int_0^\infty t\, l_{x+t}\mu_{x+t}dt \\ &= -\int_0^\infty t\, dl_{x+t} \\ &= \int_0^\infty l_{x+t}dt \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

La expresión final puede interpretarse como la integral del tiempo total vivido entre las edades $x+t$ y $x+t+dt$ de los l_{x+t} vivos que sobrevivieron en ése intervalo. También, el desarrollo de (3.5.10) puede obtenerse inmediatamente del Teorema 3.1 observando que

$$l_{x+t}\mu_{x+t} = l_x\, {}_tp_x\mu_{x+t}$$

El número promedio de años del tiempo de vida futuro de los l_x sobrevivientes del grupo en la edad x está dado por

$$\begin{aligned} \frac{T_x}{l_x} &= \frac{\int_0^\infty l_{x+t}dt}{l_x} \\ &= \int_0^\infty {}_tp_x dt \\ &= \mathring{e}_x \end{aligned}$$

como se determinó previamente en (3.5.1) y (3.5.2).

Una función final, relacionada con la interpretación de la tabla de mortalidad desarrollada en esta sección, es el número de años vividos en promedio entre las edades x y $x+1$ por aquellos integrantes del grupo de sobrevivencia que murieron entre esas edades. Esta función se denota por $a(x)$ y está definida por

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t\, l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt} \tag{3.5.11}$$

Desde el punto de vista probabilístico de la tabla de mortalidad, tendríamos

$$a(x) = \frac{\int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_t p_x \ \mu_{x+t} dt} = E\left[T \middle| T < 1\right]$$

Si suponemos que

$$l_{x+t} \mu_{x+t} dt = d_x \ dt \quad 0 \le t \le 1,$$

es decir, si las muertes están distribuidas uniformemente en el año de edad, tenemos

$$a(x) = \int_0^1 t \ dt = \frac{1}{2}$$

Esta es la forma usual de aproximación para $a(x)$, excepto para edades jóvenes o avanzadas para las que la figura 3.2 demuestra que este supuesto puede ser inapropiado.

Ejemplo 3.3
Demuestre que

$$L_x = a(x) l_x + \left[1 - a(x)\right] l_{x+1}$$

y

$$L_x \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Solución:
De (3.5.7) y (3.5.11), tenemos

$$a(x) = \frac{L_x - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}}$$

o

$$L_x = a(x) l_x + \left[1 - a(x)\right] l_{x+1}$$

La fórmula

$$L_x \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

puede justificarse usando la regla trapezoidal para aproximar la integración de (3.5.8) ▽

La terminología clave de las tablas de mortalidad, que se definió en las secciones 3.3 a 3.5, se resume en el cuadro 3.4.

3.5.1 Fórmulas Recursivas*

El ejemplo anterior ilustra la técnica del uso del análisis numérico para valuar una tabla de mortalidad con estas características. El proceso trapezoidal es usado para aproximar su integración. La esperanza de vida del tiempo truncado puede ser utilizado para mostrar el proceso llamado fórmulas recursivas. La aplicación de la recursividad de fórmulas en este libro típicamente involucra uno de dos formas.

Previo de la fórmula recursiva

$$u(x) = c(x) + d(x)\, u(x+1)$$

o

Siguiente de la fórmula recursiva

$$u(x+1) = -\frac{c(x)}{d(x)} + \frac{1}{d(x)} u(x)$$

La variable x es usualmente un entero no negativo

Para valuar la función $u(x)$, para un dominio de valores enteres no negativos de x, es necesario tener los valores de $c(x)$ y $d(x)$, y el valor inicial de $u(x)$. Este procedimiento es utilizado en los subsiguientes capítulos y se muestra en la siguiente tabla el procedimiento de recursividad para e_x y $\overset{o}{e}_x$.

(*) Versión 1997

Tabla recursivas para e_x y $\overset{o}{e}_x$.

Pasos	e_x	$\overset{o}{e}_x$
1.- Ecuación básica	$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$	$\overset{o}{e}_x = \int_0^{\infty} {}_s p_x ds$
2.- Operación separada	$e_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_k p_x$	$\overset{o}{e}_x = \int_0^1 {}_s p_x ds + \int_1^{\infty} {}_s p_x ds$
3.- Factor p_x y cambio de variable en la operación.	$e_x = p_x + p_x \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x+1}$ $= p_x + p_x\, e_{x+1}$	$\overset{o}{e}_x = \int_0^1 {}_s p_x ds + p_x \int_0^{\infty} {}_t p_{x+1} dt$ $= \int_0^1 {}_s p_x ds + p_x\, \overset{o}{e}_{x+1}$
4.- Fórmula recursiva(1)	$u(x) = e_x$, $c(x) = p_x$ $d(x) = p_x$	$u(x) = \overset{o}{e}_x$, $c(x) = \int_0^1 {}_s p_x ds$ $d(x) = p_x$
5.- Valor final.	$e_\omega = u(\omega) = 0$	$\overset{o}{e}_\omega = u(\omega) = 0$

(1) La integral $c(x) = \int_0^1 {}_s p_x ds$, puede ser valuada usando el proceso trapezoidal como $c(x) = (1 + p_x)/2$.

(2) De la sección 3.3.1, tenemos $S(x) = 0, x \geq \omega$ y $s(x) > 0, x < \omega$, en este proceso se asume que ω es un entero.

3.6 Supuestos para las edades fraccionarias

En este capítulo se ha discutido la variable aleatoria continua del tiempo restante de vida, T, y la variable aleatoria discreta *del tiempo de vida futuro truncado* K. La tabla de mortalidad desarrollada en la sección 3.3 especifica completamente la distribución de probabilidad de K. Para especificar la distribución de T, debemos postular una forma analítica o adoptar una tabla de mortalidad y un supuesto acerca de la distribución entre enteros.

Examinaremos tres supuestos ampliamente utilizados en la ciencia actuarial. Se expresarán en términos de la función de sobrevivencia. En cada expresión, x es un entero y $0 \leq t \leq 1$. Los supuestos son los siguientes:

- ***Interpolación Lineal***: $s(x+t)=(1-t)s(x)+t\,s(x+1)$, es conocida como ***distribución uniforme*** , o más propiamente la distribución uniforme de fallecimientos dentro de intervalo de un año.
- ***Interpolación Exponencial*** o interpolación lineal de $\log s(c+t)$: $\log s(x+t)=(1-t)\log s(x)+t\log s(x+1)$. Esto es consistente con el supuesto de Fuerza constante de mortalidad en el intervalo de un año. Bajo este supuesto ${}_tp_x$ es exponencial.

  Conocida como ***fuerza constante de mortalidad*** $s(x+t)=s(x)e^{\mu t}$, en donde $\mu=-\log p_x$.
- ***Interpolación Armónica:*** $1/s(x+t)=(1-t)/s(x)+t/s(x+1)$, es conocida como la ***hiperbólica (históricamente Balducci*)*** , bajo el supuesto de que ${}_tp_x$ es una curva hiperbólica.

  (*) Este supuesto se nombró así Balbucí (Actuario Italiano),ya que señaló el método para la construcción de tablas de mortalidad. Sin embargo, debe indicarse que los tres métodos ya habían sido propuestos por Wittstein en 1862.

Cuadro 3.3
Resumen definiciones

Concepto	Símbolo
• Variable Aleatoria del tiempo futuro de vida de (x)	$T(x)=T$
• Variable Aleatoria del tiempo futuro truncado de vida de (x)	$K(x)=K$
• Variable aleatoria del número de sobrevivientes de la cohorte a la edad x.	$\mathcal{I}(x)$
• Número esperado de sobrevientes de la cohorte a la edad x.	l_x
• Número total de años vividos después de la edad x, por la cohorte, con l_0 integrantes iniciales en la edad 0.	T_x
• Esperanza abreviada de Vida de (x)	e_x
• Esperanza completa de Vida de (x)	$\mathring{e}_x$
• Número de fallecimientos entre las edades x y $x+n$	${}_nD_x$
• Número esperado de fallecimientos de la cohorte a la edad x	${}_nd_x=E[{}_nD_x]$
• Median del tiempo futuro de vida de (x)	$m(x)$
• Tasa central de mortalidad	m_x

Podríamos haber propuesto definiciones equivalentes en términos de la ***f.d.p.***, la ***f.d.*** o la fuerza de mortalidad.

Cuadro 3.4
Con base a los supuestos para edades fraccionarias

Función	Supuesto		
	Distribución uniforme	Fuerza constante	Balducci
${}_tq_x$	$t\,q_x$	$1-e^{-\mu t}$	$\dfrac{t\,q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tp_x$	$1-t\,q_x$	$e^{-\mu t}$	$\dfrac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_yq_{x+t}$	$\dfrac{y\,q_x}{1-t\,q_x}$	$1-e^{-\mu y}$	$\dfrac{y\,q_x}{1-(1-y-t)\,q_x}$
μ_{x+t}	$\dfrac{q_x}{1-t\,q_x}$	μ	$\dfrac{q_x}{1-(1-t)\,q_x}$
${}_tp_x\,\mu_{x+t}$	q_x	$e^{-\mu t}\mu$	$\dfrac{p_x\,q_x}{\left[1-(1-t)q_x\right]^2}$

Observe que, en este cuadro x es un entero, $0<t<1$, $0\le y\le 1$, $y+t\le 1$ y $\mu=-\log\, p_x$. Para los tres primeros renglones, las relaciones también son verdaderas para $t=0$ y $t=1$.

Con estas definiciones básicas se pueden derivar fórmulas para otras funciones estándar de probabilidad en términos de la tabla de mortalidad de probabilidades. Estos resultados se presentan en la tabla 3.5.

Los resultados de las entradas del cuadro 3.5 son ejercicios para sustituir los supuestos establecidos acerca de $s(x+t)$ en las fórmulas apropiadas de las secciones 3.2 y 3.3. Ilustraremos este proceso para la distribución uniforme de fallecimientos. Este supuesto se utilizará extensamente en el presente texto.

Para el resultado de la primera entrada de la columna de la distribución uniforme, uno puede definir

$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \quad 0 \le t \le 1, $$

después sustituir para $s(x+t)$

$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - \left[(1-t)s(x) + t\ s(x+1)\right]}{s(x)} = \frac{t\left[s(x) - s(x+1)\right]}{s(x)} = t\ q_x $$

La segunda entrada es el complemento de la primera.

Para la tercera, empezamos con

$$ {}_yq_{x+t} = \frac{s(x+t) - s(x+t+y)}{s(x+t)} $$

después sustituimos para $s(x+t)$ y $s(x+t+y)$ para obtener

$$ {}_yq_{x+t} = \frac{\left[(1-t)s(x) + t\ s(x+1)\right] - \left[(1-t-y)s(x) + (t+y)s(x+1)\right]}{(1-t)s(x) + t\ s(x+1)} $$

$$ = \frac{y\left[s(x) - s(x+1)\right]/s(x)}{\left\{s(x) - t\left[s(x) - s(x+1)\right]\right\}/s(x)} $$

$$ = \frac{yq_x}{1 - tq_x} $$

Para la cuarta, utilizamos

$$ \mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)'} $$

entonces, sustituyendo para $s(x+t)$, tenemos

$$\mu_{x+t} = \frac{\left[s(x) - s(x+1)\right]}{\left[(1-t)s(x) + t\, s(x+1)\right]}$$

Dividiendo el numerador y el denominador del lado derecho entre $s(x)$, se tiene

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{(1-tq_x)}$$

La entrada final de la columna de la distribución uniforme es resultado del producto de la segunda y la cuarta.

Si x es un entero, como antes ya se había considerado, se puede definir una variable aleatoria $S = S(x)$ mediante

$$T = K + S \tag{3.6.1}$$

en donde T es el tiempo transcurrido hasta que se produce la muerte, K es el tiempo futuro truncado de vida y S es la variable aleatoria que representa la parte fraccionaria vivida en el año del fallecimiento. Entonces

$$\begin{aligned} \Pr\left[k < T \le k+s\right] &= \Pr\left[(K=k) \cap (S \le s)\right] \\ &= {}_{k|s}q_x \\ &= {}_kP_x \;\; {}_sq_{x+k} \end{aligned}$$

Hasta este punto, el desarrollo ha requerido expresar la probabilidad necesaria en términos de símbolos actuariales especiales. Si ahora utilizamos el supuesto de la distribución uniforme como se muestra en el cuadro 3.5 para ${}_sq_{x+k}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Pr\left[(K=k) \cap (S \le s)\right] &= {}_kp_x \;\; s\, q_{x+k} \\ &= {}_{k|}q_x \;\; s \\ &= \Pr(K=k)\Pr(S \le s) \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Por lo tanto, la probabilidad conjunta de K y S puede factorizarse en las probabilidades separadas K y S. De ahí se sigue que, bajo el supuesto de

distribución uniforme de muertes, las variables aleatorias K y S son independientes. Lo que es más, ya que $\Pr(S \le s) = s$ es la ***f.d.*** de una distribución uniforme en $(0,1)$, S tiene esa distribución uniforme.

Ejemplo 3.4:

Bajo el supuesto de fuerza constante de la mortalidad, ¿son independientes las variables aleatorias K y S ?

Solución:

Utilizando las entradas del cuadro 3.5 para el supuesto de fuerza constante, obtenemos

$$\begin{aligned}\Pr\left[(K=k)\cap(S\le s)\right] &= {}_kp_{x\,s}q_{x+k} \\ &= {}_kp_x\left[1-\left(p_{x+k}\right)^s\right]\end{aligned}$$

Para comentar este resultado, distinguimos dos casos:

- Si p_{x+k} no es independiente de k, no podemos factorizar la probabilidad conjunta de K y S en probabilidades separadas.

  Concluimos que K y S no son independientes.

- En el caso especial en donde $p_{x+k} = p$, es una constante,

$$\begin{aligned}\Pr\left[(K=k)\cap(S\le s)\right] &= p^k\left(1-p^s\right) = \frac{(1-p)p^k\left(1-p^s\right)}{(1-p)} \\ &= \Pr(K=k)\Pr(S\le s),\end{aligned}$$

y concluimos que K y S son independientes, bajo el supuesto de fuerza constante. □

Ejemplo 3.5:

Bajo el supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos, demuestre que

a. $\overset{o}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$

b. $Var[T] = Var[K] + Var + \frac{1}{12}$

Solución:

a.

$$\begin{aligned}\overset{o}{e}_x &= E[T] = E[K+S] \\ &= E[K] + E[S] \\ &= e_x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b. $Var[T] = Var[K+S]$

A partir de la independencia de K y S, bajo el supuesto de la distribución uniforme, se sigue que

$$Var[T] = Var[K] + Var[S]$$

Además, dado que S esta distribuido uniformemente en (0,1),

$$Var[T] = Var[K] + \frac{1}{12}$$

∇

3.7 Algunas leyes analíticas de la mortalidad

Hay tres justificaciones principales para postular una forma analítica para las funciones de mortalidad o de sobrevivencia. La primera es filosófica. Muchos fenómenos estudiados en física pueden explicarse eficientemente mediante fórmulas simples. Por lo tanto, usando argumentos biológicos, algunos autores han sugerido que la sobrevivencia humana está gobernada mediante una ley igualmente simple. La segunda justificación es práctica. Es más fácil comunicar una función con pocos parámetros que lo que es hacerlo con una tabla de mortalidad con quizás 100 parámetros o probabilidades de mortalidad. Además, algunas de las formas analíticas tienen propiedades elegantes que son convenientes para evaluar expresiones de probabilidad que involucran más de una vida. La tercera justificación es la facilidad de estimar unos pocos parámetros de la función a partir de la información sobre mortalidad.

El apoyo a este tipo de funciones ha disminuido en los últimos años. Muchos piensan que es ingenuo creer en leyes universales de mortalidad. También, con el advenimiento de computadores de alta velocidad, las ventajas de algunas formas analíticas en cálculos que involucran más de una vida ya no tienen mayor importancia. Sin embargo, recientemente algunas investigaciones interesantes han reiterado los argumentos biológicos a favor de las leyes analíticas de mortalidad.

En el cuadro 3.6 se presentan varias familias de funciones analíticas simples de mortalidad y sobrevivencia, correspondientes a varios postulados de leyes. Se incluyen también, con propósitos de identificación, los nombres de los que originaron las leyes y las fechas de su publicación.

Cuadro 3.6
Funciones de mortalidad y sobrevivencia bajo varias Leyes

Iniciador	μ_x	$s(x)$	Restricciones
De Moivre (1729)	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - \frac{x}{\omega}$	$0 \leq x < \omega$
Gompertz (1825)	Bc^x	$\exp[-m(c^x - 1)]$	$B > 0, c > 1, x \geq 0$
Makeham (1860)	$A + Bc^x$	$\exp[-Ax - m(c^x - 1)]$	$B > 0, A \geq -B, c > 1, x \geq 0$
Weibull (1939)	kx^n	$\exp(-ux^{n+1})$	$k > 0, n > 0, x \geq 0$

Note que

- los símbolos especiales se definen como
$$m = \frac{B}{\log c'} \quad u = \frac{k}{(n+1)}$$
- la ley de Gompertz es un caso especial de la ley de Makeham con $A = 0$.
- si $c = 1$ en las leyes de Gompertz y Makeham, resulta la distribución exponencial (fuerza constante).
- en relación con la ley de Makeham, se interpreta que la constante A captura la aleatoriedad accidental, y el término Bc^x lo hace con la aleatoriedad del envejecimiento.

Las entradas en la columna $s(x)$ del cuadro 3.6 se obtuvieron por medio de la sustitución dentro (3.2.16). Por ejemplo, para la ley de Makeham tenemos

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp\left[-\int_0^x \left(A + Bc^s\right) ds\right] \\ &= \exp\left[-Ax - B\frac{\left(c^x - 1\right)}{\log c}\right] \\ &= \exp\left[-Ax - m\left(c^x - 1\right)\right] \end{aligned}$$

en donde $m = \dfrac{B}{Log\ c}$

Con fines de cálculo, el desarrollo de las tablas de mortalidad en los ejemplos y ejercicios se rigieron por dos objetivos. Uno fue tener tasas de mortalidad en el rango medio de variaciones grupales, distinguiendo factores tales como residencia, sexo, estado del asegurado, estado de la anualidad, situación marital y ocupación. Otro fue tener la ley de Makeham para la mayoría de las edades para ilustrar como pueden efectuarse los cálculos para vidas múltiples. La tabla de mortalidad ilustrativa del anexo 2A está basada en la ley de Makeham para edades entre 13 y 110,

$$1{,}000\mu_x = 0.7 + 0.05\left(10^{0.04}\right)^x \tag{3.7.1}$$

Los cálculos de las funciones básicas q_x, l_x y d_x de (3.7.1) se hicieron directamente de (3.7.1) en lugar de calcular l_x y d_x de los valores truncados de q_x. Se encontró que la última elección daría lugar a pequeñas diferencias en las aplicaciones. Debe tenerse presente que la tabla de mortalidad ilustrativa, como su nombre lo implica, es sólo para propósitos ilustrativos.

3.8 Tablas Selectas y Últimas

En la sección 3.2 discutimos cómo ${}_tp_x$ (la probabilidad que (x) sobreviva a la edad $x+t$) podría interpretarse en dos formas. La primera interpretación fue que la probabilidad puede ser evaluada por medio de una función de sobrevivencia apropiada para los recién nacidos, bajo la hipótesis simple de que hayan sobrevivido a la edad x. La segunda establece que el conocimiento adicional disponible acerca de la vida en la edad x podría hacer inapropiada a la función de sobrevivencia original para evaluar proposiciones de probabilidad acerca del tiempo de vida futuro de (x). Por ejemplo, la vida podría haber sido aceptada para un seguro de vida en la edad (x). Esta información nos conduciría a creer que la distribución del tiempo de vida futuro de las (x) es diferente de lo que de otra manera podríamos asumir sobre vidas de x años. En otro ejemplo, la vida podría haberse incapacitado a la edad x. Esta información nos conduciría a creer que la distribución del tiempo futuro de vida de (x) es diferente de aquellos no incapacitados a la edad x. En este par de ejemplos, sería preferible una función de sobrevivencia especial que incorporara la información particular disponible. En otras palabras, el modelo completo para dichas vidas es un conjunto de funciones de sobrevivencia incluyendo una para cada edad en la que la información sobre

aspectos de seguro, incapacidad, etc., está disponible. Este conjunto de funciones de sobrevivencia puede pensarse como una función de dos variables. Una variable es la edad considerada en la póliza emitida o al comienzo de la incapacidad, $[x]$ y la segunda variable es la duración desde la emisión de la póliza o la duración desde que se presentó la incapacidad, t. Entonces cada una de las funciones de las tablas de mortalidad usuales asociadas con esta función bivariada de sobrevivencia es un arreglo bidimensional en $[x]$ y t.

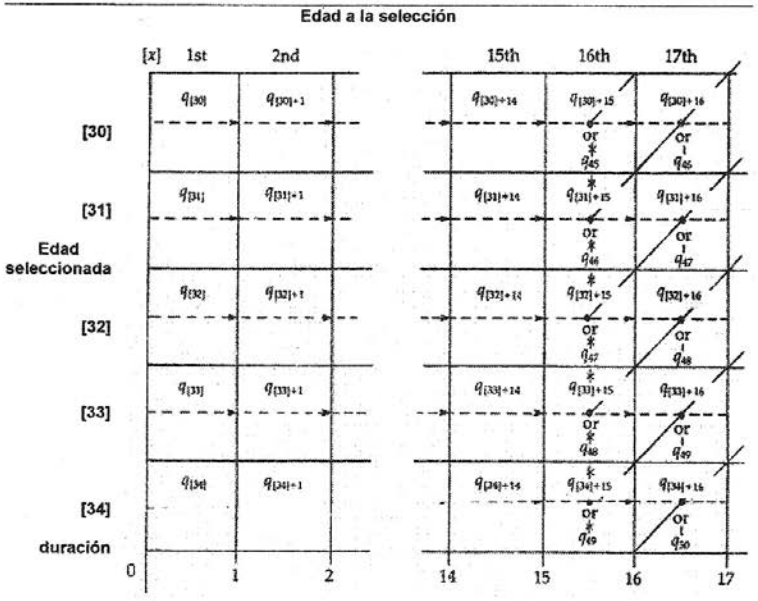
El diagrama esquemático de la figura 3.4 ilustra estas ideas. Por ejemplo, supongamos que se dispone de alguna información especial acerca de un grupo de vidas de 30 años de edad. Tal vez han sido aceptadas para un seguro de vida o quizás se han incapacitado. Se podría construir una tabla de mortalidad especial para éstas. La probabilidad condicional de muerte en cada año de duración se representaría por $q_{[30]+i}$, $i = 0,1,2,...$, y se introduciría en la primera hilera de la figura 3.4. El subíndice refleja la naturaleza bivariada de esta función en donde el 30 entre paréntesis cuadrados, $[30]$, señala que la función de sobrevivencia en la primera hilera está condicionada por la información especial disponible a la edad de 30. La segunda hilera de la gráfica 3.4 contendrá las probabilidades de muerte para vidas en las que la información especial llegará a estar disponible a la edad de 31 años. En la ciencia actuarial, tal tabla de mortalidad es llamada una ***tabla selecta de mortalidad.***

El efecto de la selección sobre la distribución del tiempo hasta la muerte, T, puede disminuir en la selección siguiente. Más allá de este periodo las q's en edades iguales alcanzadas serían esencialmente iguales sin importar las edades de la selección. En forma más precisa, si hubiera un entero más pequeño r tal que $\left|q_{[x]+r} - q_{[x-j]+r+j}\right|$ fuera menor que alguna constante positiva pequeña para todas las edades de la selección $[x]$ y para toda $j > 0$, sería más sencillo construir un conjunto de ***tablas selectas y ultimas*** mediante el truncamiento del arreglo bidimensional después de la columna $(r+1)$. Para duraciones más allá de r, se usaría

$$q_{[x-j]+r+j} \cong q_{[x]+r} \qquad j > 0$$

Los primeros r años de duración comprenden el ***periodo selecto***.

Figura 3.4
Mortalidad agregada, selecta y última, periodo selecto de 15 años



Camino seguido por un grupo selecto sobreviviente en [x]. Relaciona grupos (edad a la selección y duración) después de un periodo selecto de 15 años dentro de los grupos de edad alcanzada.

Camino alternativo seguido por los grupos sobrevivientes después de un periodo selecto de 15 años.

Los estudios de mortalidad de la Sociedad de Actuarios acerca de las vidas a las que se les otorgaron seguros de vida individuales sobre una base estándar, usan un periodo selecto de 15 años. Es decir se acepta que

$$q_{[x-j]+15+j} \cong q_{[x]+15} \qquad j > 0$$

Mas allá del periodo selecto, a las probabilidades de muerte se les señala con subíndice sólo para la edad alcanzada. Esto es, $q_{[x-j]+r+j}$ se escribe como q_{x+r}. Por ejemplo, con $r = 15$, $q_{[30]+15}$ y $q_{[25]+20}$ se escribirían como q_{45}.

Una tabla de mortalidad en la que las funciones están dadas sólo para las edades alcanzadas se denomina ***tabla agregada***, como el cuadro 3.2 por ejemplo. La última columna en una ***tabla selecta y última*** es una tabla agregada especial a la que usualmente se le refiere como una ***tabla última***.

El cuadro 3.7 contiene probabilidades de mortalidad y valores correspondientes de la función $l_{[x]+k}$, similares a los que presenta la Tabla de Seguros de Vida Británica, publicada para el periodo 1967-1970 por el Instituto de Actuarios y la Facultad de Actuarios. Esta tabla tiene un periodo selecto y es más fácil de usar para propósitos ilustrativos que las tablas con un periodo selecto de 15 años tal como las Tablas Básicas, publicadas por la Sociedad de Actuarios.

Cuadro 3.7 Extracto de la Tabla Selecta y última de 1967-1970

[x]	(1) $1000\ q_{[x]}$	(2) $1000\ q_{[x]+1}$	(3) $1000\ q_{x+2}$	(4) $l_{[x]}$	(5) $l_{[x]+1}$	(6) l_{x+2}	(7) $x+2$
30	0.43767	0.57371	0.69882	33 829	33 814	33 795	32
31	0.45326	0.59924	0.73813	33 807	33 791	33 771	33
32	0.47711	0.63446	0.79004	33 784	33 767	33 746	34
33	0.50961	0.68001	0.85577	33 760	33 742	33 719	35
34	0.55117	0.73655	0.93663	33 734	33 715	33 690	36

En el cuadro 3.7 observamos tres probabilidades de mortalidad para la edad de 32 años, es decir,

$$q_{[32]} = 0.00047711 < q_{[31]+1} = 0.00059924 < q_{32} = 0.00069882$$

Es posible el orden entre estas probabilidades ya que la mortalidad debería ser menor para las vidas inmediatamente después de haber sido aceptadas para un seguro de vida. La columna (3) puede considerarse como la que presenta las probabilidades últimas de mortalidad.

Para construir una tabla de mortalidad selecta y última, se construiría primero la última porción. Pueden utilizarse fórmulas como la (3.4.1). Esto produciría un conjunto de valores de $l_{x+r} = l_{[x]+r}$ en donde r es la longitud del periodo seleccionado. Después se podrían completar los segmentos seleccionados utilizando la relación:

$$l_{[x]+r-k-1} = \frac{l_{[x]+r-k}}{p_{[x]+r-k-1}} \qquad k = 0,1,2,\ldots,r-1$$

Ejemplo 3.6:

Utilice la tabla 3.7 para evaluar

a.- ${}_2p_{[30]}$

b.- ${}_5p_{[30]}$

c.- ${}_{1|}q_{[31]}$

d.- ${}_3q_{[31]+1}$.

Solución

Las fórmulas desarrolladas en la primera parte de este capítulo pueden adaptarse para las tablas selectas y últimas obteniéndose.

a. $${}_2p_{[30]} = \frac{l_{32}}{l_{[30]}} = \frac{33,795}{33,829} = 0.99899$$

b. $${}_5p_{[30]} = \frac{l_{35}}{l_{[30]}} = \frac{33,719}{33,829} = 0.99675$$

c. $${}_{1|}q_{[31]} = \frac{l_{[31]+1} - l_{33}}{l_{[31]}} = \frac{33,791 - 33,771}{33,807} = 0.00059$$

d. $${}_3q_{[31]+1} = \frac{l_{[31]+1} - l_{35}}{l_{[31]+1}} = \frac{33,791 - 33,719}{33,791} = 0.00213$$

3.9 Notas y referencias

Las tablas de mortalidad son un pilar fundamental de la ciencia actuarial. En consecuencia, se discuten ampliamente en varios libros de texto en inglés sobre contingencias de vida,

- King (1902)
- Spurgeon (1932)
- Jordan (1967)
- Hooker y Longley-Cook (1953)
- Neill (1977),

que se han utilizado para la instrucción actuarial. Además, las tablas de mortalidad son utilizadas por los bioestadísticas. Chiang (1968) y Elandt-Johnson y Johnson (1980) hacen una exposición sobre este último enfoque. La interpretación de la función de la tasa determinística fue discutida por Allen (1907).

En el cuadro 3.6 se hace referencia a las formas analíticas de las funciones de sobrevivencia de importancia histórica. Brillinger (1961) proporciona un argumento para ciertas formas analíticas desde el punto de vista de la prueba estadística de vida. Tenenbein y Vanderhoof (1980) reestablecieron el caso de las leyes analíticas de la mortalidad y desarrollaron fórmulas para mortalidad selecta. Algunos métodos para evaluar probabilidades para edades fraccionarias fueron revisados por Mereu (1961), y en el libro de texto de Batten sobre estimación de la mortalidad (1978) (ve se también la revisión histórica de Seal (1977)). Las discusiones sobre la amplitud del periodo selecto para varios tipos de procedimientos de selección de seguros tienen una larga historia, por ejemplo, Williamson (1942), Thompson (1934) y Jenkins (1943). Las tablas básicas 1965-1970 de la Sociedad de Actuarios utilizaron un periodo selecto de 15 años y se publicaron en los Reportes de la TSA, 1973. La notación Actuarial Internacional se describe en TASA 48 (1947).

3.10 Ejercicios

Sección 3.2

3.1 Utilizando las ideas resumidas en el cuadro 3.1.2, complete los elementos del siguiente cuadro

$s(x)$	$F(x)$	$f(x)$	μ_x
			$\tan x,\ 0 \le x \le \dfrac{\Pi}{2}$
$e^{-x},\ x \ge 0$			
	$1-\dfrac{1}{1+x},\ x \ge 0$		

3.2 Confirme que cada una de las siguientes funciones pueden servir como fuerza de mortalidad. Muestre la función de sobrevivencia correspondiente. En cada caso $x \ge 0$.

a.	Bc^x	$B>0$	$c>1$	(Gompertz)
b.	kx^n	$n>0$	$k>0$	(Weibull)
c.	$a(b+x)^{-1}$	$a>0$	$b>0$	(Pareto)

3.3 Confirme que lo siguiente puede servir como función de sobrevivencia. Muestre las μ_x, $f_X(x)$ y $F_X(x)$ correspondientes.

$$s(x) = e^{-\frac{x^3}{12}} \quad x \ge 0$$

3.4 Indique por qué, cada una de las siguientes funciones no pueden servir en su aplicación conforme al símbolo.

a. $\mu_x = (1+x)^{-3}, \quad x \geq 0$

b. $s(x) = 1 - \frac{22x}{12} + \frac{11x^2}{8} - \frac{7x^3}{24}, \qquad 0 \leq x \leq 3$

c. $f_X(x) = x^{n-1}e^{-x/2}, \quad x \geq 0, \ n \geq 1$

3.5 Si $s(x) = 1 - \frac{x}{100}, \ 0 \leq x \leq 100,$ calcule

a. μ_x b. $F_X(x)$
c. $f_X(x)$ d. $\Pr(10 < X < 40)$

3.6 Confirme que ${}_{k|}q_0 = -\Delta s(k)$, y que $\sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_0 = 1.$

3.7 Si $\mu_x = 0.001$ para $20 \leq x \leq 25$, evalúe ${}_{2|2}q_{20}$

Secciones 3.3, 3.4

3.8 Considerando el cuadro 3.2, Si el tiempo de sobrevivencia que han vivido 10 vidas en un grupo de sobrevivencia son independientes entre sí, determine la *f.p.* de $\mathfrak{L}(65)$, y la media y varianza de $\mathfrak{L}(65)$.

3.9 Si $s(x) = 1 - \frac{x}{12}, \ 0 \leq x \leq 12, \ l_0 = 9,$ y el tiempo de sobrevivencia son independientes, entonces se sabe que $({}_3\mathcal{D}_0, \ {}_3\mathcal{D}_3, \ {}_3\mathcal{D}_6, \ {}_3\mathcal{D}_9)$ tienen una distribución multinomial. Determine

a. El valor esperado de cada variable aleatoria
b. La varianza de cada variable aleatoria
c. El coeficiente de correlación entre cada par de variables aleatorias.

3.10 Con base en el cuadro 3.2,

a. Compare los valores de ${}_5q_0$ y ${}_5q_5$

b. Evalúe la probabilidad de que (25) muera entre las edades 80 y 85.

3.11 Dado que l_{x+t} es estrictamente decreciente en el intervalo $0 \le t \le 1$ demuestre que

a. Si l_{x+t} es cóncava hacia abajo, entonces $q_x > \mu_x$

b. Si l_{x+t} es cóncava hacia arriba, entonces $q_x < \mu_x$

3.12 Demuestre que

a. $\frac{d}{dx} l_x \mu_x < 0$ cuando $\frac{d}{dx} \mu_x < \mu_x^2$

b. $\frac{d}{dx} l_x \mu_x = 0$ cuando $\frac{d}{dx} \mu_x = \mu_x^2$

c. $\frac{d}{dx} l_x \mu_x > 0$ cuando $\frac{d}{dx} \mu_x > \mu_x^2$

3.13 Considere un grupo aleatorio de sobrevivencia consistente de dos subgrupos: (1) los sobrevivientes de 1,600 nacimientos; (2) los sobrevivientes de 540 personas reunidas 10 años después a la edad 10. A continuación se presenta un extracto de la tabla de mortalidad apropiada para ambos subgrupos:

x	l_x
0	40
10	39
70	26

Si γ_1 y γ_2 son los números de los sobrevivientes a la edad de 70 años de los subgrupos (1) y (2) respectivamente, estime un número c tal que $\Pr(\gamma_1 + \gamma_2 > c) = 0.05$. Suponga que las vidas son independientes e ignore correcciones de media unidad.

Sección 3.5

3.14 Sea la variable aleatoria:

$$T^*(x) = \begin{cases} T(x), & 0 < T(x) \le n \\ n & n < T(x) \end{cases}$$

y denotemos $E\left[T^*(x)\right]$ por $\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$, esta expresión es llamada esperanza de vida completa. Es usualmente publicada en planes de salud bajo el nombre de límite esperado de la función, es usada en el análisis de distribución de pérdidas de montos. Demuestre que:

a.- $\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n {}_tp_x \mu_{x+t} dt + n_n p_x$

$$= \int_0^n {}_tp_x dt = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x}$$

b.- $Var\left[T^*(x)\right] = \int_0^n t^2 {}_tp_x \, \mu_{x+t} dt + n^2 {}_np_x - \left(\mathring{e}_{x:\overline{n}|}\right)^2$

$$= 2\int_0^n t \, {}_tp_x \, dt - \mathring{e}_{x:\overline{n}|}^2$$

En forma semejante:

Sea la variable aleatoria

$$K^*(x) = \begin{cases} K(x), & K(x) = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ n & K(x) = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

y denotemos $E\left[K^*(x)\right]$ por $e_{x:\overline{n}|}$, esta expresión es llamada ***esperanza de vida abreviada***. Demuestre que:

a.- $e_{x:\overline{n}|} = \sum_0^{n-1} k \; {}_k|q_x + n_n p_x$

$$= \sum_1^n {}_kp_x$$

b.- $Var\left[k^*(x)\right] = \sum_{0}^{n-1} k^2 \,{}_k|q_x + n^2 \,{}_n p_x - \left(e_{x:\overline{n}|}\right)^2$

$$= \sum_{1}^{n} (2k+1)\,{}_k p_x - (e_{x:\overline{n}|})^2$$

3.15 Si la variable aleatoria T tiene una ***f.d.p.*** dada por $f_T(t) = ce^{-ct}$ para $t \geq 0$, $c > 0$, determine

a. $\overset{o}{e}_x = E[T]$

b. $Var[T]$

c. mediana$[T]$

3.16 Si $\mu_{x+t} = t$, $t \geq 0$, determine

a. ${}_t p_x \mu_{x+t}$

b. $\overset{o}{e}_x$

[Sugerencia: Recuerde que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ es la ***f.d.p.*** para la distribución normal estándar.]

3.17 Si la variable aleatoria T tiene ***f.d.*** dada por

$$F_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{(100-x)} & 0 \leq t < 100-x \\ 1 & t \geq 100-x \end{cases}$$

Determine

a. $\overset{o}{e}_x$

b. $Var[T(x)]$

c. Mediana$[T(x)]$

3.18 Demuestre que

a. $\frac{\partial}{\partial x}\,{}_t p_x = {}_t p_x(\mu_x - \mu_{x+t})$

b. $\frac{d}{dx}\overset{o}{e}_x = \overset{o}{e}_x \mu_x - 1$

c. $\Delta e_x = q_x e_{x+1} - p_x$

3.19 Si $s(x) = \frac{\sqrt{100 - x}}{10}$, $0 \le x \le 100$, evalúe

a. ${}_{17}p_{19}$ b. ${}_{15}q_{36}$ c. ${}_{15|13}q_{36}$

d. μ_{36} e. $\overset{o}{e}_{36}$

3.20 Confirme las siguientes proposiciones:

a. $a(x)\, d_x = L_x - l_{x+1}$

b. La aproximación desarrollada en el ejemplo 3.3 no se utilizó para calcular L_0 en el cuadro 3.2, pero si se usó para calcular L_1

c. $T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}$

Sección 3.6

3.21 Verifique los elementos para la fuerza constante de mortalidad y los supuestos de Balducci en el cuadro 3.5.

3.22 Grafique μ_{x+t}, $0 < t < 1$, para cada uno de los tres supuestos del cuadro 3.5. También grafique la función de sobrevivencia para cada supuesto.

3.23 Utilizando la columna l_x del cuadro 3.2, calcule ${}_{1/2}p_{65}$ para cada uno de los tres supuestos del cuadro 3.5.

3.24 Use el cuadro 3.2 y un supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad para encontrar la mediana de $[T]$ en donde T es el tiempo de vida futuro de una persona

a. edad 0 b. edad 50

3.25 Si $q_{70} = 0.04$ y $q_{71} = 0.05$, determine la probabilidad de que (70) muera entre las edades $70\frac{1}{2}$ y $71\frac{1}{2}$ bajo

a. el supuesto de que las muertes están distribuidas uniformemente en cada año de edad.

b. el supuesto de Balducci para cada año de edad.

3.26 Usando la columna l_x del cuadro 3.2 y cada uno de los supuestos del cuadro 3.5, determine

a. $\lim_{h\to 0^+} \mu_{60+h}$ b. $\lim_{h\to 0^-} \mu_{60+h}$ c. $\mu_{60\frac{1}{2}}$

3.27 Si se adopta el supuesto de la fuerza constante, demuestre que

a. $a(x) = \dfrac{\left[(1-e^{-\mu})/\mu\right] - e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}$ b. $a(x) \cong \dfrac{1}{2} - \dfrac{q_x}{12}$

3.28 Si se adopta el supuesto hiperbólico (Balducci), demuestre que

a. $a(x) = -\dfrac{p_x}{q_x^2}\left[q_x + \log p_x\right]$ b. $a(x) \cong \dfrac{1}{2} - \dfrac{q_x}{6}$.

Sección 3.7

3.29 Verifique los elementos en el cuadro 3.6 para la ley de Moivre y la de Weibull.

3.30 Considere una modificación de la ley de Moivre dada por

$$s(x)=\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^{a} \qquad 0\le x<\omega, \qquad a>0.$$

Calcule

a. μ_x b. $\overset{o}{e}_x$

Sección 3.8

3.31 Usando el cuadro 3.7, determine

a. ${}_2q_{[32]+1}$ b. ${}_2p_{[31]+1}$

3.32 A la cantidad

$$1-\frac{q_{[x]+k}}{q_{x+k}}=I(x,k)$$

se le ha llamado ***índice de selección***. Cuando está cercano a 0 la indicación es que la selección se ha consumido. Del cuadro 3.7 determine el índice para $x=32,\ k=0,\ 1$.

Miscelánea

3.33 Una persona de 50 años de edad esta sujeta a un riesgo extra entre el año de edad 50 a 51. Si la probabilidad normal de muerte de la edad 50 a la 51 es 0.006, y si el riesgo extra puede expresarse como una adición a la fuerza normal de la mortalidad que disminuye uniformemente de 0.03 al principio del año a 0 al final del año, determine la probabilidad de que dicha persona sobreviva a la edad 51.

3.34 Si la fuerza de la mortalidad μ_{x+t}, $0 \le t \le 1$, (denota también como: $\mu_x(t)$) cambia a $\mu_{x+t} - c$, donde c es una constante positiva, encuentre el valor de c para el que la probabilidad de que (x) muera en el término de un año sea la mitad. Exprese la respuesta en términos de $q_{[x]}$.

3.35 A partir de una tabla de mortalidad estándar, se prepara una segunda tabla duplicando la fuerza de la mortalidad de la tabla estándar. ¿Es la tasa de mortalidad, q'_x, en cualquier edad determinada en la nueva tabla más del doble; exactamente el doble o menos que el doble de la tasa de mortalidad, q_x, de la tabla estándar ?

3.36 Si $\mu_x = Bc^x$, $c > 1$, demuestre que la función $l_x \mu_x$ tiene su máximo en la edad x_0 en donde $\mu_{x_0} = \log c$. [Sugerencia: Este ejercicio utiliza el ejercicio 3.12].

3.37 Suponga que para $\mu_x = \dfrac{Ac^x}{1 + Bc^x}$ para $x > 0$.

a. Determine la función de sobrevivencia, $s(x)$.

b. Verifique que la moda de la distribución de X, la edad al fallecimiento, esta dada por

$$x_0 = \frac{\log(\log c) - \log A}{\log c}$$

3.38 Si $\mu_x = \dfrac{3}{100 - x} - \dfrac{10}{250 - x}$ para $40 < x < 100$, calcule

a. ${}_{40}p_{50}$

b. La moda de la distribución de X ,a la edad de fallecimiento a la muerte.

3.39.

a. Demuestre que, bajo el supuesto de la distribución uniforme de fallecimientos,

$$m_x = \frac{q_x}{1-(1/2)q_x} \quad \text{y} \quad q_x = \frac{m_x}{1+(1/2)m_x}$$

b. Determine m_x en términos de q_x bajo el supuesto de la fuerza constante.

c. Determine m_x en términos de q_x bajo el supuesto hiperbólico(Balducci).

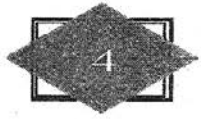
d. Si $l_x = 100 - x$ para $0 \le x \le 100$, determine ${}_{10}m_{50}$ en donde

$${}_nm_x = \frac{\int_0^n l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^n l_{x+t}dt}$$

3.40 Demuestre que k y S son independientes si y solo si la expresión

$$\frac{{}_sq_{x+k}}{q_{x+k}}$$

no depende de k para $0 \le s \le 1$.



SEGURO DE VIDA

4.1 Introducción

Hemos afirmado que los sistemas de seguros fueron establecidos para reducir el impacto financiero adverso de algunos tipos de eventos aleatorios. En estos sistemas los individuos y las organizaciones adoptan modelos de utilidad para representar preferencias, modelos estocásticos para representar impactos financieros inciertos y principios económicos para guiar el establecimiento de precios. Después del análisis de estos modelos se alcanzaron algunos acuerdos.

En el capítulo 2 desarrollamos un modelo elemental para el efecto financiero de eventos aleatorios en los que la ocurrencia y el tamaño del mismo eran inciertos. En ese modelo, el plazo de la póliza, se supuso suficientemente corto, de tal forma que pudiese ignorarse la incertidumbre del ingreso invertido de un tiempo de pago aleatorio.

En este capítulo desarrollaremos modelos para los seguros de vida diseñados para reducir el efecto financiero del evento aleatorio de muerte prematura. Debido a la naturaleza de largo plazo de estos seguros, el monto de ganancias de la inversión, hasta el tiempo del pago, proporciona un elemento significativo de incertidumbre. En realidad, habrá seguros para los que la ocurrencia y el tamaño de la reclamación son ciertas y la fecha de la reclamación es la única incertidumbre en el modelo. En los seguros de vida considerados aquí, el tamaño y la fecha del pago dependerán sólo de la fecha de la muerte del asegurado. En otras palabras, nuestro modelo se construirá en términos de funciones de T, la variable aleatoria del tiempo de vida futuro del asegurado.

No obstante que todo en este capítulo se establecerá en términos de seguros de vidas humanas, las ideas serían las mismas para otros objetos tales como equipo, maquinaria, préstamos y negocios. En realidad, el modelo general es útil para cualquier situación en la que el tamaño y la fecha de un efecto financiero pueden expresarse únicamente en términos de la fecha del evento aleatorio.

4.2 Seguros pagaderos al momento de la muerte

Como se contempla en este capítulo, el monto y la fecha de pago de las indemnizaciones de un seguro de vida dependerá solamente de la amplitud del intervalo comprendido entre la expedición del seguro y la muerte del asegurado. Nuestro modelo se desarrollará con una función de indemnización, b_t, y una función de descuento, v_t. En nuestro modelo, v_t es el factor de descuento del interés desde el tiempo de pago (al final) hasta al tiempo de expedición de la póliza (al principio), t es la amplitud del intervalo desde la expedición hasta la muerte. En el caso de dotaciones, que se cubren en esta sección, t puede ser más grande que o igual a la amplitud del intervalo desde la expedición hasta el pago.

Para la función de descuento asumiremos que la fuerza subyacente de interés es determinística, es decir, el modelo no incluye una distribución de probabilidad para la fuerza del interés. Más aún, generalmente mostraremos las fórmulas simples que resultan de suponer una fuerza de interés constante, así como determinística.

Definiremos la función del valor presente, z_t, mediante

$$z_t = b_t v_t. \tag{4.2.1}$$

Por lo tanto, z_t es el valor presente, a la expedición de la póliza, del pago de la indemnización. El tiempo transcurrido desde la expedición de la póliza hasta la muerte del asegurado es la variable aleatoria del tiempo futuro de vida del asegurado, $T = T(x)$, definida en la sección 3.2.2. Por lo tanto, el valor presente del pago a la expedición de la póliza, es la variable aleatoria z_T. Únicamente que el contexto requiera un símbolo más elaborado, denotaremos a esta variable aleatoria con Z, y fundamentaremos el modelo para el seguro en la ecuación

$$Z = b_T v_T \tag{4.2.2}$$

La variable aleatoria Z es ejemplo de una variable aleatoria de reclamación, y como tal, de un X_i plazo en la suma del modelo de riesgo individual, como se definió en (2.1.1). Este modelo se utilizará en secciones posteriores cuando consideramos aplicaciones que involucran carteras. Ahora nos dedicaremos al desarrollo del modelo de probabilidad para Z.

El primer paso en nuestro análisis del seguro de vida será definir b_t y v_t. El siguiente será determinar algunas características de la distribución de probabilidad de Z que son consecuencias de una distribución supuesta para T. Trabajaremos a través de estos pasos para varios seguros convencionales. En el cuadro 4.1 se proporciona un resumen.

4.2.1 Nivel de indemnización del seguro

Un ***seguro de vida a plazo de n años (temporal a n años)***, proporciona un pago solo si el asegurado muere dentro del plazo de n años de un seguro que comienza en su expedición. Si una unidad se pagará en el momento de la muerte de (x), entonces

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t \ge 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Estas definiciones utilizan dos convenciones. Primero, como el tiempo de vida futuro es una variable no negativa, definimos b_t, v_t y Z sólo sobre valores no negativos (0,1,2,...). Segundo, para un valor t en donde b_t es 0, el valor de v_t es irrelevante. Por lo tanto, adoptaremos definiciones de v_t a conveniencia.

Para un seguro de vida, la esperanza de la variable aleatoria del valor presente, Z, se denomina ***prima neta única***. Es neta porque no se ha recargado como se discutió en el Capítulo 1. Es única en contraste con la anual, semestral, trimestral, mensual u otras primas aceptables en la práctica de los seguros de vida.

El lector encontrará que la esperanza del valor presente de un conjunto de pagos contingentes sobre la ocurrencia de un conjunto de eventos se refiere a diferentes plazos en diferentes contextos. En el Capítulo 1, a la pérdida esperada se le denominó prima pura. Esta terminología se utiliza comúnmente en seguros sobre propiedad y obligaciones. En el Capítulo 5, la esperanza del valor presente de un conjunto de pagos contingentes para la sobrevivencia (una anualidad contingente) se denomina ***valor presente actuarial***. Ello es consistente con la terminología del plan de retiro. Aquí utilizaremos prima neta única, no obstante que cualquiera de los tres términos será apropiado.

Una expresión más exacta, pero de mayor peso sería la ***esperanza del valor presente de los pagos***. Denotaremos la prima neta única mediante sus símbolos de acuerdo a la Notación Actuarial Internacional (véase el anexo 4).

La prima neta única para el seguro temporal a n años con una unidad pagadera al momento de la muerte de (x) es $E[Z]$, denotada por $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$. Esta puede calcularse al reconocer a Z como una función de T así que $E[Z]=E[z_T]$. Después utilizamos la *f.d.p.* de T dada en (3.2.19) para obtener

$$\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = E[z_T] = \int_0^n z_t\, g(t)\,dt = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \qquad (4.2.3)$$

El momento j-ésimo de la distribución de Z puede encontrarse mediante

$$E\left[Z^j\right] = \int_0^n \left(v^t\right)^j\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt$$
$$= \int_0^n e^{-(\delta j)t}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

La segunda integral muestra que el momento j-ésimo de Z es igual a la prima neta única de un seguro temporal a n años para un monto de una unidad pagadera al momento de la muerte de (x), calculada a una fuerza de interés igual a j veces la fuerza de interés determinada, o $j\,\delta$.

Esta propiedad de los momentos de orden superior es válida, generalmente, para seguros que pagan una unidad cuando la fuerza de interés es determinística, constante o no. Estableceremos suficientes condiciones para esto en el siguiente teorema.

Teorema 4.1:

Para un seguro sobre (x), la fuerza de interés en el tiempo t (desde la expedición de la póliza) sea δ_t y sean las funciones de beneficio y de descuento b_t y v_t, respectivamente. Si $b_t^j = b_t$ para toda t, entonces $E\left[Z^j\right]$ calculada a la fuerza de interés δ_t es igual $E[Z]$ calculada a la fuerza de interés $j\delta_t$ para $j>0$. Es decir $E\left[Z^j\right]@\,\delta_t = E[Z]@\,j\delta_t$.

Demostración

$$\begin{aligned} E\left[Z^j\right] &= E\left[\left(b_T\ v_T\right)^j\right] \\ &= E\left[b_T^j\ v_T^j\right] \\ &= E\left[b_T\ v_T^j\right] \end{aligned}$$

En general,

$$v_t = \exp\left(-\int_0^t \delta_s ds\right) \tag{4.2.4}$$

en donde t es el tiempo transcurrido desde la expedición de la póliza hasta la muerte del asegurado. Elevando ambos lados de (4.2.4) a la potencia j, tenemos

$$v_t^j = \exp\left(-\int_0^t j\delta_s ds\right),$$

es decir, v_t, a la fuerza de interés $j\delta_t$.

Del Teorema 4.1 resulta que

$$Var[Z] = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)^2 \tag{4.2.5}$$

donde ${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta única para un seguro a n años plazo para una unidad calculada a la fuerza de interés 2δ.

Como se demostró, el Teorema 4.1 es para un seguro que paga la suma asegurada al momento de la muerte t. Puede extenderse a seguros en los que la suma es pagadera en un tiempo que es una función del momento de la muerte. Esto se logra al reemplazar t, en el límite superior de la integral de (4.2.4) con la función del momento de la muerte.

El ***seguro de vida entera*** prevé un pago después de la muerte del asegurado en cualquier tiempo en el futuro. Si el pago debe ser el monto de una unidad al momento de la muerte de (x), entonces

$$\begin{aligned} b_t &= 1 \qquad t \geq 0 \\ v_t &= v^t \qquad t \geq 0 \\ Z &= v^T \qquad T \geq 0 \end{aligned}$$

La prima neta única es

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \tag{4.2.6}$$

El seguro de vida entera es el caso límite del seguro temporal a n años, cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 4.1:

Considere que la *f.d.p.* del tiempo de vida futuro, T para (x) es

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80} & 0 < t < 80 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

A una fuerza de interés δ, calcule para Z (la variable aleatoria del valor presente para un seguro de vida entera de monto unitario expedido a (x)):

a. la prima neta única
b. la varianza
c. el percentil 90, $\xi_Z^{0.9}$

Solución:

a. $\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t g(t)\,dt = \int_0^{80} e^{-\delta t} \dfrac{1}{80} dt = \dfrac{1 - e^{-80\delta}}{80\delta} \quad \delta \neq 0$

b. Por el Teorema 4.1

$$Var[Z] = \frac{1 - e^{-160\delta}}{160\delta} - \left(\frac{1 - e^{-80\delta}}{80\delta} \right)^2 \quad \delta \neq 0$$

c. Para la variable aleatoria continúa, Z, tenemos

$$\Pr\left(Z \le \xi_Z^{0.9}\right) = 0.9$$

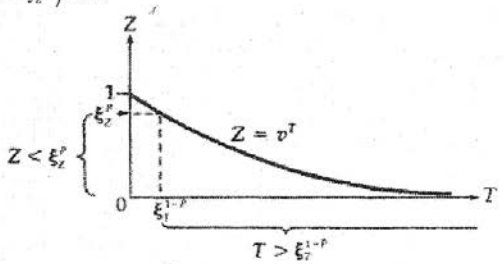


Figura 4.1 Determinación de $\xi_Z^{0.9}$

Como tenemos la *f.d.p.* para T y no para Z, procedemos encontrando el evento T que corresponda a $Z \le \xi_z^{0.9}$. La figura 4.1 muestra la relación entre el espacio muestral de T (en el eje horizontal) y el espacio muestral de Z (en el eje vertical).

Aquí $h = \xi_T^{1-P}$ es tal que

$$\Pr(T > h) = 0.9$$

$$\int_h^{80} \frac{1}{80} dt = 0.9$$

por lo tanto

$$h = 8$$

y

$$\xi_z^{0.9} = v^8$$

Volvamos ahora la atención a una aplicación común que involucra cartera de riesgos - determinando un fondo de inversión inicial para un segmento de seguros en la cartera total. Se utilizará el modelo de riesgo individual y la aproximación normal (como se discutió en la sección 2.4).

Ejemplo 4.2:

Suponga que cada una de 100 vidas independientes

- Todas tiene la misma edad x,
- Están sujetas cada una a una fuerza constante de mortalidad, $\mu = 0.04$, y
- El monto de indemnización por fallecimiento para cada uno es de 10 unidades, pagadero en el momento de la muerte.

Los pagos de indemnización serán retirados de un fondo de inversión que gana $\delta = 0.06$. Calcule el monto mínimo en $t = 0$ de tal forma que la probabilidad de que habrá suficientes fondos a la mano para retirar el pago de indemnizaciones a la muerte de cada individuo sea aproximadamente 0.95.

Solución:

Para cada vida,

$$b_t = 10 \qquad t \geq 0$$
$$v_t = v^t \qquad t \geq 0$$
$$Z = 10v^T \quad T \geq 0.$$

Si pensamos que las vidas están numeradas, quizás por el orden de expedición de las pólizas, entonces en $t=0$ el valor presente de todos los pagos que se harán es

$$S = \sum_{1}^{100} Z_j$$

donde Z_j es el valor presente en $t=0$ para el pago a realizarse a la muerte de la j-ésima vida.

Para calcular la media y la varianza, podemos utilizar el hecho de que Z es 10 veces el valor presente de la variable aleatoria para el monto unitario del seguro de vida entera. Para fuerzas constantes de interés, δ, y la mortalidad, μ, la prima neta única para el monto unitario del seguro de vida entera es:

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu} \mu \, dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}.$$

Entonces, para este ejemplo

$$E[Z] = 10\bar{A}_x = 10\frac{0.04}{0.1} = 4$$
$$E[Z^2] = 10^2 \, {}^2\bar{A}_x = 100\frac{0.04}{0.04 + 2(0.06)} = 25$$

y la $Var[Z] = 9$.

Usando estos valores para la media y la varianza de cada término en la suma para S, tenemos

$$E[S] = 100(4) = 400$$
$$Var[S] = 100(9) = 900$$

Analíticamente, el monto mínimo requerido es un número, h, tal que

$$\Pr(S \le h) = 0.95$$

o equivalentemente

$$\Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \le \frac{h - 400}{30}\right) \doteq 0.95.$$

Mediante el uso de una aproximación normal, obtenemos

$$\frac{h - 400}{30} = 1.645$$
$$h = 449.35$$

Comentarios

1. La diferencia de 49.35 entre este fondo inicial de 449.35 y la esperanza del valor presente de todos los pagos, 400, es el recargo por riesgo del Capítulo 1. El recargo es 0.4935 por vida, o 4.935% por unidad de pago, o 12.34% de la prima neta única.

2. Este ejemplo, como los ejemplos 2.2 y 2.3 utilizaron el modelo de riesgo individual y una aproximación normal a la distribución de probabilidad de S. En los ejemplos de corto plazo, se determinó que el ingreso recaudado, igual a las reclamaciones esperadas más un recargo por riesgo, tuviera una probabilidad alta de exceder las reclamaciones. En este ejemplo de seguro de vida de largo plazo, el ingreso recaudado más el ingreso por intereses a la tasa de interés asumida, se determinó que era suficiente para cubrir los pagos por indemnizaciones. El fondo inicial de 449.35 cubrirá menos del 45% del pago eventual de 1,000.

3. En la figura 4.2 se muestra la cantidad del fondo durante los dos primeros años para un patrón de pago en el que ocurre un fallecimiento en los periodos 1/8, 7/8, 9/8 13/8 y 15/8, y dos fallecimientos en el periodo 10/8. Entre los pagos de indemnización representados por las discontinuidades, están los arcos exponenciales representando el crecimiento del fondo en $\delta = 0.06$.

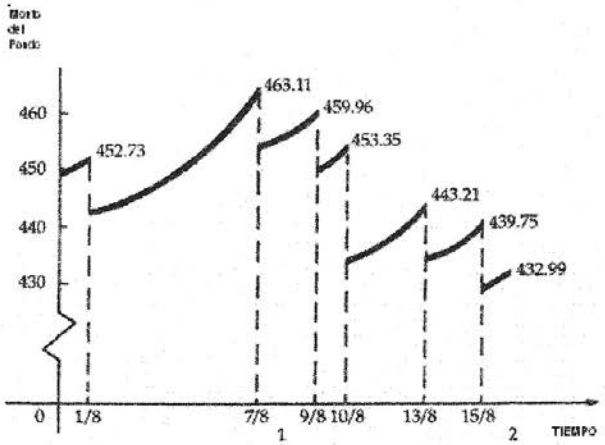


Figura 4.2 Gráfica de un resultado para el fondo.

Hay muchos patrones de pago, cada uno con su propia gráfica. Tanto el número de reclamaciones y el tiempo en que se presentan afectan al fondo. Por ejemplo, si las 7 reclamaciones hubiesen ocurrido en el primer instante, en lugar del patrón de pago de la figura 4.2, el fondo habría caído inmediatamente a 379.95 y después se hubiese incrementado a 427.72 al final del segundo año.

Estos ejemplos ilustran las diferentes aplicaciones de los tres elementos aleatorios en la construcción del modelo de riesgo, es decir, ya sea que ocurra una reclamación o no, el tamaño y el tiempo de pago de al menos una se presenta. En el ejemplo 2.2 sólo había incertidumbre acerca de la ocurrencia de la reclamación. En el ejemplo 4.2 sólo la había acerca del tiempo de la reclamación del pago. Otras incertidumbres fueron ignoradas en estos modelos. En los ejemplos 4.1 y 4.2 ignoramos la posibilidad de que el fondo ganará intereses a tasas diferentes de las deterministicas asumidas.

4.2.2. Seguro dotal puro

Una ***dotal puro a n años*** prevé un pago al final de n años si y solo si el asegurado sobrevive al menos n años desde la expedición de la póliza. Si el monto pagadero es una unidad, entonces

$$b_t = \begin{cases} 0 & t \le n \\ 1 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^n \qquad t \ge 0$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T \le n \\ v^n & t > n \end{cases}$$

El único elemento de incertidumbre en el dotal puro es si ocurrirá o no la reclamación. El tamaño y el tiempo del pago, si ocurre una reclamación, están predeterminados. La prima neta única se denota como $A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}$. En la expresión $Z = v^n \Upsilon$, Υ es el indicador del evento de la sobrevivencia a la edad $x+n$. Esta Υ tiene el valor 1 si el asegurado sobrevive a la edad $x+n$ y 0 en otro caso. La prima neta única es

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = E[Z] = v^n E[\Upsilon] = v^n\ {}_np_x$$

y

$$Var[Z] = v^{2n}\ Var[\Upsilon] = v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x \qquad (4.2.7)$$

$$= {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} - \left(A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}\right)^2$$

Un ***seguro dotal de n años*** prevé una cantidad pagadera ya sea después de la muerte del asegurado o a la sobrevivencia del mismo al final del plazo de n años; lo que ocurra primero. Si el seguro es por el monto de una unidad y el beneficio por fallecimiento es pagadero en el momento de la muerte, entonces

$$b_t = 1 \qquad t \ge 0$$

$$v_t = \begin{cases} v^t & t \le n \\ v^n & t > n \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \le n \\ v^n & T > n. \end{cases}$$

La prima neta única se denota por $\overline{A}_{x:\overline{n}|}$.

Este seguro puede ser visto como la combinación de un seguro temporal a n años y de un dotal puro a n años, cada una por el monto de una unidad. Permitamos que Z_1, Z_2, y Z_3 representen el valor presente del plazo de las variables aleatorias, el dotal puro y el seguro dotal, respectivamente, con indemnizaciones pagaderas al momento de la muerte de (x). De las definiciones precedentes tenemos

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & T \le n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} v^T & T \le n \\ v^n & T > n. \end{cases}$$

se sigue que

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 \tag{4.2.8}$$

y tomando esperanzas en ambos lados

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \overline{A}^{\frac{1}{}}_{x:\overline{n}|} \tag{4.2.9}$$

Como $b_t = 1$ para el seguro dotal, tenemos mediante el Teorema 4.1,

$$E\left[Z_3^I\right]@\delta = \mathrm{E}[Z_3]@j\ \delta$$

Más aún,

$$Var[Z_3] = {}^{2}\overline{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)^2. \tag{4.2.10}$$

También podemos encontrar la $Var[Z_3]$ utilizando (4.2.8),

$$Var[Z_3] = Var[Z_1] + Var[Z_2] + 2Cov[Z_1, Z_2]. \tag{4.2.11}$$

Mediante el uso de la fórmula

$$Cov[X, \Upsilon] = E[X\Upsilon] - E[X]E[\Upsilon] \tag{4.2.12}$$

y la observación de que

$$Z_1 Z_2 = 0$$

para toda T, tenemos

$$Cov[Z_1, Z_2] = -E[Z_1]E[Z_2] = -\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\ \bar{A}^{\frac{1}{}}_{x:\overline{n}|}. \qquad (4.2.13)$$

Sustituyendo (4.2.5), (4.2.7) y (4.2.13) en (4.2.11) produce una fórmula para la $Var[Z_3]$ en términos de primas netas únicas para un seguro de plazo a n años y un dotal puro.

Como las primas netas únicas son positivas, la $Cov[Z_1, Z_2]$ es negativa. Esto debía anticiparse ya que del par Z_1 y Z_2, uno es siempre 0 y el otro es positivo. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Z_1 y Z_2 no es -1 porque no son funciones lineales una de la otra.

4.2.3. Seguro diferido

Un ***seguro diferido m años*** prevé una indemnización después de la muerte del asegurado sólo si el asegurado muere al menos m años después de la expedición de la póliza. La indemnización pagadera y el plazo del seguro puede ser cualquiera de los mencionados anteriormente. Por ejemplo, un seguro de vida entera diferido a m años con un monto unitario pagadero al momento del fallecimiento tiene

$$b_t = \begin{cases} 1 & t > m \\ 0 & t \le m \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t > 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T > m \\ 0 & T \le m \end{cases}$$

La prima neta única se denota por ${}_{m|}\bar{A}_x$ y es igual a

$$\int_m^{\infty} v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt. \qquad (4.2.14)$$

Ejemplo 4.3

Considere un seguro de vida entera diferido a 5 años pagadero al momento de la muerte de (x). El individuo está sujeto a una fuerza constante de mortalidad $\mu = 0.04$. Para la distribución del valor presente del pago del beneficio considere una tasa instantánea de interés $\delta = 0.10$, determine la

a. esperanza
b. varianza
c. mediana $\xi_Z^{0.05}$.

Solución

a. Para fuerzas arbitrarias μ y δ,

$$ {}_{s|}\overline{A}_x = \int_s^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu \, dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} e^{-s(\mu+\delta)}, $$

por tanto para $\mu = 0.04$ y $\delta = 0.10$,

$$ {}_{s|}\overline{A}_x = \frac{2}{7} e^{-0.7} = 0.1419. $$

b. Por el Teorema 4.1

$$ Var[Z] = \frac{0.04}{0.04+0.20} e^{-5(0.04+0.20)} - \frac{4}{49} e^{-1.4} = 0.0301. $$

c. Al igual que en el ejemplo 4.1, una gráfica de la relación entre Z y T proporciona un perfil de la solución. En la figura 4.3 se gráfica el periodo diferido de m años en general y para el caso cuando $\Pr(T \le m) < 0.5$.

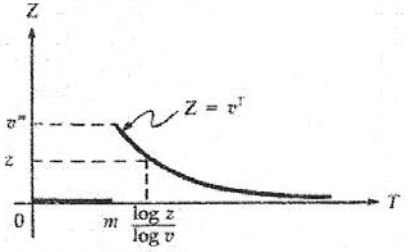


Figura 4.3 Determinación de la Mediana

Mientras que T es una variable aleatoria continúa, Z está mezclada con una masa de probabilidad en 0 porque $Z = 0$ corresponde a $T \le m$. Si $\Pr(Z = 0) \ge 0.5$, entonces $\xi_z^{0.5} = 0$, de otra manera $\xi_z^{0.5}$ es la solución de

$$ \Pr\left(Z \le \xi_Z^{0.05}\right) = 0.5 \qquad (4.2.15) $$

En este ejemplo

$$\Pr(Z=0)=\Pr(T\le 5)=\int_0^5 e^{-0.04t}0.04\,dt=1-e^{-0.2}=0.1813,$$

por lo tanto $\xi_Z^{0.05}$ no es 0 y podemos escribir (4.2.15) en la forma

$$\Pr(Z=0)+\Pr\left(0<Z\le\xi_Z^{0.05}\right)=0.5,$$

y después reducirla a

$$\Pr\left(0<Z\le\xi_Z^{0.05}\right)=0.3187.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\Pr\left(v^T<\xi_Z^{0.05}\right)=0.3187$$

que puede transformarse a

$$\Pr\left(T>\frac{\log\xi_Z^{0.05}}{\log v}\right)=0.3187$$

Por lo tanto buscamos una h tal que

$$\begin{aligned} {}_hp_x &= 0.3187 \\ e^{-0.04h} &= 0.3187, \\ h &= \frac{\log(0.3187)}{-0.04} \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\log\xi_Z^{0.05}}{\log v}=\frac{\log(0.3187)}{-0.04}$$

y por tanto

$$\xi_Z^{0.05}=(0.3187)^{\delta/0.04}=0.0573$$

En este ejemplo el valor más grande de Z con probabilidad de densidad distinta de cero, en este ejemplo es $e^{-0.1(5)}=0.6065$, correspondiente a $T=5$. Mediante un desarrollo similar al utilizado para encontrar la mediana, puede demostrarse que

$$F(y)=\Pr(Z\le y)=0.1813+y^{0.4},\ \text{para}\quad 0<y\le 0.6065.$$

Entonces la función de densidad de probabilidad es $0.4y^{-0.6}$, $0 < y \leq 0.6065$. En la figura 4.4 se presenta un diagrama de la distribución de Z. El espacio sombreado en forma de clavo representa la masa de probabilidad en $Z = 0$, su valor es 0.1813, y no debe leerse de la escala del eje vertical ya que sólo aplica a la *f.d.p.* en $y > 0$.

En este ejemplo la distribución de Z está muy sesgada a la derecha. Mientras que su masa total está en el intervalo $[0, 0.6065]$ y su media es 0.1419, su mediana es solo 0.0573. Esta asimetría en dirección de valores positivos más grandes es característica de muchas distribuciones de reclamaciones en todos los campos del seguro.

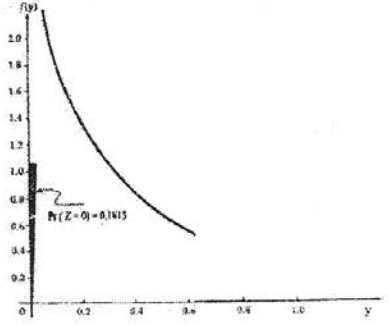
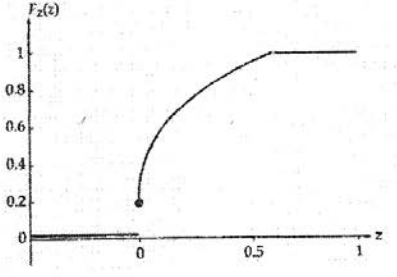


Figura 4.4. Distribución de Z



De la gráfica anterior, observamos que la mediana es la solución de $0.5 = 0.1813 + z^{0.4}$, con $\xi_Z^{0.05} = 0.0573$.

4.2.4 Seguro de beneficio variable

El modelo general dado por (4.2.1) puede utilizarse para el análisis en la mayoría de las aplicaciones. Lo hemos utilizado en seguros de vida con nivel de indemnización fijo. También puede aplicarse a aquellos, en los que el nivel de indemnización por fallecimiento puede incrementarse o disminuir en progresión aritmética, durante todo el plazo del seguro o una parte del mismo. A menudo, dichos seguros se venden como una indemnización adicional cuando un seguro base prevé el pago de primas periódicas al fallecimiento o cuando un contrato anual contiene una garantía de pagos suficientes para igualar la prima inicial.

Un ***seguro de vida entera creciente*** que prevé el pago de 1 al momento del fallecimiento dentro del primer año, 2 al momento del fallecimiento en el segundo año y así sucesivamente se caracteriza por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} b_t &= [t+1] \qquad t \geq 0 \\ v_t &= v^t \qquad t \geq 0 \\ Z &= [T+1]v^T \qquad T \geq 0. \end{aligned}$$

Los corchetes [ ] denotan la función *entera más grande*,

$$[t] = k \qquad k \leq t < k+1,\ k = 0,\ \pm 1, \ldots$$

La prima neta única para ese tipo de seguro es

$$\left(I\bar{A}\right)_x = E[Z] = \int_0^\infty [t+1] v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt\ .$$

Los momentos de orden superior no son iguales a la prima neta única a una fuerza de interés ajustada, como fue el caso para los seguros con pagos de indemnizaciones fijas. Estos momentos pueden calcularse directamente a partir de sus definiciones.

Los incrementos en la indemnización del seguro pueden ocurrir con mayor frecuencia que una vez al año. Para un seguro de vida entera creciente mensualmente la indemnización sería $1/m$ al momento del fallecimiento durante el primer mes del año del plazo del seguro, $2/m$ al momento del fallecimiento durante el segundo mes del año durante el plazo del seguro y así sucesivamente creciendo $1/m$ a intervalos mensuales durante todo el plazo del seguro. Para tal tipo de seguro de vida entera, las funciones son:

$$b_t = \frac{\lceil t\,m+1 \rceil}{m} \qquad t \geq 0$$
$$v_t = v^t \qquad t \geq 0$$
$$Z = \frac{v^T \lceil Tm+1 \rceil}{m} \qquad T \geq 0$$

La prima neta única es

$$\left(I^{(m)}\overline{A}\right)_x = E[Z].$$

El caso límite, a medida que $m \to \infty$ en el seguro de vida creciente mensualmente, es un pago t del seguro al momento del fallecimiento, t. Sus funciones son

$$b_t = t \qquad t \geq 0$$
$$v_t = v^t \qquad t \geq 0$$
$$Z = Tv^t \qquad T \geq 0.$$

Su símbolo de la prima neta única es $\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x$.

Este seguro de vida entera continuamente creciente es equivalente a un conjunto de seguros de vida entera de nivel diferido. Esta equivalencia se demuestra gráficamente en la figura 4.5 en donde la región entre la línea $b_t = t$ y el eje de las t representan el seguro a lo largo del tiempo futuro de vida. Si se juntan las regiones infinitesimales en dirección vertical para una t fija, se obtiene la indemnización total pagadero en t. Si se juntan en dirección horizontal para una s fija, se obtiene un seguro de vida entera diferido a s años por el monto del nivel ds.

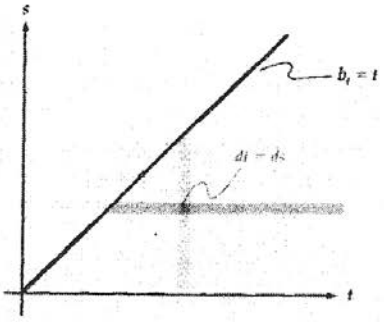


Figura 4.5 Seguro creciente continuamente

Esta equivalencia implica que las primas netas únicas para las coberturas son iguales. La igualdad puede establecerse de la siguiente forma.

Por definición

$$\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x = \int_0^\infty t\, v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt\,,$$

e interpretando t en la integrante como la integral de 0 a t en la figura 4.5 tenemos

$$\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x = \int_0^\infty \left(\int_0^t ds\right) v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

Si cambiamos el orden de la integración y, para cada valor de s, integramos en t de s a ∞, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x &= \int_0^\infty \int_s^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt\, ds,\\ &= \int_0^\infty {}_s|\overline{A}_x\, ds\end{aligned}$$

por (4.2.14).

Si, para cualquiera de estos seguros de vida crecientes mensualmente, el beneficio es pagadero sólo si ocurre el fallecimiento dentro de un plazo de n años, el seguro es un seguro de vida creciente a n años.

El complemento del seguro de vida creciente a n años es el ***seguro de vida decreciente a n años*** que prevé un pago de n al momento de la muerte durante el primer año, $n-1$ al momento de la muerte durante el segundo año y así sucesivamente y la cobertura termina al final del enésimo año.

Ese tipo de seguro tiene las siguientes funciones:

$$b_t = \begin{cases} n-[t] & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t > 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T\left(n-[T]\right) & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

La prima neta única para este seguro es

$$\left(D\overline{A}\right)^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\left(n-[t]\right)_t p_x \, \mu_{x+t} \, dt.$$

Este seguro es complementario al seguro creciente a n años en el sentido de que la suma de sus funciones de beneficio es la constante $n+1$ para el enésimo año del plazo.

El cuadro 4.1 es un resumen de los modelos de esta sección. El nombre del plan del seguro aparece en la primera columna seguido por las funciones de beneficio y de descuento que lo definen en términos del tiempo futuro de vida del asegurado a la expedición de la póliza. Después se presenta la función de valor presente, que siempre se deriva como el producto de las funciones anteriores. En la quinta columna se muestra la Notación Actuarial Internacional. En la última columna, se hace referencia a una nota de pie de página que establece si el teorema 4.1 puede o no utilizarse para calcular los momentos de orden superior.

Cuadro 4.1
Resumen de seguros pagaderos inmediatamente (al instante) al (del) fallecimiento

(1) Nombre del Seguro	(2) Función de Beneficios b_t	(3) Función de Descuento v_t	(4) Función de Valor Presente z_t	(5) Prima Neta Única	(6) Momento Superior
Vida Entera	1	v^t	v^t	$\bar{A}_x$	*
Temporal a n años	$1 \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	v^t	$v^t \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}$	*
Dotal puro a n años	$0 \quad t \le n$ $1 \quad t > n$	v^n	$0 \quad t \le n$ $v^n \quad t > n$	$A_{x:\overline{n}\rceil}$ ó $\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}$	*
Dotal a n años	1	$v^t \quad t \le n$ $v^n \quad t > n$	$v^t \quad t \le n$ $v^n \quad t > n$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	*
Temporal a n años, diferido m años	$1 \quad m < t \le n+m$ $0 \quad t \le m, \ t > n+m$	v^t	$v^t \quad m < t \le n+m$ $0 \quad t \le m, \ t > n+m$	${}_{m\|n}\bar{A}_x$	*
Creciente anual Temporal n años	$[t+1] \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	v^t	$[t+1]v^t \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	$\left(I\bar{A}\right)^1_{x:\overline{n}\rceil}$	†
Decreciente anual Temporal n años	$n-[t] \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	v^t	$(n-[t])v^t \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	$\left(D\bar{A}\right)^1_{x:\overline{n}\rceil}$	†
Vida Entera Creciente Mensual	$\dfrac{[t\,m+1]}{m}$	v^t	$\dfrac{v^t[t\,m+1]}{m}$	$\left(I^{(m)}\bar{A}\right)_x$	†

b_t, v_t y z_t están definidas únicamente para $t \ge 0$.

*. El momento j-ésimo es igual a la prima neta única a j veces la fuerza de interés dada, denotada por ${}^jA$ para $j>1$. Entonces la varianza es ${}^2A - A^2$, simbólicamente.

†. Determinada directamente a partir de la definición. $E\left[Z^t\right]$.

4.3 Seguros pagaderos al final del año del fallecimiento

En la sección anterior desarrollamos modelos para seguros de vida con beneficios por fallecimiento pagaderos al momento de la muerte. En la práctica, este es el tiempo de pago para casi todos los seguros. Los modelos fueron construidos en términos de T, el tiempo futuro de vida del asegurado a la expedición de la póliza. En la mayoría de las aplicaciones del seguro de vida, la mejor información disponible sobre la distribución de probabilidad de T tiene la forma de una tabla de mortalidad discreta, es decir, la distribución de probabilidad de K, el tiempo de vida futuro truncado del asegurado a la expedición de la póliza es una función de T. En esta y en la siguiente sección cruzaremos esta brecha mediante la construcción de modelos para seguros de vida en los que el tamaño y tiempo del pago de los beneficios al faliecimiento dependen únicamente del número de años completos vividos por el asegurado desde la expedición de la póliza hasta el tiempo de su fallecimiento. Nos referiremos simplemente a estos seguros como ***pagaderos al final del año del fallecimiento.***

Nuestro modelo estará en términos de las funciones del tiempo futuro de vida truncado del asegurado. La función de beneficio, b_{k+1}, y la función de descuento, v_{k+1}, serán, respectivamente, el monto del beneficio pagadero y el factor de descuento requerido para el periodo desde el momento del pago a la expedición de la póliza, cuando el tiempo futuro de vida truncado del asegurado es k, es decir, cuando el asegurado muere en el año $k+1$ del seguro. El valor presente, a la expedición de la póliza, de este pago de beneficio, denotada por z_{k+1}, es

$$z_{k+1} = b_{k+1} v_{k+1} \tag{4.3.1}$$

Al momento de la expedición de la póliza, el año del fallecimiento del seguro es 1 más la variable aleatoria del tiempo futuro de vida truncado, K, definida en la sección 3.2.3. Al igual que en la sección anterior, denotaremos la variable aleatoria del valor presente Z_{k+1}, con Z.

Para un seguro temporal a n años que proporciona el monto de una unidad al final del año del fallecimiento, tenemos

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \textit{en} \text{ otro caso} \end{cases}$$

La prima neta única para este seguro está dada por

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \tag{4.3.2}$$

El Teorema 4.1, con los cambios en notación apropiados, también se mantiene para los seguros pagaderos al final del año del fallecimiento.

Por ejemplo, para el seguro anterior temporal a n años,

$$Var[Z] = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} - \left(A^{1}_{x:\overline{n}|}\right)^2$$

en donde

$${}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\,\delta\,(k+1)} \, {}_kp_x \, q_{x+k}$$

Para un seguro de vida entera expedido a (x), el modelo puede obtenerse dejando $n \to \infty$ en el modelo para el seguro temporal a n años. Para la prima neta única tenemos

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k}. \tag{4.3.3}$$

Multiplicando ambos lados de (4.3.3) por l_x se genera

$$l_x \, A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, d_{x+k}. \tag{4.3.4}$$

La ecuación (4.3.4) muestra el balance, al tiempo de expedición de la póliza, entre el fondo agregado de primas netas únicas para l_x vidas aseguradas a la edad x y el flujo de fondos de acuerdo a sus muertes esperadas. Es una ecuación de interés compuesto del valor establecido sobre la base del valor esperado.

La expresión,

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k}, \tag{4.3.5}$$

es esa parte del fondo a la expedición que, junto con el interés a la tasa asumida, proveerá los pagos para las muertes esperadas después del r-ésimo año del seguro.

La acumulación de (4.3.5) a la tasa de interés asumida para r años produce

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k-r+1} d_{x+k}, \tag{4.3.6}$$

la cantidad esperada en el fondo después de r años del seguro. La comparación entre la expresión (4.3.6) con (4.3.4) demuestra que es ${}_{r}V A_{x+r}$. La diferencia entre esta cantidad y el fondo real se debe a desviaciones de los fallecimientos reales de los esperados (de acuerdo a la tabla de mortalidad adoptada), y a las desviaciones entre el ingreso real de los intereses del ingreso por intereses a la tasa asumida.

Ejemplo 4.4:

Un grupo de 100 hombres de edad 30 años, establecen un fondo para pagar en caso de fallecimiento por integrante 1,000 unidades monetarias al final del año del fallecimiento a su beneficiario designado. Su acuerdo mutuo es integrar el fondo con una cantidad igual a la prima neta única del seguro de vida entera calculado sobre la base de la Tabla de mortalidad Total para Hombres: E.U.A., 1979-1981, al 6% de interés.

Bajo los supuestos anteriores, supongamos que estos mismos individuos no fueron seleccionados por una compañía aseguradora y éstos decidieron constituir una mutualidad, utilizando para tal efecto la tabla de población para hombres como base para su plan, es decir, para la constitución de su fondo, en el tiempo se sabe que la experiencias real con afectación al fondo es una muerte en el segundo y el quinto año; el ingreso por intereses fue de 6% en el primer año, 6 1/2% en el segundo y tercero, 7% en el cuarto y quinto años.

¿Cual es la diferencia, al final de los primeros cinco años entre el tamaño esperado del fondo como se determinó al concebirse el plan inicial por una compañía de seguros y el fondo real por la mutualidad?

Solución

Sobre las bases acordadas por una compañía de seguros $1000A_{30} = 115.18$, por tanto para las 100 vidas, el fondo empieza (se constituye) en 11,518.

Se sabe que a edad 35 la prima neta única por unidad monetaria es $A_{35} = 0.1445842$ y $l_{35}/l_{30} = 0.9902582$.

Para las 100 vidas de edad 30 años, el tamaño esperado del fondo después de 5 años es:

$$(1,000)(100)\ \frac{l_{35}}{l_{30}} A_{35} = 14,317.57.$$

El desarrollo del fondo real en el transcurso del tiempo para la mutualidad es el siguiente:

$$F_0 = 11,518$$
$$F_1 = (11,518.00)(1.06) = 12,209.08$$
$$F_2 = (12,209.08)(1.065) - 1000 = 12,002.67$$
$$F_3 = (12,002.67)(1.065) = 12,782.84$$
$$F_4 = (12,782.84)(1.07) = 13,677.64$$
$$F_5 = (13,677.64)(1.07) - 1000 = 13.635.07$$

Donde F_k denota su tamaño al final del año del seguro k:

Por tanto la diferencia entre la compañía de seguros y la mutualidad es 14,317.57 – 13,635.07 = 682.50. Este es un resultado agregado en el sentido de que combina la experiencia de inversión y la experiencia de mortalidad para el periodo de 5 años. Hubo ganancias de las utilidades de la inversión en exceso de la tasa asumida de 6%. Por otra parte, hubo pérdidas en la experiencia de la mortalidad de 2 fallecimientos si se compara con el número esperado de 0.9742. La interpretación de dicho resultado en términos de las diversas fuentes tales como las utilidades de la inversión, la mortalidad etc., es una de las responsabilidades de la práctica actuarial.

El seguro dotal a n años por la cantidad de una unidad pagadera al final del año del fallecimiento es una combinación del seguro temporal a n años de esta sección y la dotación pura a n años por la cantidad de una unidad que se discutió en la sección anterior. Por lo tanto sus funciones son

$$b_{k+1} = 1 \qquad k = 0,1,\ldots$$

$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1} & k = 0,1,\ldots,n-1 \\ v^n & k = n,n+1,\ldots \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0,1,\ldots,n-1 \\ v^n & K = n,n+1,\ldots \end{cases}$$

La prima neta única es

$$A_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} + v^n\, {}_np_x \tag{4.3.7}$$

El seguro creciente de vida entera, que paga $k+1$ unidades al final del año del seguro $k+1$, siempre y cuando el asegurado muera en ese año del seguro, tiene las siguientes variables aleatorias de beneficios, descuento y valor presente:

$$b_{K+1} = K+1 \qquad K = 0,1,2,\ldots$$

$$v_{K+1} = v^{K+1} \qquad K = 0,1,2,\ldots$$

$$Z = (K+1)v^{K+1} \quad K = 0,1,2,\ldots$$

La prima neta única está denotada por $(IA)_x$.

El seguro decreciente temporal a n años, durante el periodo del n-ésimo año, proporciona un beneficio al final del año del fallecimiento en una cantidad igual a $n-k$ en donde k es el número de años completos vividos por el asegurado desde la expedición de la póliza. Sus funciones son

$$b_{k+1} = \begin{cases} n-k & k = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & k = n,n+1,\ldots \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1} \qquad k = 0,1,\ldots$$

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1} & K = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & K = n,n+1,\ldots \end{cases}$$

El símbolo de la prima neta única para este seguro es $(DA)^1_{x\overline{n}|}$.

Como se ilustró en la figura 4.5 para seguros pagaderos al momento del fallecimiento, los seguros crecientes pagaderos al final del año del fallecimiento son equivalentes a una combinación de seguros diferidos, cada uno por el monto de una unidad. Igualmente, los seguros de plazos decrecientes son equivalentes a una combinación de seguros de plazos fijos de diferentes plazos. La figura 4.6 ilustra esto para un seguro decreciente a 8 años de plazo.

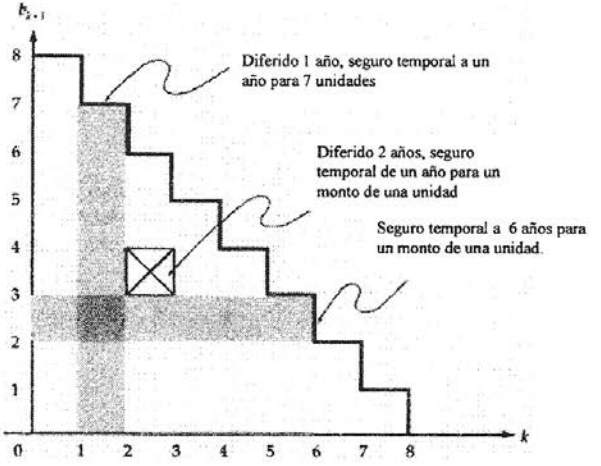


Figura 4.6 Seguro decreciente a 8 años de plazo

Esta muestra la gráfica de la función de beneficio b_{K+1}. Cada unidad en forma de cuadro entre los escalones horizontales y el eje de las k representa un seguro diferido temporal un año. Cuando estos se suman verticalmente, se obtienen los seguros diferidos temporal a un año para las cantidades decrecientes. Cuando los cuadros se suman horizontalmente, se obtienen los seguros a plazo de cantidad fija, de duración variable. En la figura 4.6 también se indican estas sumas verticales y horizontales.

La igualdad de las primas netas únicas para la combinación de los seguros a plazo fijo y la combinación de los seguros a plazo diferido pueden demostrarse analíticamente. Por tanto, por la definición

$$
\begin{aligned}
(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\ {}_{k}p_x\ q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(v^{k}\ {}_{k}p_x\right)\left(v\ q_{x+k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ {}_{k|}A^{1}_{x:\overline{1}|}
\end{aligned}
\tag{4.3.8}
$$

el total de las sumas de la columna.

En (4.3.8) podemos sustituir

$$n-k = \sum_{j=0}^{n-k-1}(1)$$

para obtener

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1}(1)\ v^{k+1}\ {}_{k}p_x\ q_{x+k}$$

Cambiando el orden de las sumas obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(1)\ v^{k+1}\ {}_{k}p_x\ q_{x+k}$$

y después comparando la suma interna a (4.3.2) podemos expresar

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1}A^{1}_{x:\overline{n-j}|}$$

El cuadro 4.2 constituye un resumen de funciones y símbolos para los seguros elementales pagaderos al final del año del fallecimiento que hemos discutido en esta sección.

Cuadro 4.2
Resumen de seguros pagaderos al final del año del fallecimiento

(1) Nombre del Seguro	(2) Función de Beneficios b_{k+1}	(3) Función de Descuento v_{k+1}	(4) Función de Valor Presente z_{k+1}	(5) Prima Neta Única	(6) Momento Superior
Vida Entera	1	v^{k+1}	v^{k+1}	A_x	*
Temporal a n años	1 $k=0,1,\ldots n-1$ 0 $k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1}	v^{k+1} $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $k=n,n+1,\ldots$	$A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	*
Dotal a n años	1	v^{k+1} $k=0,1,\ldots,n-1$ v^{n} $k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1} $k=0,1,\ldots,n-1$ v^{n} $k=n,n+1,\ldots$	$A_{x:\overline{n}\rceil}$	*
Temporal a n años, diferido m años	1 $k=m,m+1,\ldots,m+n-1$ 0 $k=0,\ldots,m-1$ $k=m+n,\ldots$	v^{k+1}	v^{k+1} $k=m,m+1,\ldots,m+n-1$ 0 $k=0,\ldots,m-1$ $k=m+n,\ldots$	${}_{m\|}A_x$	*
Creciente anual Temporal n años	$k+1$ $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1}$ $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $k=n,n+1,\ldots$	$(IA)^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	†
Decreciente anual Temporal n años	$n-k$ $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1}	$(n-k)v^{k+1}$ $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $k=n,n+1,\ldots$	$(DA)^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	†
Vida Entera Creciente	$k+1$ $k=0,1,\ldots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1}$ $k=0,1,\ldots$	$(IA)_x$	†

$b_{k+1}, v_{k+1}, z_{k+1}$ Están definidos para valores no negativos enteros de k

* . El teorema 4.1 se mantiene, por lo tanto $Var[Z] = {}^{2}A - A^{2}$, simbólicamente.

† . El teorema 4.1 no se mantiene.

4.4. Relaciones entre seguros pagaderos al momento del fallecimiento y al final del mismo año.

Empezaremos el estudio de estas relaciones con un análisis de la prima neta única para el seguro de vida entera que paga una unidad de beneficio al momento del fallecimiento. De (4.2.6) tenemos

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 v^{k+s} \, {}_{k+s}p_x \, \mu_{x+k+s} \, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \int_0^1 v^{s-1} \, {}_sp_{x+k} \, \mu_{x+k+s} \, ds. \end{aligned} \qquad (4.4.1)$$

La integral de (4.4.1) puede expresarse en funciones discretas de tablas de mortalidad adoptando uno de los supuestos acerca de la forma de la función de mortalidad entre enteros como se discutió en la sección 3.6.

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos sobre el año de edad,

$$ {}_sp_{x+k} \, \mu_{x+k+s} = q_{x+k} \qquad 0 \le s \le 1$$

que puede aplicarse en (4.4.1) para obtener

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x q_{x+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s} \, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \, \bar{s}_{\overline{1}|} = \frac{i}{\delta} A_x \end{aligned} \qquad (4.4.2)$$

Esta ecuación podría haberse obtenido bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos entre edades enteras. El efecto del supuesto es hacer la unidad pagadera al momento del fallecimiento equivalente a una unidad pagadera continuamente durante todo el año del fallecimiento. Con respecto al interés, una unidad pagadera continuamente durante todo el año es equivalente a i/δ al final del año.

La identidad en (4.4.2) puede alcanzarse utilizando las propiedades de la variable aleatoria del tiempo futuro de vida bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos, como se desarrolló en la sección 3.6. De (3.6.1) escribimos $T = K + S$ en donde S es la variable aleatoria de la ***fracción del año que se vivió en el año de la muerte.*** Observamos que, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos, K y S son independientes y S tiene una distribución uniforme sobre el intervalo unitario. Como corolarios a estas observaciones, $K+1$ y $1-S$ también son independientes, y $1-S$ tiene una distribución uniforme sobre el intervalo unitario. En la identidad

$$\bar{A}_x = E\left[v^T\right] = E\left[v^{K+1}(1+i)^{1-S}\right]$$

podemos usar la independencia de $K+1$ y $1-S$ para calcular la esperanza del producto como el producto de las esperanzas,

$$E\left[v^{K+1}(1+i)^{1-S}\right] = E\left[v^{K+1}\right]E\left[(1+i)^{1-S}\right] \qquad (4.4.3)$$

El primer factor del lado derecho es A_x. Como $1-S$ tiene la distribución uniforme sobre el intervalo unitario, el segundo factor es

$$E\left[(1+i)^{1-S}\right] = \int_0^1 (1+i)^t \, 1 \, dt = \frac{i}{\delta}$$

Por lo tanto $\bar{A}_x = (i/\delta)A_x$, bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos.

En la sección 3.6 también discutimos el supuesto que la fuerza de mortalidad es constante entre edades enteras. La interrelación entre la prima neta única para toda la vida del asegurado pagadera al momento de su muerte y en el extremo del año de la muerte, bajo ese supuesto se desarrollará en el ejercicio 4.16. Ya que el supuesto de Balducci implica que la fuerza de mortalidad decrece con los años de edad (ver ejercicio 3.22), no es muy realista para las vidas humanas. Además conduce a una interrelación más complicada que no se desarrollará aquí.

Ahora regresemos a un análisis del seguro que se incrementa anualmente en un plazo de n años pagadero en el momento del fallecimiento. Para este seguro, el valor presente de la variable aleatoria es

$$Z = \begin{cases} \lceil T+1 \rceil v^T & T < n \\ 0 & T \geq n. \end{cases}$$

Ya que $[T+1]=K+1$, podemos usar la relación $T=K+S$ para obtener

$$Z=\begin{cases}(K+1)v^{K+1}\ v^{S-1} & T<n\\ 0 & T\geq n.\end{cases}$$

Ahora si W fuera el valor presente neto de la variable aleatoria para el seguro que se incrementa anualmente en un plazo de n años pagadero al final del año del fallecimiento,

$$W=\begin{cases}(K+1)v^{K+1} & K=0,1,\ldots,n-1\\ 0 & K=n,n+1,\ldots\end{cases}$$

Entonces

$$Z=W(1+i)^{1-S}$$

y

$$E[Z]=E\left[W(1+i)^{1-S}\right].$$

Ya que W es función sólo de $K+1$ y, $K+1$ y $1-S$ son independientes,

$$\begin{aligned}E[Z]&=E[W]E\left[(1+i)^{1-S}\right]\\ &=(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}\ \frac{i}{\delta}\end{aligned}$$

Estos resultados para los seguros de vida entera y temporales creciente son muy similares, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos durante el año de edad

$$\bar{A}_x=\frac{i}{\delta}A_x$$

y

$$\left(I\,\bar{A}\right)^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$$

Miremos ahora, en el modelo general para encontrar las bases de las similitudes. De (4.2.2),

$$Z=b_T v_T \qquad (4.4.4)$$

Para los dos seguros anteriores las condiciones usadas fueron

- $v_T = v^T$, y
- b_T fue función sólo de la parte entera de T, el tiempo de vida futuro truncado, K.

Escribiendo esta última propiedad como $b_T = b^*_{K+1}$ podemos escribir (4.4.4) como

$$\begin{aligned} Z &= b^*_{K+1} v^T \\ &= b^*_{K+1} v^{K+1} (1+i)^{1-S} \end{aligned}$$

y

$$E[Z] = E\left[b^*_{K+1}\, v^{K+1} (1+i)^{1-S} \right] \tag{4.4.5}$$

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos durante el año de edad, podemos inferir la independencia de K y S y que $1-S$ también tiene una distribución uniforme. Entonces podemos escribir (4.4.5) como

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[b^*_{K+1}\, v^{K+1} \right] E\left[(1+i)^{1-S} \right] \\ &= E\left[b^*_{K+1}\, v^{K+1} \right] \frac{i}{\delta}. \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Ejemplo 4.5:

Calcule la prima neta única y la varianza para un seguro dotal a 30 años, con suma asegurada involucrada de 10,000 unidades monetarias al momento del fallecimiento y edad de contratación 35 años. Use la tabla de mortalidad ilustrativa, la suposición de distribución uniforme de fallecimientos y considere $i = 0.06$. (Entonces ${}^{2}\overline{A}^{1}_{35:\overline{30}|} = 0.0309294$.)

Solución:

Para el seguro dotal, $v_T \neq v^T$. Por lo tanto no podemos aplicar (4.4.6) directamente. Recordando (4.2.8), la cual muestra el seguro dotal como la suma de un seguro temporal y un dotal puro, podemos aplicar (4.4.6) al componente de seguro temporal y luego calculamos la parte del seguro dotal puro. Después, usando (4.2.9) y (4.2.10) podemos calcular la prima neta única como sigue:

$$\begin{aligned}\overline{A}_{35:\overline{30}|} &= \frac{i}{\delta} A^{1}_{35:\overline{30}|} + A_{35:\overline{30}|^{1}} \\ &= (1.0297087)\left[A_{35} - (1.06)^{-30} \frac{l_{65}}{l_{35}} A_{65} \right] + (1.06)^{-30} \frac{l_{65}}{l_{35}} \\ &= 0.208727,\end{aligned}$$

y la varianza como

$$\begin{aligned}Var[Z] &= {}^{2}\overline{A}_{35:\overline{30}|} - (\overline{A}_{35:\overline{30}|})^{2} \\ &= 0.0309294 + (1.1236)^{-30} \frac{l_{65}}{l_{35}} - (0.208727)^{2} \\ &= 0.011606.\end{aligned}$$

Para 10,000 unidades monetarias de suma asegurada.
Prima Neta: $10{,}000\overline{A}_{35:\overline{30}|} = 2{,}087.27$
Varianza: $(10{,}000)^{2} Var[Z] = 1{,}160{,}600$.

Ejemplo 4.6:

Calcule, para un hombre de edad 50 años, la prima neta única para un seguro decreciente a 5 años de plazo pagando, 5000 en el momento del fallecimiento en el primer año, 4000 en el segundo año, y así sucesivamente. Use la tabla de mortalidad ilustrativa, el supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos e $i = 0.06$.

Solución

Refiriéndonos a la tabla 4.1 vemos que

$$b_t = \begin{cases} 5 - [t] & t \le 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

es una función sólo de k, la parte entera de t, y de aquí que podamos escribirla como

$$b_t = \begin{cases} 5 - k & k = 0,1,2,3,4 \\ 0 & k = 4. \end{cases}$$

La función de descuento es v^t, así tenemos

$$\begin{aligned}\left(D\bar{A}\right)_{50:\overline{5}|}^{1} &= \frac{i}{\delta}\left(DA\right)_{50:\overline{5}|}^{1} \\ &= (1.0297087)\sum_{k=0}^{4}(5-k)v^{k+1}\,{}_kp_{50}\,q_{50+k} \\ &= (1.0297087)\frac{\sum_{k=0}^{4}(5-k)v^{k+1}\,d_{50+k}}{l_{50}} \\ &= 0.088307\end{aligned}$$

Entonces, $1000\left(D\bar{A}\right)_{50:\overline{5}|}^{1} = 88.307$

Para un seguro que proporciona beneficios por defunción al momento del fallecimiento que no es función de K, se requiere mayor análisis para expresar sus valores en términos de los de un seguro pagadero al final del año del fallecimiento. Por ejemplo, consideremos el seguro de vida entera creciente continuamente, pagadero al momento del fallecimiento. Este tipo de seguro se discutió ampliamente en la sección 4.2 y su función de beneficios se analizó en la figura 4.5. Sus funciones son

$$\begin{aligned} b_t &= t \qquad t>0 \\ v_t &= v^t \qquad t>0\ , \\ z_t &= t\,v^t \qquad t>0. \end{aligned}$$

Para encontrar $\left(\bar{I}\,\bar{A}\right)_x$ rescribiremos

$$\begin{aligned} Z &= (K+S)v^{K+S} \\ &= (K+1)v^{K+S} - (1-S)v^{K+1}(1+i)^{1-S} \\ &= (K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S} - v^{K+1}(1-S)(1+i)^{1-S}. \end{aligned}$$

Ahora tomando esperanzas, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos, tenemos

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[(K+1)v^{K+1}\right]E\left[(1+i)^{1-S}\right] - E\left[v^{K+1}\right]E\left[(1-S)(1+i)^{1-S}\right] \\ &= (IA)_x\frac{i}{\delta} - A_x\,E\left[(1-S)(1+i)^{1-S}\right]. \end{aligned}$$

Podemos simplificar el último factor directamente ya que $1-S$ tiene una distribución uniforme,

$$E\left[(1-S)(1+i)^{1-S}\right] = \int_0^1 u(1+i)^u\,du = (\bar{D}\,\bar{s})_{\overline{1}|} = \frac{1+i}{\delta} - \frac{i}{\delta^2}$$

Por tanto, podemos escribir

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right)A_x\right].$$

4.5 Ecuaciones recurrentes

Se pueden derivar directamente ecuaciones recurrentes para los valores de los modelos de seguros a partir de las expresiones de las secciones anteriores. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} \\
&= vq_x + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} \\
&= vq_x + v\,p_x \sum_{k=1}^{\infty} v^k\,{}_{k-1}p_{x+1}\,q_{x+k} \\
&= vq_x + v\,p_x \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1}\,{}_jp_{x+1}\,q_{x+1+j} \\
&= vq_x + v\,p_x A_{x+1}
\end{aligned}$$

Esta demostración algebraica tiene la interpretación de que, al final del primer año, la prima neta única para el seguro de vida entera de (x), A_x, debe proporcionar, ya sea una unidad en el evento del fallecimiento dentro del año, o la prima neta única para el seguro de vida entera por una unidad a la edad alcanzada en el caso de sobrevivir.

Estas expresiones también pueden obtenerse desde un punto de vista probabilístico. Consideremos A_x otra vez pero ahora a partir de su definición $E[Z]=E\left[v^{K+1}\right]$ lo que

$$A_x = E[Z] = E\left[v^{K+1} \middle| K \geq 0\right],$$

es redundante ya que todas las probabilidades de K's son enteros no negativos.

Ahora $E[Z]$ puede calcularse considerando que (x) muere en el primer año, es decir, $K=0$, y su complemento, (x) sobrevive el primer año, es decir, $K \geq 1$. Podemos escribir

$$E[Z] = E\left[v^{K+1} \middle| K=0\right]\Pr(K=0) + E\left[v^{K+1} \middle| K \geq 1\right]\Pr(K \geq 1) \tag{4.5.1}$$

En esta expresión podemos finalmente sustituir

$$E\left[v^{K+1} \middle| K=0\right] = v$$
$$\Pr(K=0) = q_x$$

y

$$\Pr(K \geq 1) = p_x$$

Para encontrar una expresión para el factor restante, lo rescribimos como

$$E\left[v^{K+1} \middle| K \geq 1\right] = v\, E\left[v^{(K-1)+1} \middle| (K-1) \geq 0\right].$$

Como K es el tiempo futuro de vida truncado de (x), dado que $K \geq 1$, $K-1$ debe ser el mismo de $(x+1)$.

Si deseamos utilizar las mismas probabilidades para la distribución condicional de $K-1$ dado $K \geq 1$, como lo haríamos para una nueva vida considerada $x+1$, entonces podemos escribir

$$E\left[v^{(K-1)+1} \middle| K-1 \geq 0\right] = A_{x+1} \tag{4.5.2}$$

y sustituirla en (4.5.1) para obtener

$$A_x = vq_x + v\, A_{x+1}\, p_x \tag{4.5.3}$$

Esta igualdad asumida,

(la distribución del tiempo futuro de vida
de una nueva vida asegurada de edad $x+1$)

= (la distribución del tiempo futuro de vida de una vida
de edad actual $x+1$ que fue asegurada hace 1 año),

se discutió en la sección 3.8. En términos de tablas selectas, el lado derecho de la expresión (4.5.2) sería $A_{[x]+1}$. En (4.5.3), cada x sería $[x]$.

Después de reemplazar p_x por $1-q_x$ y multiplicar ambos lados por $(1+i)l_x$, (4.5.3) puede arreglarse como

$$l_x\,(1+i)\,A_x = l_x\,A_{x+1} + d_x\,(1-A_{x+1}).$$

Para el grupo aleatorio sobreviviente, esta ecuación tiene la siguiente interpretación: junto con el interés de un año, A_x proporcionará A_{x+1} para todos y un $1-A_{x+1}$ adicional para aquellos que se esperaba muriesen en el año.

Dividiendo por l_x y después restando $A_x + q_x(1-A_{x+1})$ en ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$A_{x+1} - A_x = i\,A_x - q_x(1-A_{x+1}) \tag{4.5.4}$$

Esta expresión muestra que la diferencia en las primas netas únicas entre la edad de expedición, x, y la edad alcanzada un año después, $x+1$, es igual al interés de la prima neta única a la edad de la expedición menos el costo de proporcionar una unidad de seguro por un año.

Puede obtenerse otra expresión para A_x restando $i\,A_x$ en ambos lados de (4.5.4) y después multiplicando por v^x,

$$v^x A_{x+1} - v^{x-1} A_x = -v^x q_x (1-A_{x+1}). \tag{4.5.5}$$

Ahora, sumando de $x=y$ hasta ∞, obtenemos

$$-v^{y-1}\,A_y = -\sum_{x=y}^{\infty} v^x q_x (1-A_{x+1}),$$

y por tanto

$$A_y = \sum_{x=y}^{\infty} v^{x-y+1}\, q_x(1-A_{x+1}).$$

Esta expresión muestra que la prima neta única para (y) es el valor presente de los costos anuales de seguro durante el tiempo de vida del asegurado.

Se pueden establecer expresiones similares para seguros pagaderos al momento del fallecimiento. Estos se desarrollan utilizando cálculo infinitesimal y llevan a ecuaciones diferenciales.

Para un seguro de vida entera para (x),

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu_x + \bar{A}_x(\delta+\mu_x) = \delta\bar{A}_x - \mu_x(1-\bar{A}_x), \tag{4.5.6}$$

que son las análogas continuas de (4.5.4). La verificación de estas expresiones se dejó para el ejercicio 4.17.

Por otra parte (4.5.6), puede desarrollarse a partir de la definición de $\bar{A}_x$, utilizando la esperanza condicional como lo hicimos para A_x,

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= E\left[v^T\right] \\ &= E\left[v^T \mid T \le h\right]\Pr(T \le h) + E\left[v^T \mid T > h\right]\Pr(T > h).\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

Ahora

$$\Pr(T \le h) = {}_hq_x \quad \text{y} \quad \Pr(T > h) = {}_hp_x, \tag{4.5.8}$$

y la f.d.p. condicional de T dado que $T \le h$ es

$$f(t \mid T \le h) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{F(h)} = \dfrac{{}_tp_x\,\mu_{x+t}}{{}_hq_x} & 0 \le t \le h \\ 0 & \textit{en} \text{ otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$E\left[v^T \mid T \le h\right] = \int_0^h v^t \frac{{}_tp_x\,\mu_{x+t}}{{}_hq_x}\,dt. \tag{4.5.9}$$

Como lo hicimos en la expresión para A_x, escribiremos

$$E\left[v^T \middle| T > h\right] = v^h E\left[v^{T-h} \middle| (T-h) > 0\right] \qquad (4.5.10)$$
$$= v^h \overline{A}_{x+h}.$$

Sustituyendo (4.5.8), (4.5.9) y (4.5.10) en (4.5.7) se genera

$$\overline{A}_x = \int_0^h v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \; {}_hq_x + v^h \, \overline{A}_{x+h} \; {}_hp_x. \qquad (4.5.11)$$

Después, en ambos lados de (4.5.11), multiplicamos por -1, sumamos $\overline{A}_{x+h}$ y dividimos por h para obtener

$$\frac{\overline{A}_{x+h} - \overline{A}_x}{h} = \frac{-1}{h} \int_0^h v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt + \overline{A}_{x+h} \frac{1 - v^h \, {}_hp_x}{h}. \qquad (4.5.12)$$

Ahora

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt = \frac{d}{ds} \int_0^s v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \Big|_{s=0} = \mu_x$$

y

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - v^h \, {}_hp_x}{h} = -\frac{d}{dt}(v^t \, {}_tp_x)\Big|_{t=0} = \mu_x + \delta$$

Utilizando estos dos límites cuando $h \to \infty$ en (4.5.12) obtenemos (4.5.6)

$$\frac{d}{dx}\overline{A}_x = -\mu_x + \overline{A}_x(\mu_x + \delta)$$

4.6 Funciones conmutativas (conmutados)

Se desarrollaron funciones conmutativas para escribir las fórmulas de las primas netas únicas en términos de valores intermedios almacenados. Notamos que en (4.3.4),

$$l_x \, A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, d_{x+k},$$

cada término de la suma es una función de la duración y de la edad alcanzada. Cuando la fuerza de interés es constante, podemos multiplicar ambos lados de (4.3.4) por v^x, y después expresar cada término como una función únicamente de la edad alcanzada. Es decir,

$$v^x \, l_x \, A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} \, d_{x+k} \, ,$$

lo que motiva la definición de las funciones conmutativas:

$$D_x = v^x \, l_x$$

$$C_x = v^{x+1} \, d_x = D_x v \, q_x$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$$

$$R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{x+k}$$

Con estas definiciones, la prima neta única para un seguro temporal diferido que paga una unidad de beneficio al final del año del fallecimiento de (x), si la muerte ocurre entre las edades y y z, puede expresarse como

$${}_{y-y|z-y}A_x = \frac{M_y - M_z}{D_x}$$

Del cuadro 4.2 vemos que la prima neta única para el n-ésimo año de un seguro temporal creciente pagadero al final del año del fallecimiento de (x) es

$$\begin{aligned}
(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \, v^{k+1} \, {}_k q_x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1) \, v^{x+k+1} \, d_{x+k}}{v^x l_x} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \, C_{x+k}}{D_x} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (M_{x+k} - M_{x+n})}{D_x} \\
&= \frac{R_x - R_{x+n} - n \, M_{x+n}}{D_x}
\end{aligned} \qquad (4.6.1)$$

La prima neta única para el n-ésimo año de un dotal puro puede escribirse como

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{4.6.2}$$

Para la prima neta única para el n- ésimo año de un seguro dotal, escribimos

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} + A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Las funciones conmutativas también han sido definidas para ser utilizadas en fórmulas para las primas netas únicas de seguros pagaderos al momento del fallecimiento. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \bar{C}_x &= \int_0^1 v^{x+t}\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= \int_0^1 D_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt. \\ \bar{M}_x &= \sum_{y=x}^{\infty} \bar{C}_y = \int_x^{\infty} D_y\, \mu_y\, dy \\ \bar{R}_x &= \sum_{y=x}^{\infty} \bar{M}_y. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Ejemplo 4.7:

Calcule la prima neta única de un seguro decreciente a 10 años de plazo, para una persona de edad 30 años; el cual paga 10,000 u.m. al momento del fallecimiento en el primer año de vigencia del seguro, 9,000 al momento del fallecimiento en el segundo año y así sucesivamente.

a. Con la terminación de la cobertura al final del décimo año.
b. Con la terminación de la cobertura al final del quinto año.

Solución.

a. Siguiendo el argumento del ejemplo 4.6, tenemos

$$1000\left(\overline{DA}\right)_{\overline{30:10}|}^{\ 1} = 1000\frac{i}{\delta}(DA)_{\overline{30:10}|}^{\ 1}$$

Para expresar $(DA)_{\overline{x:30}|}^{\ 1}$ en funciones conmutativas podemos imaginarlo como la prima por 10 unidades de un seguro de vida entera a la edad 30 años, menos

una unidad de un seguro de vida entera que comienza en cada una de las edades de 31 hasta 40 años. (Veáse figura 4.6) Por lo tanto.

$$(DA)^{1}_{30:\overline{10}|} = \frac{10M_{30} - \sum_{y=31}^{40} M_y}{D_{30}}$$
$$= \frac{10M_{30} - R_{31} + R_{41}}{D_{30}}$$

Para el seguro discreto, tenemos

$$1000\frac{i}{\delta}(DA)^{1}_{30:\overline{10}|} = 1000(1.02971)(0.078164991)$$
$$= 80.49$$

b. Este seguro es una combinación de 5 unidades de un seguro temporal a 5 años y un seguro decreciente temporal a 5 años. Por tanto la prima neta única es

$$1000\left[5\,\overline{A}^{1}_{30:\overline{5}|} + \left(D\overline{A}\right)^{1}_{30:\overline{5}|}\right]$$
$$= 1000(1.02971)\left[\frac{5(M_{30} - M_{35}) + 5M_{30} - R_{31} + R_{36}}{D_{30}}\right]$$
$$= 1000(1.02971)\left(\frac{10M_{30} - 5M_{35} - R_{31} + R_{36}}{D_{30}}\right)$$
$$= 58.69$$

4.7 Notas y referencias

En el anexo 6 se da una lista de los libros de texto sobre contingencias de vida, en ellos se presentan otros desarrollos de fórmulas para las primas netas únicas de seguros de vida. Por ejemplo, Jordan (1967) emplea ampliamente funciones conmutativas con tasas de interés constante, en tal virtud, es adecuado el consultar esta bibliografía para efecto de ejercicios propuestos.

Por otra parte hay poco material en estos libros de texto sobre el concepto del tiempo transcurrido hasta el fallecimiento de un asegurado como variable aleatoria. Hasta fechas recientes, la investigación y exposición de este concepto se llamó ***teoría del riesgo individual.*** Cramer (1930) hace una exposición detallada de las ideas hasta esa época. Kahn (1962) y Seal (1969)

proporcionan información bibliográfica concisa sobre investigación y estudios que abarca un periodo de 100 años.

Desde 1970 ha habido interés en los modelos actuariales que consideran tanto el tiempo hasta la muerte y la tasa de retorno sobre la inversión como variables aleatorias. Bellhouse y Panjer (1980), y algunas de las referencias que citan, desarrollan estos modelos estocásticos.

4.8 Ejercicios

Asuma, a menos que se establezca otra indicación, que los seguros son pagaderos al momento del fallecimiento, y que la fuerza de interés es constante δ con i y d como las tasas de interés y descuento equivalentes.

Sección 4.2

4.1 Si $\mu_x = \mu$, es una constante positiva, para todas las $x > 0$, demuestre que $\bar{A}_x = \mu/(\mu+\delta)$.

4.2 Sea $\mu_x = 1/(1+x)$, para toda $x > 0$.

a. Demuestre que:

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{1+x}{1+x+t} dt .$$

b. Use la expresión en (a) para demostrar que $d\bar{A}_x/dx < 0$ para toda $x > 0$.

4.3 Demuestre que $d\bar{A}_x/di = -v\left(\bar{I}\,\bar{A}\right)_x$.

4.4. Demuestre que las expresiones para la varianza del valor presente de un seguro dotal a n años que paga una unidad de beneficio como se da en (4.2.10) y en (4.2.11), son idénticas.

4.5 Sea Z_1 y Z_2 como las definidas en la ecuación (4.2.8).

a. Demuestre que $\lim_{n\to 0} Cov[Z_1, Z_2] = \lim_{n\to\infty} Cov[Z_1, Z_2] = 0$

b. Desarrolle una ecuación implícita para el plazo del dotal para la que se minimice la $Cov[Z_1, Z_2]$.

c. Desarrolle una fórmula para el mínimo en (b).

d. Simplifique las fórmulas en (b) y (c) para el caso cuando la fuerza de mortalidad es una constante μ.

4.6 Suponga que la mortalidad está descrita por $l_x = 100 - x$ para $0 \le x \le 100$ y que la fuerza de interés es $\delta = 0.05$.

a. Calcule $\overline{A}^1_{40:\overline{25}|}$

b. Determine la prima neta única para un seguro a 25 años de plazo con un beneficio por fallecimiento en el tiempo t igual a $e^{0.05t}$ para una persona de 40 años de edad al momento de expedición de la póliza.

4.7 Suponga que la función de sobrevivencia de Moivre con $w = 100$ e $i = 0.10$, calcule

a. $\overline{A}^1_{30:\overline{10}|}$

b. la varianza del valor presente, al momento de expedición de la póliza, del beneficio del seguro en (a).

4.8 Si $\delta_t = 0.2/(1 + 0.05t)$ y $l_x = 100 - x$ para $0 \le x \le 100$, calcule

a. Para un seguro de vida entera expedido a la edad x, la prima neta única y la varianza del valor presente de los beneficios.

b. $\left(\overline{I}\,\overline{A}\right)_x$

4.9 a. Demuestre que $\overline{A}_x$ es la función generadora de momentos de T, el tiempo futuro de vida de (x), evaluado en $-\delta$.

b. Por tanto, demuestre que si T tiene una distribución gama con parámetros α y β, entonces $\overline{A}_x = (1 + \delta/\beta)^{-\alpha}$.

4.10 Dado $b_t = t$, $\mu_{x+t} = \mu$ y $\delta_t = \delta$ para toda $t > 0$, determine expresiones para

a. $\left(\bar{I}\,\bar{A}\right)_x = E\left[b_T v^T\right]$

b. $Var\left[b_T v^T\right]$

Sección 4.3

4.11 Si $l_x = 100 - x$ para $0 \le x \le 100$ e $i = 0.05$ evalúe

a. $A_{40:\overline{25}|}$

b. $(IA)_{40}$.

4.12 Demuestre que $A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{m}|} + v^m {}_m p_x \, A_{x+m:\overline{n-m}|}$ para $m < n$ e interprete verbalmente el resultado.

4.13 Si $A_x = 0.25$, $A_{x+20} = 0.40$ y $A_{x:\overline{20}|} = 0.55$, calcule

a. $A^{1}_{x:\overline{20}|}$

b. $A^{1}_{x:\overline{20}|}$

4.14 a. Describa los beneficios de un seguro con el valor presente actuarial definido mediante el símbolo $\left(IA\right)_{x:\overline{n}|}$.

b. Exprese la prima neta única de (a) en términos de los símbolos de los cuadros 4.1 y 4.2.

Sección 4.4

4.15 Considere la escala de tiempo medida en intervalos de amplitud $1/m$ en donde la unidad es un año. Sea un seguro de vida entera el cual paga una unidad monetaria al final del intervalo mensual en el que ocurra el fallecimiento. Sea k el número de años completos de seguro vividos antes de la muerte y sea j el número de meses completos vividos del año en que ocurre el fallecimiento.

a. ¿Cuál es la función del valor presente para este seguro?

b. Establezca una fórmula análoga a (4.4.1) para la prima neta única, $A_x^{(m)}$, de este seguro.

c. Demuestre algebraicamente que, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos durante el año de edad del seguro,

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x .$$

4.16 Demuestre, bajo el supuesto de una fuerza constante de la mortalidad entre edades enteras, que (4.4.1) puede escribirse

$$\bar{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, \mu_{x+k}\, \frac{i+q_{x+k}}{\delta+\mu_{x+k}}$$

Donde $\mu_{x+k} = -\log p_{x+k}$

Sección 4.5

4.17 a. Demuestre que (4.2.6) puede rescribirse como

$$\bar{A}_x = \frac{1}{{}_xp_0\, v^x} \int_x^{\infty} v^y\, {}_yp_0\, \mu_y\, dy \qquad x \geq 0$$

b. Obtenga la derivada de la fórmula de (a) para establecer (4.5.6),

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = \bar{A}_x(\mu_x + \delta) - \mu_x \qquad x \geq 0 .$$

c. Use la misma técnica para demostrar

$$\frac{d\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{dx} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\left(\mu_x + \delta\right) + A^{\frac{1}{x:\overline{n}|}} \mu_{x+n} - \mu_x \qquad x \geq 0 .$$

4.18 Resuelva la ecuación diferencial (4.5.6) como se indica:

a. Utilice el factor de integración

$$\exp\left[-\int_y^x (\delta + \mu_z) dz\right]$$

para obtener

$$\bar{A}_y = \int_y^{\infty} \mu_x \exp\left[-\int_y^x (\delta + \mu_z) dz\right] dx .$$

b. Use el factor de integración $e^{-\delta x}$ para obtener

$$\bar{A}_y = \int_y^\infty \mu_x \, v^{x-y}(1-\bar{A}_x)dx .$$

4.19 Demuestre que

$$(IA)_x = vq_x + v\left[A_{x+1} + (IA)_{x+1}\right]p_x .$$

¿Qué supuestos usó para establecer la identidad?

Sección 4.6

4.20 Demuestre algebraicamente e interprete

$$\frac{1}{D_x}\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k}v^{n-k-1} + D_{x+n}\right] = v^n$$

4.21 Verifique la equivalencia de las tres últimas expresiones en (4.6.1).

4.22 Exprese, en funciones conmutativas, la prima neta única para una póliza de doble protección a la edad de 65 años que proporcione un beneficio de 2 unidades monetarias en el caso de que la muerte ocurra antes de los 65 años y un beneficio de una unidad monetaria después de los 65 años de edad. Suponga que los beneficios se pagan al final del año del fallecimiento.

4.23 Se expide una póliza a la edad 0 con la siguiente escala graduada de beneficios por fallecimiento pagaderos al momento del fallecimiento.

Edad	Beneficios
0	1 000
1	2 000
2	4 000
3	6 000
4	8 000
5-20	10 000
21 y más	50 000

Escriba la prima neta única en términos de funciones conmutativas.

4.24 Bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos, exprese las primas netas únicas que se indican abajo, en términos de D_x, C_x, M_x y R_x.

a. $\left(I\overline{A}\right)_{30:\overline{35}|}$

b. $\left(\overline{I}\ \overline{A}\right)_{30:\overline{35}|}$

c. $\left(\overline{I}_{\overline{10}|}\overline{A}\right)_{30:\overline{35}|}$

Misceláneos

4.25 a. Determine si es cierto o no que un incremento constante en la fuerza de mortalidad tiene el mismo efecto sobre A_x como el mismo incremento en la fuerza de interés.

b. Demuestre que si la probabilidad simple de fallecimiento q_{x+n} se incrementa a $q_{x+n}+c$, entonces A_x se incrementar por

$$c\,v^{n+1}\,{}_np_x(1-A_{x+n+1})$$

4.26 El valor presente actuarial de un dotal puro es de 650 unidades monetarias a la expedición de la póliza, para una persona de edad x durante n años, la cual otorga como beneficio a la sobrevivencia 1000 unidades monetarias, por otra parte el valor presente actuarial que incluye además el beneficio de fallecimiento durante el periodo del n años es de 700 unidades monetarias.

a. Calcule la prima neta única para un dotal puro modificado de 1000 unidades monetarias, expedida a la edad x por n años si $100K\%$ de la prima neta única debe regresarse al fallecimiento ocurrido durante el periodo.

b. Para el dotal puro modificado en (a), exprese la varianza del valor presente a la expedición de la póliza en términos de primas netas únicas para dotales puros y seguros temporales.

4.27 Un productor de artículos vende su producto con una garantía de 5 años prometiendo el reembolso del efectivo igual a la parte prorrateada del precio de compra inicial si se presentan fallas dentro de los primeros 5 años. Por ejemplo, si la falla se reporta a los $3\frac{3}{4}$ años siguientes a la compra, se rembolsará el 25% del precio de compra. A partir de estudios estadísticos la probabilidad de que se presenten fallas en un producto nuevo durante el primer año se estima que es 0.2, en cada uno del segundo, tercero y cuarto años, 0.1, y en el quinto, 0.2.

a. Suponiendo que las fallas se reportan de manera uniforme dentro de cada año desde la compra, determine la fracción del precio de compra que sirve como la prima neta única para esta garantía. Suponga que $i = 0.10$.

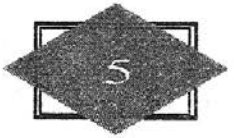
b. Si el reembolso garantizado es la reducción del precio de compra de un producto nuevo con 5 años de garantía, ¿cambiaría la respuesta de (a)?

4.28 a. Demuestre que

$$\mu_x \cong \frac{(i/\delta)(M_{x-1} - M_{x+1})}{2D_x}$$

b. Aproxime μ_{30} utilizando la Tabla de mortalidad Ilustrativa con $i = 0.06$.

c. Usando $i = 0$, rehaga la parte (b).



ANUALIDADES

5.1 Introducción

En el capítulo anterior estudiamos los pagos dependientes del fallecimiento, como los que proporcionan diversas formas de seguros de vida. En este capítulo estudiaremos los pagos dependientes de la sobrevivencia, como los que otorgan diferentes formas de anualidades vitalicias. ***Una anualidad vitalicia*** es una serie de pagos hechos en forma continua o a intervalos iguales (como meses, trimestres, años) mientras se sobrevive. Puede ser temporal, es decir, limitada a un plazo determinado de años, o puede ser pagadera durante toda la vida. Los intervalos de pago pueden comenzar inmediatamente o, alternativamente, la anualidad puede diferirse. Los pagos pueden cobrarse al principio de los intervalos de pago (***anualidades anticipadas***) o al final de los mismos (***anualidades de pago al final del periodo***).

A través del estudio de las ***anualidades ciertas*** en la teoría del interés, el estudiante ya tiene un conocimiento de la terminología, de la notación y teoría de la anualidad. La teoría de la anualidad vitalicia es análoga pero introduce a la sobrevivencia como condición para el pago. Esta condición ya ha sido vista en el capítulo 4 en conexión con el dotal puro y los pagos vencidos bajo los seguros dotales.

Las anualidades vitalicias juegan un papel muy importante en las operaciones de seguros de vida. Como veremos en el próximo capítulo, los seguros de vida generalmente se compran por una anualidad vitalicia de primas más que por una prima única. La cantidad pagadera al momento de la reclamación puede convertirse mediante una opción establecida en alguna forma de anualidad vitalicia para el beneficiario. Algunos tipos de seguros de vida llevan este concepto aún más lejos y en lugar de ofrecer principalmente una suma total pagadera al fallecimiento, prevén formas establecidas de beneficios en términos de ingreso. Así, por ejemplo, puede haber un ingreso mensual pagadero al cónyuge sobreviviente o al asegurado que se retira.

Las anualidades son todavía más importantes en los sistemas de pensiones. De hecho, un plan de retiro puede ser considerado como un sistema de compra de anualidades vitalicias diferidas (pagaderas durante el retiro) mediante alguna forma de anualidades temporales con aportaciones durante el servicio activo. La anualidad temporal puede consistir de aportaciones variables y su valuación puede tomar en cuenta no sólo el interés y la mortalidad sino otros factores como los incrementos de salarios y la terminación de la participación por razones distintas al fallecimiento.

Las anualidades vitalicias también tienen un papel en la incapacidad y en los seguros de compensación de los trabajadores. En el caso de los seguros de incapacidad, puede resultar necesaria la terminación del beneficio de la anualidad debido a la recuperación del incapacitado. Para el caso del cónyuge sobreviviente los beneficios de la compensación del trabajador, puede terminar al volverse a casar.

Como preparación para la aplicación de lo que llamaremos la ***técnica del pago corriente*** para la valuación de las anualidades vitalicias, consideraremos, en la Sección 5.2 un pago contingente único a la sobrevivencia. Esta es una analogía con la teoría del interés compuesto en la que empezamos con el valor acumulado y el valor presente de un pago único y después se extendieron los conceptos de valuación a una serie de pagos mediante la suma o la integración. La técnica del pago corriente procede en líneas similares para las anualidades vitalicias. Alternativamente, emplearemos una ***técnica de pago agregado*** que procede mediante la consideración del valor total recibido en la fecha en que termina la anualidad por fallecimiento o expiración de su plazo. Cada una de estas técnicas tienes sus ventajas especiales y ofrece diversas visiones. La equivalencia de las fórmulas producidas por ambas técnicas se sigue como una consecuencia inmediata de los teoremas 3.1 y 3.2.

Al igual que en el capítulo precedente sobre seguros de vida, supondremos, a menos que se especifique lo contrario, una tasa efectiva constante de interés anual i (o su equivalente fuerza constante de interés δ).

En la mayoría de las aplicaciones de la teoría desarrollada en este capítulo, los pagos anuales continúan mientras que una vida humana permanece en un estatus particular. Sin embargo, las aplicaciones posibles de la teoría son mucho más amplias. Puede aplicarse a cualquier conjunto de pagos periódicos en el que los pagos no se hacen con certidumbre. En capítulos posteriores se

verán ejemplos de estas aplicaciones que tratan de múltiples vidas o múltiples causas de decremento.

5.2 Pago único contingente de la sobrevivencia

Consideraremos ahora una unidad de pago vencido al final de n años siempre que una vida de edad actual x sobreviva los n años. En el capítulo 4, dicho beneficio se denominó dotal puro a n años con respecto a (x). Vinculado a seguros, era natural utilizar el término prima neta única y la notación $A^{\frac{1}{}}_{x:\overline{n}|}$ para la esperanza del valor presente de una unidad del dotal puro. En conexión con las anualidades, y en particular para los fondos de pensión, se utiliza frecuentemente el término valor presente actuarial y la notación ${}_nE_x$ y los emplearemos aquí. La palabra actuarial aquí implica que una esperanza u otros factores además del interés han sido considerados en el cálculo. Luego el valor presente actuarial de una unidad vencido al final de n años siempre que (x) sobreviva es

$$ {}_nE_x = A^{\frac{1}{}}_{x:\overline{n}|} = v^n {}_nP_x \tag{5.2.1} $$

(veáse el cuadro 4.1)

Ejemplo 5.1

Encuentre el valor presente actuarial de 10,000 unidades que se pagaran al final de 40 años, si un hombre de edad 25 años, sobrevive al final de dicho periodo. Como base de valuación, utilice la Tabla de mortalidad Ilustrativa con interés a la tasa efectiva anual de 6%.

Solución:
Aquí necesitamos

$$ \begin{aligned} 10{,}000\,{}_{40}E_{25} &= 10{,}000\, v^{40}\ {}_{40}p_{25} \\ &= 10{,}000(0.09722219)(0.78765825) \\ &= 765.78 \end{aligned} $$

En este ejemplo, el descuento del interés tiene mucho más efecto que el factor de sobrevivencia. ∇

La fórmula (5.2.1) puede rescribirse en la forma

$$ l_x\ {}_nE_x(1+i)^n = l_{x+n} \tag{5.2.2} $$

En términos del concepto de grupo determinístico de sobrevivencia, esto indica que si los l_x sobrevivientes a la edad x, depositan cada uno ${}_nE_x$ en un fondo de acumulación con tasa de interés i, habrá una cantidad suficiente al final de n años para pagar una unidad monetaria a cada uno de los l_{x+n} sobrevivientes a la edad $x+n$. Aquí estamos suponiendo que el tamaño del grupo a la edad x disminuye exactamente como lo indica la tabla de mortalidad.

Para ilustrar mediante los datos del ejemplo 5.1, si los $l_{25} = 95,650.15$ sobrevivientes a la edad de 25 contribuyen 765.78 (de acuerdo a la tabla de mortalidad ilustrativa) y si este fondo se acumula a una tasa efectiva de interés de 6% durante 40 años, tenemos los siguientes resultados:

Fondo original	= 73 ,246,972
Factor de acumulación $(1.06)^{40}$	= 10.285718
Fondo acumulado al final de 40 años	= 753,397,698
Sobrevivientes a la edad 65(l_{65})	= 75,339.63
Participación por cada sobreviviente	= 10,000

Este cálculo exhibe el valor presente actuarial

$$10,000\ {}_{40}E_{25} = 765.78$$

como la cantidad que si es pagada por cada sobreviviente a la edad de 25 años, acumularía, al 6% de interés, un fondo suficiente para otorgar 10,000 por sobreviviente a la edad de 65 años. Sólo los sobrevivientes a esa edad participan en la distribución del fondo; las contribuciones de los $l_{25} - l_{65}$ muertos acumulados con intereses se aplican para incrementar la participación de cada sobreviviente. Debido a la doble operación, el interés incrementa el fondo y de la sobrevivencia, disminuye el número de beneficiarios del fondo; a menudo esto se describe diciendo que los 765.78 se acumuló en 40 años con beneficio de intereses y sobrevivencia a 10,000. En el presente texto, nos referiremos a los 10,000 como el valor actuarial acumulado a la edad de 65 años de 765.78 a la edad de 25 años. Para mayor conocimiento sobre estos conceptos, veáse el ejercicio 5.3.

En forma general, definiremos el ***valor actuarial acumulado*** al final de n años de una aportación de 1 a la edad x como una cantidad S tal que su valor actuarial presente sea 1. Por lo tanto $S\ {}_nE_x = 1$, ó

$$S = \frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{v^n\ {}_nP_x} = (1+i)^n\ \frac{l_x}{l_{x+n}} \tag{5.2.3}$$

La fórmula (5.2.3) muestra el factor de acumulación actuarial $1/{}_nE_x$ como el producto del factor de acumulación del interés $(1+i)^n$ y un factor de acumulación de la sobrevivencia $1/{}_nP_x = l_x/l_{x+n}$.

Ejemplo 5.2

Encuentre el valor actuarial acumulado de 1000 para una persona de edad 25 años hasta la edad de 65 años, utilice Tabla de mortalidad Ilustrativa con un interés a una tasa efectiva anual del 6%.

Solución

$$1000\frac{1}{{}_{40}E_{25}} = 1000\ (1.06)^{40}\ \frac{l_{25}}{l_{65}} = 13,058.60$$

En este ejemplo, la tasa anual de mortalidad tiene un rango de 0.0012230 en edad 25 años a 0.0195231 en edad 64 años y tiene mucho menos efecto que el interés a la tasa anual de 6%.

Ejemplo 5.3

Obtenga fórmulas para

$$\text{a.}\frac{\partial}{\partial x}\,{}_nE_x \qquad \text{b.}\frac{\partial}{\partial n}\,{}_nE_x$$

Observe cómo varía ${}_nE_x$ con x para n determinadas y cómo varía con n para x determinadas.

Solución

$$\text{a.}\ \frac{\partial}{\partial x}\,{}_nE_x = v^n\,\frac{\partial}{\partial x}\,{}_np_x = v^n\,{}_nP_x(\mu_x - \mu_{x+n}) = {}_nE_x(\mu_x - \mu_{x+n})$$

Note que si $\mu_y > 0$, $x \le y \le x+n$, en tal forma que μ_y es una función creciente, entonces $\partial\ {}_nE_x/\partial x < 0$ y ${}_nE_x$ disminuye con la edad. También, si $\mu_y = c$,

$x \le y \le x+n$, entonces $\partial\ {}_nE_x/\partial x = 0$ y ${}_nE_x$ no cambia con la edad. Finalmente, si $\mu_y < 0$, $x \le y \le x+n$, como puede suceder en edades jóvenes, entonces ${}_nE_x$ se incrementa con la edad.

b. $$\frac{\partial}{\partial n}\ {}_nE_x = \frac{\partial}{\partial n}\exp\left[-\int_x^{x+n}(\mu_y+\delta)dy\right] = {}_nE_x\frac{\partial}{\partial n}\left[-\int_x^{x+n}(\mu_y+\delta)dy\right] = -{}_nE_x(\mu_{x+n}+\delta)$$

Aquí se observa que $\frac{\partial}{\partial n}\ {}_nE_x < 0$, es decir, ${}_nE_x$ es una función decreciente de n, como se había esperado.

Ejemplo 5.4

Demuestre e interprete las relaciones para $n > t$.

a ${}_nE_x = {}_tE_x\ {}_{n-t}E_{x+t}$

b. $$\frac{{}_tE_x}{{}_nE_x} = \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}$$

Solución

a. ${}_nE_x = v^n\ {}_np_x = v^t\ v^{n-t}\ {}_tp_x\ {}_{n-t}p_{x+t} = {}_tE_x\ {}_{n-t}E_{x+t}$

Puede encontrarse el valor presente actuarial de una unidad vencido al final de n años si (x) sobrevive tomando el valor actuarial presente a la edad $x+t$ del pago vencido a la edad $x+n$ y después tomar el valor presente actuarial a la edad x del valor encontrado para la edad $x+t$.

b. Esta fórmula se deduce al arreglar la fórmula en (a). El valor actuarial acumulado a la edad $x+n$ de una unidad aportada a la edad $x+t$ puede encontrarse tomando el valor presente actuarial a la edad x de la unidad y acumulando dicho valor a la edad $x+n$. ∇

5.3 Anualidades vitalicias continuas

Cuando definimos los valores presentes actuariales de las anualidades vitalicias, podemos utilizar una técnica de pago agregado o una de pago corriente. Los pasos para la técnica de pago agregado son:

- registrar únicamente el interés del valor presente de todos los pagos a realizarse mediante la anualidad si el fallecimiento ocurre en el tiempo t;

- multiplicar el valor presente, encontrado en el punto anterior, por la probabilidad o densidad de la probabilidad del fallecimiento en el tiempo t;
- sumar (integrar) sobre todos los periodos de fallecimiento t.

Para la técnica de pago corriente, los pasos son

- registrar el monto del pago vencido en el tiempo t;
- determinar el valor presente actuarial del pago vencido en el tiempo t;
- sumar (integrar) estos valores presentes para todos los periodos de pago t.

La primera técnica se presta para interpretarse en términos de la variable aleatoria del tiempo futuro de vida. Se nota que los pasos producen una expectativa. La técnica de pago corriente puede basarse también en un modelo probabilístico. Es posible hacer una interpretación determinística para ambas técnicas, pero la de pago corriente se utilizaría, normalmente, para modelos determinísticos.

Estas técnicas se ilustran muy bien por lo que hemos definido, como el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia total por un monto de 1 al año pagadero continuamente mientras sobrevive (x). La notación para este valor es $\bar{a}_x$.

Con T representando el tiempo futuro de vida de (x), el valor presente de los pagos anuales hechos hasta el fallecimiento de $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$, y por la técnica de pago agregado nos conduce a definir el valor presente actuarial de la anualidad como

$$\bar{a}_x = E[Y] = E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] \tag{5.3.1}$$

Como la f.d.p. de T es ${}_tp_x\,\mu_{x+t}$, tenemos

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt \tag{5.3.2A}$$

Alternativamente, en analogía con la fórmula de interés compuesto

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,dt,$$

consideramos (bajo la técnica de pago corriente) el valor presente actuarial $v^t \, {}_tp_x \, dt$ del pago momentáneo dt hecho en el tiempo, t e integramos todos esos valores para obtener la definición

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt. \tag{5.3.2B}$$

Usando el Teorema 3.1, con $z(t) = \bar{a}_{\overline{t}|}$, $g(t) = {}_tp_x \, \mu_{x+t}$, (5.3.2A) se reduce a (5.3.2B), lo que demuestra la equivalencia de las definiciones (5.3.1) y (5.3.2B).

Mas aún, aplicando el Teorema 3.1 con $z(t) = v^t$, $g(t) = {}_tp_x \, \mu_{x+t}$ a

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

Encontramos

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= 1 + \int_0^\infty {}_tp_x \, dv^t \\ &= 1 - \delta \bar{a}_x \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

o

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x \tag{5.3.4}$$

La fórmula (5.3.4) es análoga a la relación

$$1 = \delta \bar{a}_{\overline{1}|} + v^1$$

en la teoría del interés, se indica que una unidad invertida ahora producirá un interés anual de δ pagadero continuamente mientras (x) sobrevive más el reembolso de la unidad a la muerte de (x).

Pueden obtenerse las relaciones entre $\bar{a}_x$ y $\bar{A}_x$ expresando

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} = \frac{1 - Z}{\delta} \tag{5.3.5}$$

en donde $Z = v^T$ es la variable aleatoria del valor presente para un seguro de vida entera (vitalicia). Luego sustituyendo en (5.3.1), obtenemos

$$\bar{a}_x = E\left[\frac{1 - Z}{\delta}\right] = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \tag{5.3.6}$$

que es equivalente a (5.3.3) y (5.3.4). La fórmula (5.3.6) puede escribirse como

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{\infty}|} - \bar{a}_{\overline{\infty}|}\bar{A}_x \tag{5.3.7}$$

Esta última fórmula indica que la anualidad de vida entera (vitalicia) es equivalente a una perpetuidad pagadera continuamente menos una perpetuidad que comienza a la muerte de (x) (lo que en efecto, termina la anualidad vitalicia).

Para medir, sobre la base de los supuestos de nuestro modelo, el riesgo de mortalidad en una anualidad vitalicia continua, estamos interesados en la $Var\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right]$. Determinamos

$$\begin{aligned} Var\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] &= Var\left[\frac{1-v^T}{\delta}\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2} Var\left[v^T\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2\right] \text{ o bien,} \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2\right] \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

en donde, como en el capítulo 4, ${}^2\bar{A}_x$ se calcula con base en la fuerza de interés 2δ.

Se puede observar, además, que

$$\delta\bar{a}_{\overline{T}|} + v^T = 1 \tag{5.3.9}$$

Idénticamente, de lo que se sigue que

$$E\left[\delta\bar{a}_{\overline{T}|} + v^T\right] = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$$

[fórmula (5.3.4)], y

$$Var\left[\delta\bar{a}_{\overline{T}|} + v^T\right] = 0$$

Demostramos que la fórmula (5.3.9) no es un riesgo de mortalidad para la combinación de una anualidad continua de δ pagos anuales y un seguro de vida de 1 pago al fallecimiento.

Ejemplo 5.5

Bajo los supuestos de una fuerza constante de mortalidad, $\mu = 0.04$, y de una fuerza constante de interés $\delta = 0.06$, evalúe

a. $\bar{a}_x$

b. la desviación estándar de $\bar{a}_{\overline{T}|}$

c. la probabilidad de que $\bar{a}_{\overline{T}|}$ exceda $\bar{a}_x$.

Solución

a.

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-0.06t} e^{-0.04t} \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-0.10t} \, dt = 10\end{aligned}$$

b.

$$\bar{A}_x = E\left[e^{-0.06\,T}\right] = \int_0^\infty e^{-0.06t} e^{-0.04t} (0.04) dt = 0.4$$

$$^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-0.12t} e^{-0.04t} (0.04) dt = 0.25$$

$$Var\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] = \frac{1}{(0.06)^2}\left[0.25 - (0.4)^2\right] = 25$$

Por tanto la desviación estándar de $\bar{a}_{\overline{T}|}$ es igual a 5.

c.

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x\right] = \Pr\left[\bar{a}_{\overline{T}|} > 10\right] \\ &= \Pr\left[\frac{1 - v^T}{0.06} > 10\right] = \Pr\left[0.4 > e^{-0.06T}\right] \\ &= \Pr\left[T > \left(-\frac{\log 0.4}{0.06}\right)\right] = \Pr\left[T > 15.27\right] \\ &= \int_{15.27}^{\infty} e^{-0.04t} 0.04 dt = 0.54\end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo los supuestos establecidos, existe una posibilidad del 54% de que $\bar{a}_x$ sea insuficiente para proporcionar la unidad de la anualidad vitalicia. ∇

Ahora nos dedicaremos a las anualidades temporales y diferidas de vida. El valor presente actuarial de una anualidad temporal a n años de vida de 1 anual, pagadera continuamente mientras (x) sobreviva durante los siguientes n años, se denota por $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$. De la técnica de pago corriente,

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt \tag{5.3.10}$$

Ahora, aplicando integración por partes a

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt = \int_0^n v^t \left(-d_t p_x\right)$$

tenemos

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = 1 - v^n \, {}_np_x - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

o

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|} \tag{5.3.11}$$

Se deja al estudiante comparar las fórmulas (5.3.4) y (5.3.11) e interpretar la última.

La técnica de pago agregado empieza con la variable aleatoria del valor presente Υ en donde

$$\Upsilon = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T \ge n \end{cases} \tag{5.3.12}$$

y establece

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= E[\Upsilon] \\ &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \, {}_np_x \end{aligned}$$

Después de integrar por partes, se convierte en (5.3.10). Al sustituir $\left(1-v^T\right)/\delta$ para $\bar{a}_{\overline{T}|}$ y $\left(1-v^n\right)/\delta$ para $\bar{a}_{\overline{n}|}$, en (5.3.12), se nota que $\Upsilon = (1-Z)/\delta$ donde

$$Z = \begin{cases} v^T & 0 \le T < n \\ v^n & T \ge n \end{cases}$$

es la variable aleatoria del valor presente para un seguro dotal a n años [veáse el cuadro 4.1 y compárelo con (5.3.5)].

Ahora

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = E[\Upsilon] = \frac{1}{\delta}\left(1 - E[Z]\right) = \frac{1}{\delta}\left[1 - \bar{A}_{x\overline{n}|}\right] \tag{5.3.13}$$

y es equivalente a (5.3.11).

Para calcular la varianza podemos usar la relación $\Upsilon = (1-Z)/\delta$ y (4.2.10) para obtener

$$Var[\Upsilon] = \frac{1}{\delta^2} Var[Z] = \frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_{x\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x\overline{n}|}\right] \tag{5.3.14}$$

En términos de valores anuales, la fórmula (5.3.14) se convierte en

$$\begin{aligned} Var[\Upsilon] &= \frac{1}{\delta^2}\left[1 - 2\delta\, {}^2\bar{a}_{x\overline{n}|} - \left(1 - \delta\bar{a}_{x\overline{n}|}\right)^2\right] \\ &= \frac{2}{\delta}\left[\bar{a}_{x\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x\overline{n}|}\right] - \left(\bar{a}_{x\overline{n}|}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia diferida n años de una unidad monetaria al año pagadera continuamente mientras (x) sobreviva (más allá de la edad $x+n$) se denota por ${}_{n|}\bar{a}_x$. Por la técnica de pago corriente, tenemos

$${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt \tag{5.3.16}$$

y también las relaciones

$$\begin{aligned} {}_{n|}\bar{a}_x &= \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt - \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt \\ &= \bar{a}_x - \bar{a}_{x\overline{n}|} && (5.3.17) \\ &= \frac{\bar{A}_{x\overline{n}|} - \bar{A}_x}{\delta} && (5.3.18) \end{aligned}$$

Para aplicar la técnica de pago agregado, se empieza con la variable aleatoria del valor presente Υ en donde

$$\Upsilon = \begin{cases} 0 = \overline{a}_{\overline{T}|} - \overline{a}_{\overline{T}|} & 0 \le T \le n \\ v^n\, \overline{a}_{\overline{T-n}|} = \overline{a}_{\overline{T}|} - \overline{a}_{\overline{n}|} & T \ge n \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} {}_{n|}\overline{a}_x = E[\Upsilon] &= \int_n^\infty v^n\, \overline{a}_{\overline{t-n}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= \int_0^\infty v^n\, \overline{a}_{\overline{s}|}\, {}_{n+s}p_x\, \mu_{x+n+s}\, ds \\ &= v^n\, {}_np_x \int_0^\infty \overline{a}_{\overline{s}|}\, {}_sp_{x+n}\, \mu_{x+n+s}\, ds \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$ {}_{n|}\overline{a}_x = {}_nE_x\, \overline{a}_{x+n} \tag{5.3.19}$$

Esta fórmula pudo haberse obtenido de (5.3.16) sustituyendo $t = n+s$. También, de las definiciones de Υ podemos ver que

(la Υ para una anualidad vitalicia diferida total a n años)
= (la Υ para una anualidad vitalicia)
- (la Υ para una anualidad temporal a n años)

y que tomando esperanzas volvería a producir (5.3.17).

Una forma para calcular la varianza de Υ para la anualidad diferida es la siguiente:

$$\begin{aligned} Var[\Upsilon] &= \int_0^\infty v^{2n} \left(\overline{a}_{\overline{t-n}|}\right)^2\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt - \left({}_{n|}\overline{a}_x\right)^2 \\ &= v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty \left(\overline{a}_{\overline{s}|}\right)^2\, {}_sp_{x+n}\, \mu_{x+n+s}\, ds - \left({}_{n|}\overline{a}_x\right)^2 \end{aligned}$$

mediante el Teorema 3.1,

$$\begin{aligned} &= v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty 2\, \overline{a}_{\overline{s}|}\, v^s\, {}_sp_{x+n}\, ds - \left({}_{n|}\overline{a}_x\right)^2 \\ &= \frac{2}{\delta} v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty \left(v^s - v^{2s}\right)\, {}_sp_{x+n}\, ds - \left({}_{n|}\overline{a}_x\right)^2 \\ &= \frac{2}{\delta} v^{2n}\, {}_np_x \left[\overline{a}_{x+n} - {}^2\overline{a}_{x+n}\right] - \left({}_{n|}\overline{a}_x\right)^2 \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Para un desarrollo alternativo de esta fórmula, veáse el ejercicio 5.40.

El valor presente actuarial de una anualidad continua temporal n años diferida m años, de una unidad pagadera continuamente mientras (x) sobreviva entre las edades $x+m$ y $x+m+n$ se denota por ${}_{m|n}\bar{a}_x$. Entonces

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}\bar{a}_x &= \int_m^{m+n} v^t \, {}_tp_x \, dt && (5.3.21)\\
&= \bar{a}_{\overline{x\,m+n|}} - \bar{a}_{\overline{x\,m|}} && (5.3.22)\\
&= \frac{\bar{A}_{\overline{x\,m|}} - \bar{A}_{\overline{x\,m+n|}}}{\delta} && (5.3.23)\\
&= {}_mE_x \, \bar{a}_{\overline{x+m\,n|}} && (5.3.24)
\end{aligned}
$$

Análogo a la función

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = \int_0^n (1+i)^{n-t} \, dt$$

en la teoría del interés, tenemos aquí

$$\bar{s}_{\overline{x\,n|}} = \frac{1}{{}_nE_x}\bar{a}_{\overline{x\,n|}} = \int_0^n \frac{{}_tE_x}{{}_nE_x}dt = \int_0^n \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}dt, \qquad (5.3.25)$$

representando el valor actuarial acumulado al final del plazo de una anualidad temporal a n años de una unidad monetaria anual pagaders continuamente mientras (x) sobreviva. Dicho valor está disponible a la edad $x+n$ sólo si (x) sobrevive.

Como un comentario final acerca de las anualidades vitalicias continuas, obtenemos una expresión para $d\,\bar{a}_x/dx$ al diferenciar la integral de la fórmula (5.3.2B), por tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,\bar{a}_x}{dx} &= \int_0^\infty v^t \left(\frac{\partial}{\partial x}\,{}_tp_x\right) dt = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \left(\mu_x - \mu_{x+t}\right) dt\\
&= \mu_x\bar{a}_x - \bar{A}_x\\
&= \mu_x\bar{a}_x - \left(1 - \delta\bar{a}_x\right),
\end{aligned}
$$

por tanto

$$\frac{d\,\bar{a}_x}{dx} = \left(\mu_x + \delta\right)\bar{a}_x - 1 \qquad (5.3.26)$$

La interpretación de (5.3.26) es que el valor presente actuarial cambia a una tasa que es una combinación de una tasa de interés del ingreso $\delta\bar{a}_x$, la tasa de beneficio de la sobrevivencia $\mu_x\bar{a}_x$ y la tasa del pago desembolsado.

Ejemplo 5.6

Obtenga fórmulas para

$$\text{a. } \frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x\overline{n}|} \qquad \text{b. } \frac{\partial}{\partial n}{}_{n|}\bar{a}_x$$

Solución

a. Procediendo como en el desarrollo de (5.3.26), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x\overline{n}|} &= \mu_x \bar{a}_{x\overline{n}|} - \bar{A}^{1}_{x\overline{n}|} \\ &= \mu_x \bar{a}_{x\overline{n}|} - \left(1 - \delta \bar{a}_{x\overline{n}|} - {}_nE_x\right) \\ &= \left(\mu_x + \delta\right)\bar{a}_{x\overline{n}|} - \left(1 - {}_nE_x\right)\end{aligned}$$

b. $\dfrac{\partial}{\partial n}{}_{n|}\bar{a}_x = \dfrac{\partial}{\partial n}\int_n^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt = -v^n \, {}_np_x$ ∇

El cuadro 5.1 resume los conceptos para anualidades vitalicias continuas.

Cuadro 5.1 Resumen de anualidades continuas (anualidad de una unidad al año pagadera continuamente)

Nombre de la Anualidad	Variable aleatoria del Valor Presente Y	Valor presente actuarial igual a $E[Y]$
Anualidad vitalicia	$\bar{a}_{\overline{T}\|} \quad T \geq 0$	$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt$
Anualidad temporal a n años	$\begin{cases}\bar{a}_{\overline{T}\|} & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}\|} & T \geq n\end{cases}$	$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt$
Anualidad vitalicia diferida a n años	$\begin{cases}0 & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}\|} - \bar{a}_{\overline{n}\|} & T \geq n\end{cases}$	${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt$
Anualidad vitalicia con periodo de garantía de n años	$\begin{cases}\bar{a}_{\overline{n}\|} & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}\|} & T \geq n\end{cases}$	$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt$

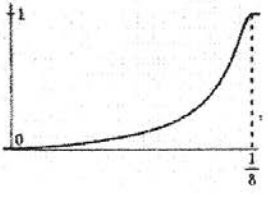
Nombre de la Anualidad	Variable aleatoria del Valor Presente Y	Valor presente actuarial igual a $E[Y]$
Anualidad temporal a n años, diferida m años	$\begin{cases} 0 & 0 \le T < m \\ \overline{a}_{\overline{T}\rceil} - \overline{a}_{\overline{m}\rceil} & m \le T < m+n \\ \overline{a}_{\overline{m+n}\rceil} - \overline{a}_{\overline{m}\rceil} & T \ge m+n \end{cases}$	${}_{m\|n}\overline{a}_x = {}_{m\|}\overline{a}_{x\overline{n}\rceil} = \int_m^{m+n} v^t \, {}_tp_x \, dt$

Las relaciones adicionales son:

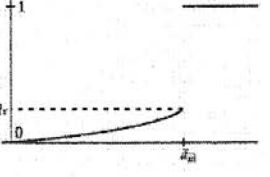
- $1 = \delta \overline{a}_x + \overline{A}_x$
- $1 = \delta \overline{a}_{x\overline{n}\rceil} + \overline{A}_{x\overline{n}\rceil}$
- ${}_{n\|}\overline{a}_x = \overline{a}_x - \overline{a}_{x\overline{n}\rceil}$
- $\overline{s}_{x\overline{n}\rceil} = \dfrac{\overline{a}_{x\overline{n}\rceil}}{{}_nE_x} = \int_0^n (1+i)^{n-t} \dfrac{l_{x+t}}{l_{x+n}} dt$

Cuadro 5.1.1. Funciones de Distribuciones Típicas del valor presente de la variable aleatoria Y de las primeras cuatro expresiones.

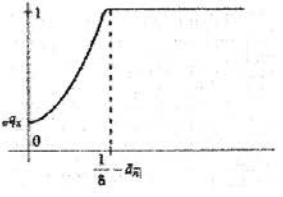
(a) Anualidad Vitalicia



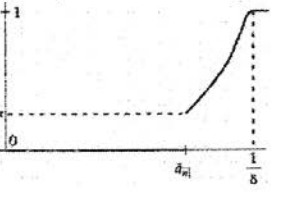
b) Anualidad temporal a n años



(c) Anualidad vitalicia diferida a n años



d) Anualidad vitalicia con periodo de garantía de n años



5.4 Anualidades vitalicias discretas

La teoría de las anualidades vitalicias discretas es análogo su desarrollo, a la teoría de las anualidades vitalicias continuas, con las integrales reemplazadas por sumas, integrados por sumandos, y diferenciales por diferencias. Para anualidades continuas no hubo distinción entre pagos al inicio de los intervalos de pago o al final, es decir, entre anualidades de pago anticipado y anualidades de pago al final del periodo. La distinción es significativa para las anualidades discretas, y empezaremos con las anualidades de pago anticipado ya que tienen el papel más destacado en aplicaciones actuariales. Por ejemplo, la mayoría de los seguros de vida individuales se compran mediante una anualidad de pago anticipado con primas periódicas.

Consideremos $\ddot{a}_x$, el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia de un pago anticipado de una unidad que se paga al principio de cada año mientras (x) sobreviva. Como el valor presente actuarial del pago anticipado en el tiempo k es

$$ {}_kE_x = v^k \ {}_kp_x, $$

de la técnica de pago corriente tenemos

$$ \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_kp_x \tag{5.4.1} $$

En términos de la función de sobrevivencia, l_x, la fórmula (5.4.1) es

$$ \ddot{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ l_{x+k} \tag{5.4.2} $$

Entonces, por la interpretación del grupo de sobrevivencia de la tabla de mortalidad, $\ddot{a}_x$ es la cantidad que cada una de los l_x vivos a la edad x deben aportar a un fondo para que el mismo, con interés, pueda pagar una unidad monetaria a cada de uno de los l_{x+k} sobrevivientes a la edad $x+k$; $k = 0,1,2,....$

Para utilizar la técnica del pago agregado, consideramos el valor presente de los pagos de anualidades de la variable aleatoria $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, en donde la variable aleatoria K es el tiempo futuro de vida truncado de (x). Luego

$$\ddot{a}_x = E[Y] = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_{k|}q_x \qquad (5.4.3)$$

como $\Pr[K=k] = {}_{k|}q_x$. Mediante el Teorema 3.2, y el uso de la relación

$$\Delta\, \ddot{a}_{\overline{k+1}|} = v^{k+1}$$

(5.4.3) se convierte en

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k+1}p_x$$

que es equivalente a (5.41).

De (5.4.3) obtenemos en seguida

$$\ddot{a}_x = E\left[\frac{1-v^{K+1}}{d}\right]$$
$$= \frac{1}{d}\left[1 - A_x\right] \qquad (5.4.4)$$

y

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|} A_x \qquad (5.4.5)$$
$$1 = d\,\ddot{a}_x + A_x \qquad (5.4.6)$$

Estas deberán compararse con sus contrapartes continuas (5.3.6), (5.3.7) y (5.3.4). La fórmula (5.4.6) indica que una unidad invertida ahora producirá un interés anticipado de d por año mientras (x) sobrevive, más el reembolso de la unidad al final del año del fallecimiento de (x).

La fórmula de la varianza es

$$Var\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right] = Var\left[\frac{1-v^{K+1}}{d}\right] = \frac{1}{d^2} Var\left[v^{K+1}\right]$$
$$= \frac{1}{d^2}\left[{}^{2}A_x - (A_x)^2\right] \qquad (5.4.7)$$

[Veáse (5.3.8)]

El valor presente actuarial de una anualidad temporal a n años de una unidad monetaria que se paga al principio de cada año mientras (x) sobrevive, se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. La técnica de pago corriente produce la fórmula

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x \tag{5.4.8}$$

Por el enfoque de pago agregado, definimos

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & K \ge n \end{cases} \tag{5.4.9}$$

y establecemos

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y]$$

Pero como $Y = (1-Z)/d$ en donde

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & 0 \le K < n \\ v^n & K \ge n \end{cases}$$

es la variable aleatoria del valor presente para una unidad de seguro dotal, pagadera al final del año del fallecimiento, o a la conclusión del periodo por sobrevivencia, tenemos

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}(1 - E[Z]) = \frac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n}|}) \tag{5.4.10}$$

[Veáse (5.3.13)]

Reacomodando (5.4.10) produce

$$1 = d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \tag{5.4.11}$$

[veáse (5.3.11)].

Para calcular la varianza, podemos utilizar

$$Var[Y] = \frac{1}{d^2} Var[Z] = \frac{1}{d^2}\left[{}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2 \right] \tag{5.4.12}$$

[veáse el cuadro 4.2, nota de pie de página (1)]

El valor presente actuarial de una unidad monetaria que se otorgará a una persona de edad (x) una vez que ésta sobreviva a edad $x+n$, (diferida n años) pagadera al principio de cada año en adelante si sobrevive, se denota por ${}_{n|}\ddot{a}_x$. Aquí

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \, {}_kP_x \tag{5.4.13} $$

$$ = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.4.14} $$

$$ = \frac{A_{x:\overline{n}|} - A_x}{d} \tag{5.4.15} $$

$$ = {}_nE_x \, \ddot{a}_{x+n} \tag{5.4.16} $$

[véanse (5.3.16)-(5.3.19).

El valor actuarial acumulado al final del plazo de una anualidad temporal de pago anticipado a n años, de una unidad monetaria a cada año que se paga mientras (x) sobrevive, se representa por $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$. Las fórmulas de esta función son

$$ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.4.17} $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_kE_x}{{}_nE_x} $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}} \tag{5.4.18} $$

que son análogas a las fórmulas para $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ en la teoría del interés.

Para anualidades donde el pago se realiza al final de cada periodo anual, las notaciones $\ddot{a}$ y $\ddot{s}$ se reemplazan por a y s. Por tanto a_x representa el valor presente actuarial de una anualidad de una unidad monetaria que se paga al final de cada año mientras (x) sobrevive. Las fórmulas para a_x pueden obtenerse mediante métodos similares a los que ya se utilizaron para anualidades de pago anticipado o puede uno usar las relaciones entre los valores de dos tipos de anualidades. Ya que la anualidad vitalicia de pago al final del periodo difiere de la anualidad vitalicia de pago anticipado sólo por el pago inicial,

$$ a_x = \ddot{a}_x - 1 \tag{5.4.19} $$

$$ = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, {}_kP_x \tag{5.4.20} $$

Alternativamente,

$$a_x = E\left[a_{\overline{K}|}\right] \tag{5.4.21}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|}\, {}_{k|}q_x$$

De la fórmula (5.4.21), se sigue que

$$a_x = E\left[\frac{1-v^K}{i}\right]$$
$$= E\left[\frac{1-(1+i)v^{K+1}}{i}\right]$$
$$= \frac{1}{i}\left[1-(1+i)A_x\right],$$

y puede rescribirse ya sea como

$$a_x = a_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|} A_x \tag{5.4.22}$$

o como

$$1 = i\, a_x + (1+i) A_x \tag{5.4.23}$$

La fórmula (5.4.23) tiene significado para los estatutos de impuestos sobre los bienes patrimoniales. Para cada unidad de un bien patrimonial defina $i\, a_x$ como el ***bien patrimonial vitalicio*** y $(1+i)A_x = 1 - i\, a_x$ como el ***residuo***.

El valor presente actuarial de una anualidad temporal a n años de una unidad monetaria que se paga al final de cada año, mientras (x) sobrevive se denota con $a_{x\overline{n}|}$, y puede expresarse como

$$a_{x\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k\, {}_kp_x \tag{5.4.24}$$

o como

$$a_{x\overline{n}|} = \ddot{a}_{x\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x \tag{5.4.25}$$

En la última fórmula, ${}_nE_x$ es el valor presente actuarial del pago vencido al final de n años bajo la anualidad inmediata pero no bajo la vencida. La fórmula puede reacomodarse como

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 + a_{x\overline{n-1}|}. \tag{5.4.26}$$

Para una anualidad diferida de unidad monetaria que se paga al final de cada año mientras (x) sobreviva después de la edad $x+n$, denotamos el valor actuarial presente con ${}_{n|}a_x$ y se tienen las fórmulas

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}a_x &= \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \, {}_kp_x && (5.4.27)\\
&= a_x - a_{\overline{x:n}|} && (5.4.28)\\
&= {}_nE_x \; a_{x+n} && (5.4.29)
\end{aligned}
$$

Esta sección concluirá con las fórmulas que relacionan las funciones de $\ddot{a}$, a y A. Tenemos

$$
\begin{aligned}
A_x &= E\left[v^{K+1}\right]\\
&= E\left[a_{\overline{K+1}|} - a_{\overline{K}|}\right]\\
&= E\left[v\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - a_{\overline{K}|}\right]\\
&= v\,\ddot{a}_x - a_x
\end{aligned}
\qquad (5.4.30)
$$

Para interpretar (5.4.30), notamos que los pagos de v al inicio de cada año mientras (x) sobreviva, provistos por $v\,\ddot{a}_x$, quedarán compensados por los pagos equivalentes de una unidad monetaria que se paga al final de cada año, provistos por a_x, excepto en el año del fallecimiento. Por lo tanto el lado derecho de (5.4.30) es equivalente a la unidad monetaria al final del año del fallecimiento de (x), es decir a A_x.

Para un seguro temporal a n años, la relación correspondiente es

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} \qquad (5.4.31)$$

También, para un seguro dotal a n años

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

Sustituyendo de (5.4.31) y usando la relación

$$a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n-1}|} + {}_nE_x$$

nos conduce a

$$A_{x:\overline{n}|} = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|} \qquad (5.4.32)$$

El cuadro 5.2 Resume conceptos para anualidades discretas de vida

Cuadro 5.2 Resumen de anualidades discretas de vida [anualidades de una unidad monetaria por año pagaderas al principio de cada año (anualidades vencidas) o al final de cada año (anualidades inmediatas)]

Nombre de la Anualidad	Valor presente de la variable Y		Valor presente Actuarial $E[Y]$ igual a
	Anualidad vida entera (vitalicia)		
• Anticipada	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$	$K \geq 0$	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_kp_x$
• Vencida	$a_{\overline{K}\rceil}$	$K \geq 0$	$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, {}_kp_x$
	Anualidad temporal n años		
• Anticipada	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$	$0 \leq K < n$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x$
	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$K \geq n$	
• Vencida	$a_{\overline{K}\rceil}$	$0 \leq K < n$	$a_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_kp_x$
	$a_{\overline{n}\rceil}$	$K \geq n$	
	Anualidad vida entera (vitalicia) diferida n años		
• Anticipada	0	$0 \leq K < n$	${}_{n\vert}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \, {}_kp_x$
	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$K \geq n$	
• Vencida	0	$0 \leq K < n$	${}_{n\vert}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \, {}_kp_x$
	$a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{n}\rceil}$	$K \geq n$	
	Las relaciones adicionales son		
• $1 = d\,\ddot{a}_x + A_x$		• $A_{x:\overline{n}\rceil} = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} - a_{x:\overline{n-1}\rceil}$	
• $A_x = v\,\ddot{a}_x - a_x$		• ${}_{n\vert}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	
• $1 = d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + A_{x:\overline{n}\rceil}$		• $\ddot{s}_{x:\overline{n}\rceil} = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}{{}_nE_x}$ $= \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{n-k} \, \dfrac{l_{x+k}}{l_{x+n}}$	
• $\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = 1 + a_{x:\overline{n-1}\rceil}$			
• $A^1_{x:\overline{n}\rceil} = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} - a_{x:\overline{n}\rceil}$			

5.5 Anualidades con pagos fraccionado (*m*-ésimos de año)

En la práctica, las anualidades de vida a menudo son pagaderas en una base mensual, trimestral o semestral. Al igual que para la notación anual, el valor actuarial presente de una anualidad de vida de una unidad monetaria por año, que es fraccionada en $1/m$ de la unidad monetaria y es pagada a plazos de $1/m$ de tiempo (base anual) al principio de cada periodo $(1/m)$ mientras (x) sobreviva, se denota como $\ddot{a}_x^{(m)}$.

Para tal efecto, debemos analizar la distribución de Y, valor presente de la anualidad anticipada, con pagos de $\frac{1}{m}$ de unidad monetaria, efectuados a cada m-ésimo de tiempo ($\frac{1}{m}$ de año), pero expresando Y en términos de la tasa de interés y las variables aleatorias K y $J=\lfloor (T-K)m \rfloor$, donde "$\lfloor\ \rfloor$" representa la parte entera del desarrollo mostrado. Para una anualidad anticipada de pagos de $\frac{1}{m}$ de unidad monetaria efectuado, efectuados a cada m-ésimo de tiempo ($\frac{1}{m}$ de año) es:

$$Y = \sum_{j=0}^{mK+J} \frac{1}{m} v^{J/m} = \ddot{a}_{\overline{K+(J+1)/m}|}^{(m)} = \frac{1-v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}$$

el valor esperado de la variable aleatoria Y cuando K es de por vidas (los pagos -infinito)

$$E[Y] = \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1-A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

Por el procedimiento de pago corriente, el valor presente de de este conjunto de pagos es:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m}\, {}_{h/m}p_x \qquad (5.5.1)$$

De igual forma podríamos obtener la varianza de Y, por lo que

$$Var(Y) = \frac{Var\left(v^{K+(J+1)/m}\right)}{\left(d^{(m)}\right)^2} = \frac{{}^2A_x^{(m)} - \left(A_x^{(m)}\right)^2}{\left(d^{(m)}\right)^2}$$

Por otra parte, partiendo de (5.5.1), podemos obtener varias relaciones entre el valor presente actuarial para m-ésimos de pagos anuales con pagos anuales.

$$1 = d\ \ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ \ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)} \tag{5.5.2}$$

Esto se sigue del hecho de que una inversión de una unidad monetaria produce intereses al principio de cada periodo y pagos de la unidad al final de cada periodo, en el cual la muerte ocurre. (Para una prueba más de la relación (5.5.2), vea (5.4.4), (5.4.6) y el ejercicio 5.14)

De los dos miembros de la derecha de (5.5.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}\left[A_x^{(m)} - A_x\right] \\ &= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ \ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}\left[A_x^{(m)} - A_x\right]\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Esto puede ser interpretado como sigue: El m-ésimo pago de una anualidad vitalicia es equivalente a una serie de anualidades ciertas a un año con edades iniciales (x), con cancelación en el año de muerte. La cancelación esta completada con el pago del m-ésimo perpetuamente, empezando al final del m-ésimo de la muerte menos una perpetuidad al final del año de muerte.

Alternativamente, podríamos de (5.5.2) escribir

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} A_x^{(m)} \tag{5.5.4}$$

la parte que esta a la izquierda queda a interpretación del lector.

Ahora, suponga una distribución uniforme de fallecimiento en cada año (x) y recuerde que bajo esta hipótesis

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x = s_{\overline{1}|}^{(m)} A_x$$

(vea Ejercicio 4.15). Entonces (5.5.3) llega a ser

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} A_x \tag{5.5.5}$$

lo cual muestra el término de cancelación para el año de muerte, en términos de la función estándar A_x.

Sustituyendo $1-d\ddot{a}_x$ por A_x en (5.5.5) y notando que $d^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = d$, obtenemos una fórmula en términos de anualidades, llamémosle,

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1-s_{\overline{1}|}^{(m)}\left(1-d\,\ddot{a}_x\right)}{d^{(m)}} \\ &= s_{\overline{1}|}^{(m)}\,\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\,\ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)}-1}{d^{(m)}}\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

La fórmula (5.5.6) no se interpreta directamente pero tiene la ventaja de que expresa $\ddot{a}_x^{(m)}$ en términos de las funciones de anualidad únicamente. También es más comparable con la aproximación tradicional para $\ddot{a}_x^{(m)}$. Esta puede obtenerse para $\ddot{a}_x^{(m)}$ aplicando la fórmula de sumatoria de Woolhouse al miembro derecho de (5.5.1), es decir suponiendo que la función $v^{k+(j/m)}{}_{k+(j/m)}p_x$ es lineal en j, para $j=0,1,2,\ldots,m-1$, es este caso,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}v^{k+(j/m)}{}_{k+(j/m)}p_x &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}\left[\left(1-\frac{j}{m}\right)v^k{}_kp_x + \frac{j}{m}v^{k+1}{}_{k+1}p_x\right] \\ &= v^k{}_kp_x - \left(v^k{}_kp_x - v^{k+1}{}_{k+1}p_x\right)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j}{m^2} \\ &= v^k{}_kp_x - \frac{m-1}{2m}\left(v^k{}_kp_x - v^{k+1}{}_{k+1}p_x\right)\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

Así

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}v^{k+(j/m)}{}_{k+(j/m)}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}v^k{}_kp_x - \frac{m-1}{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(v^k{}_kp_x - v^{k+1}{}_{k+1}p_x\right) \\ &\cong \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\end{aligned} \tag{5.5.8}$$

que también se obtiene del supuesto de que la función conmutativa

$$D_{x+h/m} = v^{x+h/m}\,l_{x+h/m}$$

es una función lineal (suponiendo que los fallecimientos se distribuyen en forma lineal en un intervalo de un año),

$$D_x - \frac{h}{m}[D_x - D_{x+1}]$$

en cada año de edad (veáse ejercicio 5.15). Debe notarse que la linealidad de $D_{x+h/m}$ en cada año de edad no es la misma que la de $l_{x+h/m}$ en cada año de edad, lo que es el caso bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos. El uso consistente del supuesto de la distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad asegura que las relaciones como

$$1 = d^{(m)}\,\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$$

sean satisfechas exactamente. También se ha observado que las fórmulas derivadas de (5.5.8) pueden, para tasas altas de interés y tasas bajas de mortalidad, producir valores anuales distorsionados como $\ddot{a}_{x:\overline{1}|}^{(12)} > \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}$. Por estas razones, (5.5.5) y la equivalente (5.5.6) se presentan como reemplazos para la aproximación tradicional (5.5.8).

Es conveniente para propósitos de escritura expresar (5.5.6) en la forma

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\,\ddot{a}_x - \beta(m) \tag{5.5.9}$$

donde

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)}\,\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{i\,d}{i^{(m)}d^{(m)}} \tag{5.5.10}$$

y

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}} \tag{5.5.11}$$

Notamos que $\alpha(m)$ y $\beta(m)$ dependen sólo de m y la tasa de interés, y son independientes del año de edad. Además, para $m=1$, (5.5.9) es una identidad donde $\alpha(1)=1$ y $\beta(1)=0$. También, $\beta(m)$ es el coeficiente del término de cancelación en (5.5.5); es decir, (5.5.5) puede escribirse como

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\,\ddot{a}_x - \beta(m)\,A_x \tag{5.5.12}$$

Para expansión de las series de $\alpha(m)$ y $\beta(m)$, ver ejercicio 5.44.

Ejemplo 5.7

En base a la Tabla de mortalidad Ilustrativa, con tasa anual efectiva de interés del 6%, calcule el valor presente actuarial para una anualidad anticipada vitalicia de 1000 por mes para una edad de retiro de 65 años.

Solución:

Aquí

$$\alpha(12) = s_{\overline{1}|}^{(12)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)} = (1.02721070)(0.97378368) = 1.0002810$$

$$\beta(12) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(12)} - 1}{d^{(12)}} = 0.46811951$$

$$\frac{11}{24} = 0.45833333$$

Observe que $\alpha(12) \cong 1$, y $\beta(12)$ esta muy próximo a 11/24 que aparece en la aproximación tradicional.

Por la Tabla de mortalidad Ilustrativa, como esta definida por (3.7.1), con tasa de interés al 6%,

$$\ddot{a}_{65} = 9.89693$$

$$A_{65} = 1 - d\ddot{a}_{65} = 0.4397965$$

$$1000\mu_{65} = 0.7 + 0.05\left(10^{0.04}\right)^{65} = 20.605359$$

Entonces, $12{,}000\ \ddot{a}_{65}^{(12)}$ puede calcularse como sigue:

Por (5.5.12),

$$\begin{aligned} &12{,}000\left[\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}\ddot{a}_{65} - \beta(12)A_{65}\right] \\ &= 12{,}000\left[(0.97378368)(9.89693)\right] \\ &\quad -(0.46811951)(0.4397965) \\ &= 113{,}179 \end{aligned}$$

Por (5.5.8),

$$12{,}000\left(\ddot{a}_{65} - \frac{11}{24}\right) = 113{,}263$$

Por (5.5.7),

$$12{,}000\left(\ddot{a}_{65} - \frac{11}{24} - \frac{143}{1728}(\mu_{65} + \delta)\right) = 113{,}185$$

Las fórmulas (5.5.9) y (5.5.12) son algebraicamente equivalentes y por lo tanto deben producir el mismo valor.

Ahora que los pagos han sido establecidos para pagos cada m-ésimo de periodos de una anualidad vitalicia, es fácil desarrollar expresiones para anualidades temporales y diferidas. Entonces de (5.5.12), tenemos

$$\begin{aligned}
&\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_{n}E_{x}\ \ddot{a}^{(m)}_{x+n} \\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ \ddot{a}_{x} - \beta(m) A_{x} - {}_{n}E_{x}\left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ \ddot{a}_{x+n} - \beta(m) A_{x+n}\right] \\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ \ddot{a}_{x+n} - \beta(m) A^{1}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned} \tag{5.5.13}$$

Análogamente,

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_{x} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ {}_{n|}\ddot{a}_{x} - \beta(m)\,{}_{n|}A_{x} \tag{5.5.14}$$

y de (5.5.9)

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)\left[1 - {}_{n}E_{x}\right] \tag{5.5.15}$$

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_{x} = \alpha(m)\,{}_{n|}\ddot{a}_{x} - \beta(m)\,{}_{n}E_{x} \tag{5.5.16}$$

Alternativamente, uno puede desarrollar fórmulas para pagos cada m-ésimo de periodos de anualidades vencidas en términos de funciones para pagos anuales de anualidades vencidas, por medio de relaciones tales como

$$1 = i\,a_{x} + (1+i)A_{x} = i^{(m)}a^{(m)}_{x} + \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)A^{(m)}_{x} \tag{5.5.17}$$

Esta relación se obtiene al considerar la variable aleatoria del valor presente de una unidad monetaria particionada en m-ésimos de unidad, que se paga a cada m-ésimo de tiempo, con K y J ya indicadas al inicio de esta sección.

$$\Upsilon = a^{(m)}_{\overline{K+(J/m)}|} = \frac{1 - v^{K+(J/m)}}{i^{(m)}}$$

[Análogas a las relaciones (5.5.2)]. El significado aquí es que una inversión de una unidad monetaria producirá interés al final del periodo más los reembolsos de la unidad junto con el interés entonces vencido al final del periodo en el que ocurre el fallecimiento. Esto se verá adicionalmente en los ejercicios 5.17 - 5.20. Las fórmulas tradicionales se presentan en el ejercicio 5.21.

Los valores de anualidades anticipadas con pagos cada m-ésimo de periodos puede obtenerse ajustando los valores de las correspondientes anualidades vencidas, por ejemplo.

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m}\left(1 - {}_nE_x\right)$$

5.6 Fórmulas de funciones conmutadas para anualidades con pagos nivelados

La función $D_x = v^x l_x$ fue introducida en el capítulo 4 para la valoración de los seguros. Ahora reexaminaremos su papel en la valoración de los pagos contingentes de sobrevivencia. En (4.2.6), $A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = {}_nE_x$ fue expresado como D_{x+n}/D_x. De aquí que (5.2.3) pueda escribirse como

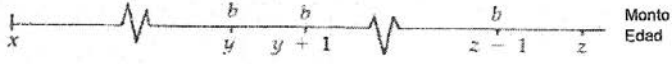
$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{v^x l_x}{v^{x+n} l_{x+n}} = \frac{D_x}{D_{x+n}}. \tag{5.6.1}$$

Expresado en forma más general, el valor actuarial a la edad x de un pago b a la edad y es

$$\frac{bD_y}{D_x} \tag{5.6.2}$$

El lector deber verificar esta fórmula para el caso en que $x < y$ donde representa un valor presente actuarial, y para el caso en que $x > y$ donde representa un valor actuarial acumulado.

Consideremos ahora una anualidad de (x) con pagos como se señalan sobre la línea del diagrama, figura 5.1.



Por (5.6.2), el valor actuarial a la edad x de los pagos de anualidades a las edades $y, y+1, \ldots, z-1$ es

$$\frac{b}{D_x}\sum_{u=y}^{z-1} D_u$$

ahora, introduciendo la función $N_x = \sum_{u=x}^{\infty} D_u$, encontramos el valor de la anualidad expresada como

$$\frac{b}{D_x}(N_y - N_z) \tag{5.6.3}$$

Aquí x es la edad a la cual el valor actuarial va a ser calculado, y es la edad a la cual se hace el primer pago anual con un valor b, y z es la edad a un año después del último pago anual, b. Notamos que x podría tener cualquier relación con y y z; esto es, x podría ser menor que, igual a o más grande que cualquier y o z.

La utilidad de las funciones conmutativas está casi completamente restringida a aplicaciones donde se asumen una tasa constante de interés y una tabla de mortalidad específica. En donde se hacen más consideraciones generales, pueden requerirse más funciones básicas. Donde se asumen tasas constantes, tales funciones pueden aún ser preferidas. Sin embargo, si están disponibles las tablas para las funciones D_x y N_x uno tiene formas más flexibles y directas para calcular los valores de las anualidades utilizando fórmulas tales como (5.6.3). En lugar de rescribir fórmulas en términos de D_x y N_x para las distintas formas de las anualidades, simplemente notaremos que las fórmulas generales (5.6.2) y (5.6.3) son suficientes para la mayoría de los propósitos en los que se usan las funciones conmutativas para valuar las anualidades de pago anual.

Para valuar las anualidades de pagos mensuales, observamos que (5.5.1) puede escribirse como

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{mD_x}\sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h/m} \tag{5.6.4}$$

que sugiere la introducción de una función

$$N_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h/m} \tag{5.6.5}$$

Luego

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x}$$

Si ahora suponemos una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \\ &= \frac{\alpha(m)N_x - \beta(m)D_x}{D_x} \end{aligned}$$

y al comparar las dos fórmulas para $\ddot{a}_x^{(m)}$ obtener una fórmula para $N_x^{(m)}$, esto es,

$$N_x^{(m)} = \alpha(m)N_x - \beta(m)D_x \tag{5.6.6}$$

En la práctica, con base en (5.5.8), también se usa la aproximación

$$N_x^{(m)} \cong N_x - \frac{m-1}{2m}D_x \tag{5.6.7}$$

Sin embargo, (5.6.6) sigue consistentemente el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad.

Si está disponible la función $N_x^{(m)}$, una fórmula general de valuación para anualidades con nivel de pagos mensual, en analogía con (5.6.3), es

$$\frac{b}{D_x}(N_y^{(m)} - N_z^{(m)}) \tag{5.6.8}$$

en donde b es el nivel del ingreso anual y b/m es el pago m-ésimo.

Ejemplo 5.8

Exprese, en términos de funciones conmutativas, el valor presente actuarial de una anualidad diferida de 1,000 al mes, donde el primer pago se hace a la edad de 65 años para una persona con edad actual de 25años.

Solución

El ingreso anual es 12 000, y el valor requerido es

$$\frac{12{,}000N_{65}^{(12)}}{D_{25}}$$

donde $N_{65}^{(12)} = \alpha(12)N_{65} - \beta(12)D_{65}$.

Ejemplo 5.9

Exprese, en términos de funciones conmutativas, el valor actuarial acumulado a la edad de 65 años con pagos mensuales de 100 al principio de cada mes durante la sobrevivencia de una persona de edad 25 años a la edad de 65 años.

Solución

Aquí la aplicación de (5.6.8) produce

$$\frac{1200}{D_{65}}\left[N_{25}^{(12)} - N_{65}^{(12)}\right]$$

Regresando ahora a (5.6.4) y dejando que $m \to \infty$, obtenemos

$$\bar{a}_x = \frac{1}{D_x}\int_0^\infty D_{x+t}\,dt \tag{5.6.9}$$

que sugiere la definición

$$\bar{N}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\,dt = \int_x^\infty D_y\,dy \tag{5.6.10}$$

Además, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, tenemos, al igual que para (5.6.6),

$$\bar{N}_x = \alpha(\infty)N_x - \beta(\infty)D_x$$

donde, de (5.5.10) y (5.5.11),

$$\alpha(\infty) = \bar{s}_{\overline{i}|} \, \bar{a}_{\overline{i}|} = \frac{i\,d}{\delta^2} \tag{5.6.11}$$

$$\beta(\infty) = \frac{i-\delta}{\delta^2} \tag{5.6.12}$$

Para la expansión de series de $\alpha(\infty)$, $\beta(\infty)$, ver el ejercicio 5.44.

En la práctica se utiliza la fórmula,

$$\overline{N}_x \cong N_x - \frac{1}{2} D_x \tag{5.6.13}$$

que puede obtenerse aplicando la regla trapezoidal para evaluar la integral de (5.6.9), o dejando que $m \to \infty$ en (5.6.7).

Con estas nuevas funciones, una fórmula general para valuar el nivel de ingreso de anualidades continuas, es

$$\frac{b}{D_x}(\overline{N}_y - \overline{N}_z) \tag{5.6.14}$$

5.7 Anualidades variables

Aquí consideraremos el problema de valuar anualidades para las que el ingreso anual, pagadero en plazos mensuales, cambia anualmente. Supongamos que la secuencia de ingresos anuales es $b_x, b_{x+1}, \ldots, b_y, \ldots, b_{x+n-1}$ y que los pagos se hacen al principio de los intervalos m-ésimos interrumpiéndose en la edad $x+n$. El valor presente actuarial a la edad y de los pagos a realizarse durante el año de edad $(y, y+1)$ es $b_y \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|}$, y que el valor presente actuarial, $(apv)_x$ a la edad x, de la anualidad entera puede expresarse como

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} v^{y-x} {}_{y-x}E_x \tag{5.7.1}$$

Si se supone una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad, tenemos de (5.5.15)

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \left[\alpha(m) - \beta(m)(1 - {}_1E_y)\right] \, {}_{y-x}E_x \tag{5.7.2}$$

Si se prefiere trabajar con funciones conmutativas, puede rescribirse (5.7.2) en la forma

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \left[\alpha(m) D_y - \beta(m)(D_y - D_{y+1})\right] \tag{5.7.3}$$

Si definimos

$$D_y^{(m)} = N_y^{(m)} - N_{y+1}^{(m)}$$

vemos de (5.6.6) que

$$D_y^{(m)} = \alpha(m) D_y - \beta(m)(D_y - D_{y+1}) \tag{5.7.4}$$

Por lo tanto, (5.7.3) se convierte en

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y D_y^{(m)} \tag{5.7.5}$$

Se bosquejarán fórmulas paralelas para anualidades inmediatas variables. La fórmula correspondiente a (5.7.1) es

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \, a_{y\overline{1}|}^{(m)} \, {}_{y-x}E_x \tag{5.7.6}$$

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad,

$$a_{y\overline{1}|}^{(m)} = \ddot{a}_{y\overline{1}|}^{(m)} - \frac{1}{m}(1 - {}_1E_y) = \alpha(m) - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right]\left[1 - {}_1E_y\right]$$

Correspondiendo a (5.7.3), ahora es

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \left\{\alpha(m) D_y - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right]\left[D_y - D_{y+1}\right]\right\} \tag{5.7.7}$$

que sugiere la definición

$$\overline{D}_y^{(m)} = \alpha(m)D_y - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right]\left[D_y - D_{y+1}\right] \tag{5.7.8}$$

Entones (5.7.7) se convierte en

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x}\sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \overline{D}_y^{(m)} \tag{5.7.9}$$

Para aplicaciones, vea el ejercicio 5.24.

Cuando los ingresos anuales son nivelados, es decir, $b_y = b$ (una constante), (5.7.5) se simplifica a $(b/D_x)\left[N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}\right]$. En otros casos especiales, en donde los ingresos anuales b_y son lineales en y, puede resultar útil introducir una función conmutativa $S_y^{(m)}$ donde

$$N_y^{(m)} = S_y^{(m)} - S_{y+1}^{(m)}$$

o

$$S_x^{(m)} = \sum_{y=x}^{\infty} N_y^{(m)} \tag{5.7.10}$$

No se elaborarán fórmulas para estos casos especiales, pero se explorarán algunas en los ejercicios 5.25 - 5.27.

Ejemplo 5.10

Con base en la Tabla de mortalidad Ilustrativa, con interés a la tasa anual efectiva de 6%, calcule

a. $N_{70}^{(12)}$ y $S_{70}^{(12)}$

b. el valor presente actuarial de una anualidad a edad 70 años con pagos mensuales de 100 unidades monetarias (u.m.) en el primer años, 110 u.m. en el segundo, y así sucesivamente, incrementándose el ingreso mensual en 10 u.m. por cada año subsiguiente.

Solución

a. Por (5.6.6),

$$\begin{aligned} N_{70}^{(12)} &= \alpha(12)N_{70} - \beta(12)D_{70} \\ &= (1.0002810)(9597.05) - (0.46811951)(1119.94) \\ &= 9075.48 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} S_{70}^{(12)} &= \alpha(12)S_{70} - \beta(12)N_{70} \\ &= 62,643.28 \end{aligned}$$

b. El valor presente actuarial puede escribirse como

$$\frac{12\left[90N_{70}^{(12)} + 10S_{70}^{(12)}\right]}{D_{70}} = 15.464$$

□

5.8 Ecuaciones recurrentes

Consideremos nuevamente una anualidad anticipada con pagos mensuales variables e ingresos anuales $b_x, b_{x+1}, \ldots, b_{x+n-1}$. Sea $(apv)_y$ que denote el valor presente actuarial a la edad y de los pagos de la anualidad de la edad y a la $x+n$; luego como puede observarse de (5.7.1),

$$(apv)_y = b_y\ \ddot{a}_{y:\overline{1}|}^{(m)} + {}_1E_y(apv)_{y+1} \tag{5.8.1}$$

es una ecuación recurrente para los cálculos sucesivos de los valores de $(apv)_y, y = x+n-1, x+n-2, \ldots, x$, con un valor inicial $(apv)_{x+n} = 0$. Pueden preferirse dichos cálculos recurrentes, que producen todos los valores de $(apv)_y$, $y = x, x+1, \ldots, x+n-1$, al cálculo de un valor único $(apv)_x$ mediante fórmulas como (5.7.1) o (5.7.5). Sin embargo, éstas últimas pueden resultar de utilidad para verificar errores de acumulación en el cálculo recurrente.

Como por ejemplo, si se desea una tabla de valores de $\ddot{a}_x^{(m)}$ para $x = c, c+1, \ldots, \omega-1$, puede procederse mediante la ecuación recurrente

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \ddot{a}_{y:\overline{1}|}^{(m)} + {}_1E_y\ \ddot{a}_{y+1}^{(m)} \tag{5.8.2}$$

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad,

$$\ddot{a}_{y:\overline{1}|}^{(m)} = \dot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} - \beta(m) v q_y$$

veáse (5.5.13)]. Luego

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \dot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} - \beta(m) v q_y + v p_y \, \ddot{a}_{y+1}^{(m)} \tag{5.8.3}$$

proporciona un medio recurrente de calcular, a partir de un valor inicial de $\ddot{a}_\omega^{(m)} = 0$, los valores sucesivos de $\ddot{a}_y^{(m)}$, $y = \omega - 1, \omega - 2, \ldots, c+1, c$. Para $m = 1$, las fórmulas se simplifican a

$$\begin{aligned} \ddot{a}_\omega &= 0 \\ \ddot{a}_y &= 1 + v p_y \, \ddot{a}_{y+1} \end{aligned} \tag{5.8.4}$$

que pueden interpretarse directamente.

Ejemplo 5.11

Demuestre que (5.8.3) puede reacomodarse

$$\ddot{a}_y^{(m)}(1+i) - \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(m)} + q_y \left[\beta(m) + \ddot{a}_{y+1}^{(m)} \right] = \ddot{a}_{y+1}^{(m)} \tag{5.8.5}$$

Proporcione una interpretación verbal de esta fórmula.

Solución:

Multiplique (5.8.3) por $(1+i)$, sustituya $1-q_y$ por p_y, después transponga los términos para obtener (5.8.5).

Si se utiliza la aproximación tradicional

$$\ddot{a}_y^{(m)} \cong \ddot{a}_y - \frac{m-1}{2m}$$

la fórmula comparable con (5.8.5) es

$$\ddot{a}_y^{(m)}(1+i)-\left(1+\frac{m+1}{2m}i\right)+q_y\left(\frac{m-1}{2m}+\ddot{a}_{y+1}^{(m)}\right)\cong \ddot{a}_{y+1}^{(m)} \qquad (5.8.6)$$

La fórmula (5.8.6) se utiliza en el análisis de pérdidas y ganancias de los sistemas de pensión. Ella indica que

(el valor presente actuarial, $\ddot{a}_y^{(m)}$, acumulado con el interés de un año)

- (el valor acumulado de los pagos m-ésimos del año)

+ (los valores de los pagos m-ésimo de los años futuros y los pagos corrientes que se espera se cancelen por el fallecimiento en el año corriente)

= (el valor presente actuarial de la anualidad desde la edad $y+1$).

La fórmula (5.8.6) tiene una interpretación similar bajo el supuesto de que

$$D_{x+t}=(1-t)D_x+t\,D_{x+1} \qquad 0\le t\le 1$$

mientras que (5.8.5) se basa en la distribución uniforme de fallecimientos.

∇

5.9 Anualidades vitalicias con pagos al final del periodo y anualidades anticipadas prorrateadas

En el caso de las anualidades continuas, el ingreso es pagadero continuamente hasta el momento del fallecimiento, y no hay un pago final de ajuste. Con anualidades discretas, particularmente aquellas con pagos anuales, podría surgir una pregunta acerca de tener un ajuste prorrateado tomando en cuenta la fecha del fallecimiento. Por ejemplo, si una anualidad vitalicia de pagos al final del periodo aporta pagos anuales de 5000, y el aportador muere un mes antes de la fecha de vencimiento del siguiente pago, puede haber un pago fraccionario final por los 11 meses que el aportante sobrevivió desde el último pago. Como otro ejemplo, si se compra un contrato de seguro de vida mediante primas anuales de 1000 pagaderas en los aniversarios de la fecha de expedición, y si el asegurado muere un mes antes de la fecha de aniversario, puede haber una prima de reembolso por los 11 meses que el asegurado no completó en el año de la póliza.

Denotamos con $\ddot{a}_x^{(m)}$ el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia de un año pagadero en entregas de $1/m$ al final de cada m-ésimo de un año mientras (x) sobreviva, más un pago de ajuste para tomar en cuenta el periodo entre la fecha del último pago m-ésimo y la fecha del fallecimiento. Para completar la definición de la anualidad necesitamos decidir sobre el pago de ajuste. Como un pago de $1/m$ al final de un m-ésimo un año es equivalente a los pagos continuos a la tasa

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1}|m|}}$$

por año durante el m-ésimo, deberemos escoger

$$\frac{1}{m}\frac{\bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{1}|m|}} \tag{5.9.1}$$

para realizar el pago de ajuste si el fallecimiento ocurre en el tiempo t en el m-ésimo del fallecimiento, $0 < t < 1/m$. Con esta definición del pago de ajuste, la anualidad vitalicia con pagos al final de cada periodo es exactamente equivalente a una anualidad continua con pagos a una tasa anual de

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1}|m|}} = \frac{1}{m}\frac{\delta}{(1+i)^{1/m}-1} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \tag{5.9.2}$$

Esto puede verse notando que, en cualquier m-ésimo de un año durante el que (x) sobreviva, la anualidad continua aporta pagos de valor

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1}|m|}}\bar{s}_{\overline{1/m}|} = \frac{1}{m}$$

al final del m-ésimo. Y, en el m-ésimo del fallecimiento, la anualidad continua aporta pagos equivalentes a

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1/m}|}}\bar{s}_{\overline{t}|}$$

al tiempo del fallecimiento, como lo hace la anualidad vitalicia. Por lo tanto, tenemos ahora

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{a}_x \tag{5.9.3}$$

que es análoga a la relación

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{a}_{\overline{n}|}$$

en la teoría del interés compuesto.

En la práctica, el pago de ajuste puede tomarse como t, aproximando (5.9.1). Sin embargo, resulta una teoría más simple si se toma en cuenta el interés y el ajuste es similar al de (5.9.1). Por ejemplo, notamos que en este último caso

$$\begin{aligned} 1 - i^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} &= 1 - \delta \bar{a}_x = \bar{A}_x \\ 1 &= i^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} + \bar{A}_x \end{aligned} \tag{5.9.4}$$

La interpretación de (5.9.4) es que una unidad monetaria invertida durante la vida de (x) producira un interés de $i^{(m)}/m$ al final de cada m-ésimo de un año mientras (x) sobreviva, más un ajuste de

$$\frac{i^{(m)}}{m} \frac{\bar{s}_{\overline{1}|}}{\bar{s}_{\overline{1/m}|}} = \delta \bar{s}_{\overline{1}|} = (1+i)^t - 1$$

por el interés en el m-ésimo del fallecimiento, más el repago de una unida monetaria al fallecimiento. (Para mayor profundidad en el pago de ajuste bajo $\ddot{a}_x^{(m)}$, vea el ejercicio 5.31 para el caso $m = 1$)

Veamos ahora la teoría paralela para las anualidades vencidas. Denotamos mediante $\ddot{a}_x^{[m]}$ el valor presente actuarial de una anualidad prorrateada de una unidad monetaria anual pagadero a plazos de $1/m$ al principio de cada m-ésimo de un año mientras (x) sobreviva, con un reembolso al fallecimiento a quien lo paga para tomar en cuenta el periodo entre la fecha del fallecimiento y la fecha del siguiente pago m-ésimo. Como un pago de $1/m$ al principio de un m-ésimo del año es equivalente a pagos continuos a la tasa

$$\frac{1}{m} \frac{1}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}}$$

por año durante el m-ésimo, escogemos

$$\frac{1}{m}\frac{\bar{a}_{\overline{1-t}|}}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}} \tag{5.9.5}$$

para ser el reembolso si el fallecimiento ocurre en el tiempo t en el m-ésimo del fallecimiento, $0 < t < 1/m$. La expresión (5.9.5) representa el reembolso equitativo al tiempo del fallecimiento de la porción no ganada del pago de $1/m$ al principio del m-ésimo del fallecimiento. Con esta definición del pago de reembolso, la anualidad vitalicia anticipada prorrateada es exactamente equivalente a una anualidad continúa con pagos a la tasa anual de

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}} = \frac{1}{m}\frac{\delta}{1-v^{1/m}} = \frac{\delta}{d^{(m)}} \tag{5.9.6}$$

Esto es,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x \tag{5.9.7}$$

y

$$1 - d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} = 1 - \delta\bar{a}_x = \bar{A}_x$$

o

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + \bar{A}_x \tag{5.9.8}$$

que se deja al lector para su interpretación.

Ejemplo 5.12

Establezca las fórmulas:

a. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

b. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

c. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^{1/m}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$

Solución:

a. $\overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x\overline{n}|} = \overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x} - {}_nE_x\ \overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x+n} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\left[\bar{a}_x - {}_nE_x\ \bar{a}_{x+n}\right] = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x\overline{n}|}$

b. $\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_nE_x\ \ddot{a}^{(m)}_{x+n} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\left[\bar{a}_x - {}_nE_x\ \bar{a}_{x+n}\right] = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x\overline{n}|}$

c. $\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{\delta}{v^{1/m}\,i^{(m)}}\bar{a}_{x\overline{n}|} = (1+i)^{1/m}\,\overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x\overline{n}|}$

La interpretación de (c) es que tanto $\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|}$ como $\overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x\overline{n}|}$ proporcionan a cada m-ésimo ingresos de una unidad monetaria por año, ajustados hasta la fecha del fallecimiento. Sin embargo, $\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|}$ representa los pagos a plazo, al principio de los intervalos de tiempo de cada m-esimo y $\overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x\overline{n}|}$ los pagos realizados al final. Es un interesante, aunque no obvio ejercicio ver cómo, en el intervalo de tiempo de un m-ésimo del fallecimiento, los pagos de $\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|}$ (que consisten de $1/m$ al principio del m-ésimo menos el reembolso al fallecimiento) tienen un valor de $(1+i)^{1/m}$ veces el ajuste aportado por $\overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x\overline{n}|}$.

De (5.9.3), (3.5.2), y del hecho de que $\lim_{\delta\to 0}(\delta/i)=1$, observamos que para $\delta = 0$

$$\overset{\circ}{a}_x = \bar{a}_x = \overset{\circ}{e}_x = \bar{a}_{\overline{\overset{\circ}{e}_x|}}$$

En este caso especial,

(el valor presente actuarial de una anualidad a la edad x)
= (al valor presente de una anualidad por tiempo fijo para un plazo igual a la esperanza de vida a la edad x).

Este es un concepto erróneo donde la igualdad que tenemos $\delta > 0$, pero el siguiente ejemplo demuestra lo contrario.

Ejemplo 5.13

Para $\delta > 0$, demuestre que

a. $\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{x:\omega-x}|}$ b. $a_x < a_{\overline{e_x}|}$ $x < \omega - 1$

Solución

a. Aquí es conveniente utilizar la desigualdad de Jensen mostrada en la figura 1.2. Reemplazamos la variable aleatoria X por la variable T del tiempo futuro de vida, y $u(X)$ por $\bar{a}_{\overline{T}|}$, y notamos que

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{a}_{\overline{t}|} = -\delta e^{-\delta t} < 0$$

para $\delta > 0$. Luego de (5.3.1), (1.3.2) y (3.5.1), tenemos que

$$\bar{a}_x = E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] < \bar{a}_{\overline{E[T]}|} = \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}$$

que demuestra la desigualdad.

b. El argumento similar para la anualidad discreta empieza con la variable K del tiempo futuro truncado de vida y la función $a_{\overline{k}|}$, $K = 0,1,2,\ldots$. La prueba de la desigualdad de Jensen no depende del tipo de distribución de la probabilidad (continua, discreta o mixta), pero si supone que la función $u(x)$ es diferenciable con $u''(x) < 0$. En nuestro ejemplo, estamos tratando con la función $a_{\overline{t}|} = (1 - e^{-\delta t})/i$, la que es diferenciable para cualquier orden y tiene

$$\frac{d^2}{dt^2}a_{\overline{t}|} = -\frac{\delta^2}{i}v^t < 0 \qquad \delta > 0$$

Entonces, por la desigualdad de Jensen,

$$a_x = E\left[a_{\overline{K}|}\right] \le a_{\overline{E[K]}|} = a_{\overline{e_x}|}$$

La desigualdad es estricta excepto cuando K es constante. Por ejemplo, cuando $x = \omega - 1$, K es 0 y la igualdad se mantiene. Para $x < \omega - 1$ y $\delta > 0$, tenemos $a_x < a_{\overline{e_x}|}$.

∇

La relación de $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_{\overline{x:\omega-x}|}$ se explora con mayor profundidad en el ejercicio 5.45.

5.10 Notas y referencias

Algunas referencias bibliográficas para la fórmula de la sumatoria de Woolhouse son Kellison (1975) o Jordan (1967). Ejemplos sobre la distorsión de los valores anuales basados en la aproximación tradicional se dan en los números de enero y abril de 1977 de "The Actuary". Taylor (1952) presentó nuevas fórmulas similares a (5.5.3). Varios estudios de la distribución de la probabilidad de los costos de las anualidades fueron realizados por Boermeester (1956), Fretwell y Hickman (1964), y Bowers (1967). Mereu (1962) proporcionó los medios para calcular los valores de las anualidades directamente a partir de las constantes de Makeham. Las anualidades vitalicias y prorrateadas están involucradas, explícita o implícitamente, en las ponencias de Rasor y Greville (1952), Lauer (1967) y Scher (1974), y en las discusiones de ellas.

5.11 Ejercicios

Sección 5.2

5.1 Calcule el valor presente actuarial de 1000 u.m. vencidos al final de 20 años si una persona de edad 50 años sobrevive. Use la Tabla de mortalidad Ilustrativa con interés a una tasa anual efectiva de 6%.

5.2 ¿Cual es el valor futuro actuarial de 1000 u.m. acumulados de los 50 a 70 años con una tasa efectiva anual de interés de 6% y con sobrevivencia dada por la Tabla de mortalidad Ilustrativa?

5.3 Pruebe e interprete la relación

$$ {}_nE_x + {}_nE_x\left[(1+i)^n - 1\right] + {}_nE_x(1+i)^n \frac{l_x - l_{x+n}}{l_{x+n}} = 1 $$

Sección 5.3

5.4 Usando el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad y la Tabla de mortalidad Ilustrativa con una tasa efectiva anual de interés de 6%, calcule

a. $\bar{a}_{20}, \bar{a}_{50}, \bar{a}_{80}$

b. $Var\left[\bar{a}_{\overline{1}|}\right]$ para $x = 20,\ 50,\ 80$

[Sugerencia: use (5.3.6) y (4.4.2).]

5.5 Usando los valores obtenidos en el ejercicio 5.4, calcule la desviación estándar y el coeficiente de variación, σ/μ , del valor presente de las siguientes variables aleatorias

a. Anualidades individuales emitidas a las edades de 20, 50, 80 con ingresos vitalicios de 1000 al año pagaderos continuamente.

b. Un grupo de 100 anualidades, cada una emitida a la edad de 50 años con un ingreso vitalicio de 1,000 al año pagaderos continuamente.

5.6 Demuestre que la $Var\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right]$ puede expresarse como

$$\frac{2}{\delta}\left[\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\right] - \bar{a}_x^2$$

donde ${}^2\bar{a}_x$ esta basada en la fuerza de interés 2δ.

5.7 Calcule la $Cov\left[\delta\bar{a}_{\overline{T}|}, v^T\right]$.

5.8 Si se adopta un enfoque determinístico (función de cambio porcentual), (5.3.26) podría tomarse como el punto de partida para el desarrollo de una teoría de anualidades vitalicias continuas. Para ello, podría empezarse con

$$\frac{d\bar{a}_y}{dy} = (\mu_y + \delta)\bar{a}_y - 1 \qquad x \le y < \omega$$
$$\bar{a}_y = 0 \qquad \omega \le y.$$

a. Use el factor de integración $\exp\left[-\int_0^y (\mu_z + \delta)dz\right]$ para resolver la ecuación diferencial para obtener (5.3.1).

b. Use el factor de integración $e^{-\delta y}$ para obtener la curiosa ecuación

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{x:x}|} - \int_x^w e^{-\delta(y-x)}\, \bar{a}_y\, \mu_y\, dy,$$

y de una explicación verbal de ella.

Sección 5.4

5.9 Defina ${}_{m/n}\ddot{a}_x$ y escriba fórmulas para ella que sean similares a (5.3.21)-(5.3.24) para ${}_{m/n}\bar{a}_x$.

5.10 Demuestre que

$$Var\left[a_{\overline{K|}}\right] = Var\left[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}\right] = \frac{1}{d^2} Var\left[v^{K+1}\right].$$

5.11 Pruebe e interprete las siguientes relaciones.

a. $a_{\overline{x:n|}} = {}_1E_x \; \ddot{a}_{\overline{x+1:n|}}$

b. ${}_{n|}a_x = \frac{A_{\overline{x:n|}} - A_x}{d} - {}_nE_x$

5.12 Pruebe algebraicamente (5.4.32) empezando desde (5.4.11).

5.13 ¿Es

$$1 = i\, a_{\overline{x:n|}} + (1+i) A_{\overline{x:n|}}$$

una fórmula correcta? Si no, corríjala.

Sección 5.5

5.14 Considere

$$\ddot{a}_x^{(m)} = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+J_m|}}^{(m)}\right]$$

donde K es el tiempo futuro de vida truncado de (x) y

$$J_m = \frac{j+1}{m}$$

cuando

$$\frac{j}{m} < S \le \frac{j+1}{m} \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

donde S es igual que en (3.6.1). Usando el ejercicio 4.15, demuestre que

a. $1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$

b. $J_m = [mS+1]/m$ excepto cuando $S = (j+1)/m$.

Los paréntesis cuadrados indican la función de enteros más grande. [Note que $\Pr(S = (j+1)/m) = 0$]

5.15 Haciendo el supuesto de que

$$D_{y+h/m} = D_y - \frac{h}{m}(D_y - D_{y+1}) \qquad h = 0,1,\ldots,m-1$$

en cada año de edad, verifique que

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

5.16 Escriba las fórmulas tradicionales correspondientes a (5.5.15) y (5.5.16) y verifíquelas utilizando (5.5.8).

5.16 Demuestre que la anualidad con pagos al final de cada periodo similares a las fórmulas (5.5.3) son

5.17

$$a_x^{(m)} = s_{\overline{1}|}^{(m)} a_x + \frac{1}{i^{(m)}}\left[(1+i)A_x - \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)A_x^{(m)}\right]$$

y que bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad estas se convierten en

$$a_x^{(m)} = s_{\overline{1}|}^{(m)} a_x + (1+i)\frac{1-\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}}{i^{(m)}} A_x$$

5.18 Demuestre que la anualidad con pagos al final de cada periodo similares a las fórmulas (5.5.4) son

$$a_x^{(m)} = \frac{1-\left[1+i^{(m)}/m\right]A_x^{(m)}}{i^{(m)}} = a_{\overline{\omega}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\omega}|}^{(m)} A_x^{(m)}$$

y que bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad estas se convierten en

$$a_x^{(m)} = \alpha(m)a_x + \gamma(m)$$

donde $\gamma(m) = \left(1 - \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\right)\Big/ i^{(m)}$.

5.19 Como bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$
$$a_x^{(m)} = \alpha(m)a_x + \gamma(m),$$

y ya que

$$\ddot{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)} = \frac{1}{m}$$
$$\ddot{a}_x - a_x = 1,$$

se sigue que

$$\gamma(m) = \alpha(m) - \beta(m) - \frac{1}{m}.$$

Verifique está relación, sustituyendo para $\alpha(m)$, $\beta(m)$.

5.20. Usando (5.5.1) como punto de partida, verifique que

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \bar{a}_x$$

b. Use (5.5.8) y el resultado de (a) para demostrar

$$\bar{a}_x \cong a_x + \frac{i}{2}$$

c. Empiece con (5.3.2B) para demostrar que la regla trapezoidal por integración aproximada produce el resultado en (b).

5.21. Utilizando la aproximación tradicional dada en (5.5.8), establezca lo siguiente:

a. $a_x^{(m)} \cong a_x + \frac{m-1}{2m}$

b. $a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \cong a_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$

c. ${}_{m|}a_x^{(m)} \cong {}_{m|}a_x + \frac{m-1}{2m}{}_nE_x$

5.22 a. Desarrolle una fórmula para $\ddot{s}_{25:\overline{40}|}^{(m)}$ en términos de $\ddot{s}_{25:\overline{40}|}$.

b. Con base en la Tabla de mortalidad Ilustrativa con una tasa anual efectiva de interés de 6%, calcule los valores de

(i) $\ddot{a}_{25:\overline{40}|}^{(12)}$ (ii) $\ddot{s}_{25:\overline{40}|}^{(12)}$

Sección 5.6

5.23 Proporcione fórmulas, en términos de funciones conmutativas, para

a. $\ddot{a}_x$ b. a_x c. $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$

d. $a_{x\overline{n}|}$ e. ${}_{n|}\ddot{a}_x$ f. ${}_{n|}a_x$

g. $\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|}$ h. ${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x$

5.24 Para evaluar anualidades vitalicias con pagos al final de cada periodo con ingreso anual b, puede utilizarse la función conmutativa especial

$$\overline{N}_x^{(m)} = \alpha(m)N_{x+1} + \gamma(m)D_x = \alpha(m)N_x - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right]D_x$$

y la fórmula general

$$\frac{b}{D_x}\left[\overline{N}_y^{(m)} - \overline{N}_z^{(m)}\right].$$

Escriba las fórmulas en términos de $N_x^{(12)}$ para

a. $a_{60}^{(12)}$ b. $a^{(12)}_{\overline{40:25}|}$ c. ${}_{30|}a_{40}^{(12)}$

Sección 5.7

5.25 El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia estándar creciente temporal respecto a (x) con

- ingreso anual de una u.m. en el primer año, 2 en el segundo, y así sucesivamente, finalizando con n en el n-ésimo año,
- pagos mensuales con una base anticipada,

se denota con $(I\ddot{a})^{(m)}_{x\overline{n}|}$. Demuestre que $(I\ddot{a})^{(m)}_{x\overline{n}|}$ puede expresarse de las siguientes formas.

a. $\sum_{k=0}^{n-1} k \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x+n-k|}}$

b. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)D^{(m)}_{x+k}$

c. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1}(N^{(m)}_{x+k} - N^{(m)}_{x+n})$

d. $\frac{1}{D_x}\left[S^{(m)}_x - S^{(m)}_{x+n} - n\,N^{(m)}_{x+n}\right]$

5.26 El valor presente actuarial de una anualidad temporal decreciente respecto a (x) con

- ingreso anual de n en el primer año, n-1 en el segundo, y así sucesivamente, finalizando con una unidad u.m. en el n, ésimo año,
- pagos mensuales con una base anticipada

se denota con $(D\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}$. Demuestre que $(D\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ puede expresarse de las siguientes formas.

a. $\sum_{k=1}^{n} \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{k}|}$

b. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)D^{(m)}_{x+k}$

c. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=1}^{n-1}(N^{(m)}_x - N^{(m)}_{x+k})$

d. $\frac{1}{D_x}\left[n\,N^{(m)}_x - (S^{(m)}_{x+1} - S^{(m)}_{x+n+1})\right]$

5.27 Si en el ejercicio 5.25 el ingreso anual no se interrumpe a la edad $x+n$ sino continua al nivel n mientras (x) sobreviva después de ello, el valor presente actuarial se denota con $(I_{\overline{n|}}\ddot{a})^{(m)}_x$. Demuestre que para $(I_{\overline{n|}}\ddot{a}_x)^{(m)}$ se sostienen las siguientes expresiones.

a. $\sum_{k=0}^{n-1} k \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{k+1|}}$

b. $\frac{1}{D_x}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)D_{x+k}^{(m)} + n\, N_{x+n}^{(m)}\right]$

c. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1} N_{x+k}^{(m)}$

d. $\frac{1}{D_x}\left[S_x^{(m)} - S_{x+n}^{(m)}\right]$

5.28 Verifique la fórmula

$$\delta(\bar{I}\,\bar{a})_{\overline{T}|} + T\,v^T = \bar{a}_{\overline{T}|}$$

donde T representa el tiempo futuro de vida de (x). Utilícela para probar que

$$\delta\left(\bar{I}\,\bar{a}\right)_x + \left(\bar{I}\,\bar{A}\right)_x = \bar{a}_x$$

en donde $\left(\bar{I}\,\bar{a}\right)_x$ es el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia de (x) en la que los pagos se hacen continuamente a la tasa de t por año en el tiempo t.

Sección 5.8

5.29 a. Demuestre que, cuando $m=1$, la fórmula (5.8.6) se convierte en

$$\ddot{a}_y(1+i) - (1+i) + q_y\,\ddot{a}_{y+1} = \ddot{a}_{y+1}$$

b. Exprese la fórmula de la parte (a) en términos de valores de la anualidad con pagos al final de cada periodo para obtener lo siguiente.

(i) $a_y(1+i) + q_y(1+a_{y+1}) = 1 + a_{y+1}$

(ii) $1 = i\,a_y + q_y(1+a_{y+1}) + a_y - a_{y+1}$

De una interpretación verbal de cada una.

5.30 Demuestre que, para n y x dadas, las siguientes recurrentes se sostienen para
$h = 0,1,\ldots,n-1$.

a. $(D\bar{a})^{(12)}_{x+h:\overline{n-h}|} = (n-h)\ddot{a}^{(12)}_{x+h:\overline{1}|} + {}_1E_{x+h}(D\bar{a})^{(12)}_{x+h+1:\overline{n-h-1}|}$

b. $(apv)_{x+h} = (h+1)\ddot{a}^{(12)}_{x+h:\overline{1}|} + {}_1E_{x+h}(apv)_{x-h+1}$
donde $(apv)_{x+h} = h\ddot{a}^{(12)}_{x+h:\overline{n-h}|} + (I\ddot{a})^{(12)}_{x+h:\overline{n-h}|}$

Sección 5.9

5.31 a. Demuestre que, para la técnica de pago agregado al evaluar $\mathring{a}_x$. el valor presente de la variable aleatoria es

$$a_{\overline{K}|} + \frac{v^T \bar{s}_{\overline{T-K}|}}{\bar{s}_{\overline{1}|}} = a_{\overline{K}|} + v^T \frac{\delta}{i} \bar{s}_{\overline{T-K}|}$$

en donde K, T son el tiempo de vida futuro truncado y completo de (x), respectivamente, y que se reduce a

$$\frac{1-v^T}{i} = a_{\overline{T}|}$$

b. Por tanto, demuestre

$$\mathring{A}_x = E\left[\frac{1-v^T}{i}\right] = \frac{\delta}{i}\bar{a}_x$$

y obtenga una fórmula para

$$Var\left[\frac{1-v^T}{i}\right]$$

5.32 a. Demuestre que para $\ddot{a}^{(1)}_x$ el valor presente de la variable aleatoria es

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - v^T \frac{\delta}{d} \bar{a}_{\overline{K+1-T}|}$$

y que se reduce a

$$\frac{1-v^T}{d} = \ddot{a}_{\overline{T}|}$$

c. Por tanto, demuestre que

$$\bar{a}_x^{(i)} = \frac{\delta}{d}\bar{a}_x$$

Misceláneos

5.33 Para $0 \le t \le 1$ y el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, demuestre que

a. $\ddot{a}_{x+t} = \dfrac{(1+i\,t)\ddot{a}_x - t(1+i)}{1-t\,q_x}$

b. ${}_t\ddot{a}_x = v^t\left[(1+i\,t)\ddot{a}_x - t(1+i)\right]$

c. ${}_{1-t|}\ddot{a}_{x+t} = \dfrac{(1+i)^t}{1-t\,q_x}(\ddot{a}_x - 1)$

d. $A_{x+t} = \dfrac{1+i\,t}{1-t\,q_x}A_x - \dfrac{t\,q_x}{1-t\,q_x}$

5.34 Obtenga fórmulas para la evaluación de una anualidad vitalicia anticipada de (x) con un pago inicial de una unidad monetaria y con pagos anuales crecientes después de ello mediante

a. 3% del pago anual inicial
b. 3% del pago anual del año anterior.

5.35 Exprese $(\overline{D}\,\overline{a}\,)_{x\overline{n}|}$ como una integral y compruebe la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial n}(\overline{D}\,\overline{a}\,)_{x\overline{n}|} = \overline{a}_{x\overline{n}|}$$

5.36 Proporcione una expresión para el valor acumulado actuarial de una anualidad a la edad de 70 años con los siguientes pagos mensuales:

- 100 al final de cada mes desde la edad 30 a la 40,
- 200 al final de cada mes desde la edad 40 a la 50,
- 500 al final de cada mes desde la edad 50 a la 60,
- 1,000 al final de cada mes desde la edad 60 a la 70.

5.37 Derive una expresión simplificada de la prima neta única para una persona de edad 35 años de un seguro temporal a 25 años, pagadero inmediatamente al fallecimiento, en el que el beneficio por fallecimiento a la edad $35+t$ es $\bar{s}_{\overline{t+1}|}$, $0 \le t \le 25$. Interprete su resultado.

5.38 Derive una expresión simplificada de la prima neta única para un seguro temporal a n años pagadero al final del año del fallecimiento de (x), en el que el beneficio por fallecimiento en el año $k+1$ es $\ddot{s}_{\overline{k+1}|}$, $0 \le k < n$. Interprete el resultado.

5.39 Obtenga una expresión simplificada para

$$(I\ddot{a})^{(12)}_{x:\overline{25}|} - (Ia)^{(12)}_{x:\overline{25}|}$$

5.40 Considere una anualidad vitalicia continua diferida a n años de una unidad monetaria por año como un seguro con probabilidad de reclamación, ${}_{n}p_x$ y monto de reclamación aleatorio $v^n\bar{a}_{\overline{T}|}$. Aquí T tiene *f.d.p.* ${}_{t}p_{x+n}\,\mu_{x+n+t}$. Aplique (2.2.13) para demostrar que la varianza de este seguro es igual a

$$V^{2n}\,{}_{n}p_x(1-{}_{n}p_x)\bar{a}^2_{x+n} + v^{2n}\,{}_{n}p_x\,\frac{{}^{2}\bar{A}_{x+n} - \bar{A}^2_{x+n}}{\delta^2}$$

y verifique que esto se reduce a (5.3.20).

5.41 Escriba el análogo discreto de la fórmula de la varianza en el ejercicio 5.40.

5.41 Sea I_k el indicador de la variable aleatoria con $\Pr(I_k = 1) = {}_{k}p_x$, $\Pr(I_k = 0) = {}_{k}q_x$. Demuestre lo siguiente:

a. El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia a (x), con pago anual b_k al sobrevivir a la edad $x+k$, $k = 0,1,2,\ldots$ puede escribirse como

$$E\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^k\, b_k\, I_k\right]$$

b.

$$E(I_j\ I_k) = {}_k p_x \qquad j \le k$$
$$Cov(I_j, I_k) = {}_k p_x\ {}_j q_x \qquad j \le k.$$

c.

$$Var\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^k\ b_k\ I_k\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k}\ b_k^2\ {}_k p_x\ {}_k q_x + 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j<k} v^{j+k}\ b_j\ b_k\ {}_k p_x\ {}_j q_x$$

5.43 Si un índice de 2 a la izquierda indica que el interés está a fuerza 2δ, demuestre que

a. ${}^2A_x = 1 - (2d - d^2)\,{}^2\ddot{a}_x$

b. $Var\left[v^{K+1}\right] = 2d(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x) - d^2(\ddot{a}_x^2 - {}^2\ddot{a}_x)$

c. $Var\left[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}\right] = \frac{2}{d}(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x) - (\ddot{a}_x^2 - {}^2\ddot{a}_x)$.

5.44 a. Desarrolle en términos de potencias de δ, los coeficientes de la anualidad $\alpha(m)$ y $\beta(m)$.

b. En qué, se convierten las expansiones de (a) para $m = \infty$.

5.45 Si $g(x)$ es una función no negativa y X es una variable aleatoria con *f.d.p* $f(x)$, justifique la desigualdad

$$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx \ge k \Pr\left[g(X) \ge k\right] \qquad k > 0$$

y úsela para demostrar que

$$\overline{a}_{x} \ge \overline{a}_{\overline{\ \ }} \Pr(\overline{a}_{\overline{\ \ }} \ge \overline{a}_{\overline{\ \ }}) = \overline{a}_{\overline{\ \ }} \Pr(T \ge \overset{*}{e}_x)$$

5.46 Se utiliza una unidad para comprar una combinación de beneficios consistentes en un ingreso vitalicio de una u.m. por año pagadero continuamente mientras (x) sobreviva y un seguro de J pagaderos inmediatamente a la muerte de (x). Escribe el valor presente de la variable aleatoria para esta combinación, y proporcione su media y varianza.

5.47 Usando el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos para cada año de edad y la Tabla de mortalidad Ilustrativa con una tasa anual efectiva de interés de 6%, calcule

a. $\ddot{a}_{40}^{(12)}$ b. $\ddot{a}_{40:\overline{20}|}^{(12)}$ c. ${}_{30|}\ddot{a}_{40}^{(12)}$

5.48 Demuestre que, si $q_x < \left(\frac{i^{(2)}}{2}\right)^2$, la aproximación tradicional

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$$

en el caso especial con $n=1$, $m=2$ conduce a

$$\ddot{a}_{x:\overline{1}|}^{(2)} > \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)}$$

5.49 Si $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$ y $\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{1}$ son valores presentes actuariales calculados utilizando

- una tasa de interés de i para los primeros n años, $n<m$, y una tasa de interés i' para los restantes $m-n$ años,

demuestre algebraicamente e interprete

a. $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} = 1 - d\bar{a}_{x:\overline{n}|} - v^n {}_np_x\, d'\, \ddot{a}_{x+n:\overline{m-n}|}$

b. $\bar{A}_{x:\overline{m}|}^{1} = 1 - d'\bar{a}_{x:\overline{m}|}^{1} + (d' - d)\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

5.50 Demuestre que

$$\frac{d\bar{a}_x}{di} = -v(Ia)_x$$

donde

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\omega} t\, v^t\, {}_t p_x,$$

e interprete la relación.

5.51 Si, en el ejemplo 5.10, los pagos anuales nivelados después

a. se incrementan en 10 u.m.

b. se incrementan en 20 u.m. encuentre el valor presente actuarial de la anualidad.

5.52 Demuestre que un incremento constante en la fuerza de mortalidad tiene el mismo efecto sobre $\ddot{a}_x$ como el de un incremento constante en la fuerza de interés, pero que este no es el caso para $\ddot{a}_x^{(m)}$ evaluado mediante $\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$.

5.53 Demuestre que

a. $\alpha(m) - \beta(m)d = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}$

b. la fórmula recurrente (5.8.3) puede rescribirse como

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \alpha(m) - \beta(m)(1 - v\, p_y) + v\, p_y\, \ddot{a}_{y+1}^{(m)}.$$

5.54 Considere el siguiente portafolio de anualidades anticipadas que se pagan actualmente de los activos de un fondo de pensiones.

Edad	Número de beneficiarios de la anualidad
65	30
75	20
85	10

Cada anualidad tiene un pago anual de una u.m. durante todo el tiempo que el beneficiario sobreviva. Suponga una tasa de interés de 6% de ganancia y una mortalidad igual a la que da la Tabla de mortalidad

Ilustrativa. Calcule para el valor presente de estas obligaciones del fondo de pensión

a. la esperanza
b. la varianza
c. el percentil 95 de la distribución.

Para las partes (b) y (c), suponga que las vidas son mutuamente independientes.

PRIMAS NETAS

6.1 Introducción.

En los capítulos 4 y 5 discutimos los valores presentes actuariales de los pagos de varios seguros de vida y anualidades. Estas ideas se combinarán en este capítulo, porque en la práctica un seguro de vida individual generalmente se compra por una anualidad vitalicia de primas brutas. Las primas brutas proporcionan lo necesario para cubrir las indemnizaciones del seguro de vida, los gastos de iniciación y mantenimiento del seguro, y los márgenes de ganancia y para compensar posibles experiencias desfavorables. En el presente capítulo se cubrirán las primas netas anuales que sólo sufragan los pagos de indemnizaciones. Dichas primas netas anuales asumirán la forma de una anualidad vitalicia que empieza cuando se emite el seguro.

En el capítulo 1 discutimos la idea que la determinación de la prima del seguro requiere la adopción de un principio sobre primas. El ejemplo 6.1 ilustra la aplicación de dos principios. Uno de ellos determinar la prima para cubrir sólo el valor presente esperado de las indemnizaciones del seguro.

Ejemplo 6.1

Un asegurador planea expedir una póliza para un recién nacido (edad 0 años) cuyo tiempo de vida futuro truncado, K, está determinado por la *f.p.*

$$_{k/}q_0 = \frac{1}{4} \qquad k = 0,1,2,3.$$

La póliza pagará una unidad al final del año del fallecimiento a cambio del pago de una prima P al principio de cada año, siempre que éste se encuentre con vida. Encuentre la prima anual P, determinada por

a. Principio I: P deberá ser tal que la esperanza del valor presente, a la expedición de la póliza, de la pérdida financiera sea 0.

b. Principio II: P deberá ser la cantidad mínima tal que la probabilidad de una pérdida financiera positiva sea a lo sumo 1/4.

Para ambas partes, suponga que el asegurador utilizará una tasa anual efectiva del, $i = 0.06$.

Solución

Para $K = k$ y P una prima arbitraria, el valor presente de la pérdida financiera a la emisión de la póliza es $v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$.

a. De acuerdo con el Principio I, P deberá cumplir

$$\sum_{k=0}^{3}\left(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\right)\Pr(K=k) = 0 \tag{6.1.1}$$

lo anterior se cumple con $P = 0.3667$.

b. Como $v^j - P\ddot{a}_{\overline{j}|}$ disminuye a medida que j se incrementa, el requisito del Principio II se sostendrá si P es tal que $v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|} = 0$. Entonces la pérdida financiera es positiva sólo para $K = 0$. Por tanto, por este principio, $P = 0.4580$

Estos resultados se resumen en la tabla siguiente:

		VALOR PRESENTE DE LA PÉRDIDA FINANCIERA		
			PRIMA DEL PRINCIPIO	
Resultado k	Probabilidad ${}_kq_0$	Fórmula General	I	II
0	1/4	$v - P\ddot{a}_{\overline{1}|}$	0.5767	0.4854
1	1/4	$v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|}$	0.1774	0.0000
2	1/4	$v^3 - P\ddot{a}_{\overline{3}|}$	-0.1993	-0.4580
3	1/4	$v^4 - P\ddot{a}_{\overline{4}|}$	-0.5547	-0.8900
		La prima es	0.3667	0.4580

De aquí en adelante, se seguirá el Principio I para la determinación de las primas. Para formalizar sus conceptos, definamos como L, la pérdida del asegurador, como la diferencia entre la variable aleatoria referida al valor presente de las indemnizaciones a pagarse por el asegurador y la variable aleatoria concerniente al valor presente de la anualidad de las primas a pagarse por el asegurado. El principio I se denomina el ***principio de equivalencia*** y exige que

$$E[L]=0 \tag{6.1.2}$$

Hablaremos de primas netas como aquellas que satisfacen (6.1.2). Estas Primas netas serán tales que

E [valor presente de los beneficios - valor presente de las primas netas] = 0,
lo que equivale a
E [valor presente de los beneficios] = E [valor presente de las primas netas].

En otras palabras, las primas netas se seleccionan en forma tal que el valor presente actuarial de las indemnizaciones iguala el valor presente actuarial de las primas netas. Los métodos que se desarrollaron en los capítulos 4 y 5 para calcular estos valores presentes actuariales pueden utilizarse para reducir la igualdad a una forma de la cual puedan obtenerse las primas. Por ejemplo, cuando los beneficios y primas son constantes, como en el ejemplo 6.1, la ecuación (6.1.1) puede rescribirse como $A_0 = P\ddot{a}_0$, y $\ddot{a}_0$ puede calcularse como

$$\sum_{k=0}^{3} v^k \, {}_k p_0$$

Cuando se usa el principio de equivalencia para determinar la prima única que se cobrará al expedir la póliza para un seguro de vida o para una anualidad vitalicia, la prima es igual al valor presente actuarial de los pagos y se denomina la prima neta única.

6.2 Primas totalmente continuas

Los principios básicos involucrados en la determinación de las primas netas anuales usando el principio de equivalencia se ilustrarán primero para el caso de la prima neta anual uniforme totalmente continua para una unidad monetaria (u.m.) de seguro de vida entera que se paga inmediatamente a la muerte de (x). Para cualquier prima pagada continuamente, $\bar{P}$, considere

$$l(t) = v^t - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{t}|} \tag{6.2.1}$$

que es el valor presente de la pérdida del asegurador si la muerte ocurre en el tiempo t.

Notamos que $l(t)$ es una función decreciente de t con $l(0)=1$ y $l(t)$ aproximándose a $-\bar{P}/\delta$ a medida que $t\to\infty$. Si t_0 es el tiempo cuando $l(t_0)=0$, la muerte antes de t_0 resulta en una pérdida mientras que la muerte después de t_0 produce una pérdida negativa, es decir, una ganancia.

Consideremos ahora la variable pérdida aleatoria,

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T}|} \tag{6.2.2}$$

correspondiente a la función de pérdida $l(t)$. Si el asegurador determina su prima mediante el principio de equivalencia, la prima se representa por $\bar{P}(\bar{A}_x)$ y es tal que

$$E[L] = 0 \tag{6.2.3}$$

De (4.2.6) y (5.3.2) se sigue que

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_x = 0$$

o

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{6.2.4}$$

La varianza de L puede utilizarse como una medida de la variabilidad de las pérdidas en un seguro de vida entero individual debido a la naturaleza aleatoria del tiempo transcurrido hasta que se sobreviene la muerte. Como $E[L]=0$,

$$Var[L]=E[L^2] \tag{6.2.5}$$

Para la pérdida de (6.2.2), tenemos

$$\begin{aligned} Var\left[v^T-\overline{P}\,\overline{a}_{\overline{T}|}\right] &= Var\left[v^T-\frac{\overline{P}\left(1-v^T\right)}{\delta}\right] \\ &= Var\left[v^T\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right)-\frac{\overline{P}}{\delta}\right] \\ &= Var\left[v^T\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right)\right] \\ &= Var\left[v^T\right]\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right)^2 \\ &= \left({}^2\overline{A}_x-\left(\overline{A}_x\right)^2\right)\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Para la prima determinada mediante el principio de equivalencia, podemos utilizar (6.2.4) y (5.3.4), $\delta\,\overline{a}_x+\overline{A}_x=1$, para rescribir (6.2.6) como

$$Var[L]=\frac{{}^2\overline{A}_x-\overline{A}_x^2}{(\delta\overline{a}_x)^2}=\frac{{}^2\overline{A}_x-\left(\overline{A}_x\right)^2}{(\delta\overline{a}_x)^2} \tag{6.2.7}$$

Ejemplo 6.2:
Bajo los supuestos establecidos en el ejemplo 5.5, calcule $\overline{P}\left(\overline{A}_x\right)$ y $Var[L]$.

Solución
El ejemplo 5.5 implica una fuerza de mortalidad constante, $\mu=0.04$ y una fuerza constante de interés $\delta=0.06$. Estos supuestos producen $\overline{a}_x=10$, $\overline{A}_x=0.4$ y ${}^2\overline{A}_x=0.25$. Usando (6.2.4), obtenemos

$$\overline{P}\left(\overline{A}_x\right)=\frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}=0.04$$

y de (6.2.7)
$$Var[L]=\frac{0.25-0.16}{(0.6)^2}=0.25$$

∇

Con referencia a (6.2.6) podemos observar que el numerador de esta última expresión puede interpretarse como la varianza de la pérdida, $v^T - \overline{A}_x$, asociada con la prima única de un seguro de vida entero. Esta última varianza es 0.09, y por tanto la desviación estándar de la pérdida asociada con esta prima anual del seguro es $\sqrt{0.25/0.09} = 5/3$ por la desviación estándar de la pérdida en el caso de la prima única. La incertidumbre adicional relativa al valor presente del ingreso de la prima neta aumenta la variabilidad de las perdidas debido a la naturaleza aleatoria del tiempo transcurrido hasta que sobreviene la muerte.

En el ejemplo 6.2, $\overline{P}(\overline{A}_x) = 0.04$, es la fuerza constante de la mortalidad. Podemos confirmar que este es un resultado general usando parte de los ejemplos 4.2 y 5.5. Bajo el supuesto de la fuerza constante de mortalidad,

$$\overline{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta}$$

y

$$\overline{a}_x = \frac{1}{\mu + \delta'}$$

por tanto

$$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\mu(\mu+\delta)^{-1}}{(\mu+\delta)^{-1}} = \mu$$

que no depende de la fuerza de interés o de la edad a la expedición.

Utilizando el principio de equivalencia, al igual que en (6.1.2), podemos determinar fórmulas para las primas netas anuales de una diversidad de seguros de vida totalmente continuos. Nuestra pérdida general es

$$b_T v_T - \overline{P}\,\Upsilon = Z - \overline{P}\,\Upsilon \qquad (6.2.8)$$

en donde

- b_t y v_t son el monto del beneficio y el factor de descuento definido en relación con (4.2.1), respectivamente.
- $\overline{P}$ es un símbolo general para una prima neta anual totalmente continua,
- Υ es una variable aleatoria de una anualidad continua como se definió, por ejemplo, en (5.3.12), y
- Z se define por (4.2.2)

La aplicación del principio de equivalencia produce

$$E\left[b_T v_T - \overline{P}\,\Upsilon\right] = 0$$

o

$$\overline{P} = \frac{E\left[b_T v_T\right]}{E\left[\Upsilon\right]}$$

Estas ideas se usan para exhibir las fórmulas de las primas anuales del cuadro 6.1

Es interesante apreciar cómo sigue el patrón una anualidad vitalicia entera diferida a n años de una unidad monetaria por año pagadera continuamente.

En este caso $b_T v_T = 0$, $T \le n$ y $b_T v_T = \overline{a}_{\overline{T-n}|} v^n$, $T > n$. Luego,

$$\begin{aligned} E\left[b_T v_T\right] &= {}_n p_x \; E\left[\overline{a}_{\overline{T-n}|} v^n \middle| T > n\right] \\ &= v^n \; {}_n p_x \; \overline{a}_{x+n} = A^{\frac{1}{x\overline{n}|}} \overline{a}_{x+n} \end{aligned}$$

Cuadro 6.1 Primas Netas Anuales totalmente continuas

Plan	Componentes de la Pérdida $b_T v_T$	Componentes de la Pérdida $\overline{P}\Upsilon$ donde Υ es	Fórmula de la prima $\overline{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[\Upsilon]}$
Seguro de vida entera	$1v^T$	$\overline{a}_{\overline{T}|}$	$\overline{P}\left(\overline{A}_x\right) = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}$
Seguro temporal a n años	$1v^T$ 0	$\overline{a}_{\overline{T}|}$, $T \le n$ $\overline{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\overline{P}\left(\overline{A}^{\,1}_{x\overline{n}|}\right) = \frac{\overline{A}^{\,1}_{x\overline{n}|}}{\overline{a}_{x\overline{n}|}}$
Seguro dotal a n años	$1v^T$ $1v^n$	$\overline{a}_{\overline{T}|}$, $T \le n$ $\overline{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\overline{P}\left(\overline{A}_{x\overline{n}|}\right) = \frac{\overline{A}_{x\overline{n}|}}{\overline{a}_{x\overline{n}|}}$
Seguro* de vida entera a h pagos	$1v^T$ $1v^T$	$\overline{a}_{\overline{T}|}$, $T \le h$ $\overline{a}_{\overline{h}|}$, $T > h$	${}_h\overline{P}\left(\overline{A}_x\right) = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_{x\overline{h}|}}$
Seguro* dotal a n años con h pagos $h \le n$	$1v^T$ $1v^T$ $1v^n$	$\overline{a}_{\overline{T}|}$, $T \le h$ $\overline{a}_{\overline{h}|}$, $h < T \le n$ $\overline{a}_{\overline{h}|}$, $T > n$	${}_h\overline{P}\left(\overline{A}_{x\overline{n}|}\right) = \frac{\overline{A}_{x\overline{n}|}}{\overline{a}_{x\overline{h}|}}$
Seguro dotal puro a n años	0 $1v^n$	$\overline{a}_{\overline{T}|}$, $T \le n$ $\overline{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\overline{P}\left(A^{\frac{1}{x\overline{n}|}}\right) = \frac{A^{\frac{1}{x\overline{n}|}}}{\overline{a}_{x\overline{n}|}}$
Anualidad vitalicia diferida a n años	0 $\overline{a}_{\overline{T}|} v^n$	$\overline{a}_{\overline{T}|}$, $T \le n$ $\overline{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\overline{P}\left({}_n|\overline{a}_x\right) = \frac{A^{\frac{1}{x\overline{n}|}} \overline{a}_{x+n}}{\overline{a}_{x\overline{n}|}}$

* **Los seguros descritos en la cuarta y quinta filas prevén un periodo de pago de la prima más corto que el periodo sobre el que se pagan las indemnizaciones del fallecimiento.**

Sin embargo, las anualidades diferidas ofrecen en la práctica generalmente un cierto tipo de ventaja sobre la muerte durante el período de aplazamiento. Un contrato de este tipo es el ejemplo 6.12.

Ejemplo 6.3
Exprese la varianza de la pérdida, L, asociada con un seguro dotal a n años, en términos de primas netas únicas, (veáse la tercera fila del cuadro 6.1).

Solución
Usando la notación de (4.2.8), tenemos

$$Var[L] = Var\left[Z_3 \left(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta} \right) - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta} \right]$$

Utilice ahora (4.2.10) para obtener

$$Var[L] = Var\left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta} \right]^2 \left[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|} \right)^2 \right]$$

La fórmula (5.3.11) puede rescribirse como

$$(\delta \bar{a}_{x:\overline{n}|})^{-1} = 1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}$$

la que implica que

$$Var[L] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|} \right)^2}{(\delta \bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}$$

Las dos identidades, (5.3.4) y (5.3.11), pueden utilizarse para derivar relaciones entre primas netas continuas. Por ejemplo, empezando con (5.3.4)

$$\begin{aligned} \delta\, \bar{a}_x + \bar{A}_x &= 1 \\ \delta + \bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{1}{\bar{a}_x} \\ \bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta \\ &= \frac{1 - \delta \bar{a}_x}{\bar{a}_x} \\ &= \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x} \end{aligned} \qquad (6.2.9)$$

Empezando con (5.3.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 \\
&\delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta \qquad (6.2.10) \\
&\qquad = \frac{1-\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&\qquad = \frac{\delta\,\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 6.7 se dan interpretaciones verbales de las analogías discretas de (6.2.9) y (6.2.10).

6.3 Primas totalmente discretas

En la sección 6.2 discutimos la teoría de las primas netas anuales totalmente continuas. En esta sección consideraremos seguros de primas anuales como el que apareció en el ejemplo 6.1. Es decir, la suma asegurada es pagadera al final del año, de la póliza, en el que ocurre el fallecimiento y la primera prima se paga a la expedición del seguro. Las primas subsiguientes son pagaderas, mientras sobreviva el asegurado, en los aniversarios de la expedición de la póliza durante el periodo de pago contractual de la prima. El conjunto de primas anuales forman de esta manera una anualidad vitalicia anticipada. Este modelo no se adapta a la práctica pero es de importancia histórica en el desarrollo de la teoría actuarial.

Bajo estas circunstancias, la prima neta anual uniforme nivelada para una unidad monetaria de un seguro de vida entero, denotado por P_x, en donde la ausencia de $(\bar{A}_x)$ significa que el seguro es pagadero al final del año de la póliza en que sucede el fallecimiento. La pérdida para este seguro es

$$L = v^{K+1} - P_x\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|} \qquad K = 0,1,2,\ldots \qquad (6.3.1)$$

El principio de equivalencia exige que $E[L] = 0$, o

$$E\left[v^{K+1}\right] - P_x\, E\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right] = 0$$

lo que produce

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \tag{6.3.2}$$

Este es el análogo discreto de (6.2.4).

Usando (5.4.6) en lugar de (5.3.4), con pasos paralelos a los dados al obtener la fórmula (6.2.6), obtenemos

$$Var[L] = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\,\ddot{a}_x)^2} = \frac{{}^2A_x - \left(A_x\right)^2}{(d\,\ddot{a}_x)^2} \tag{6.3.3}$$

Ejemplo 6.4:

Si $\quad {}_{k|}q_x = c(0.96)^{k+1}, \quad k = 0,1,2,...$

donde $c = 0.04/0.96$ e $i = 0.06$, calcule P_x y $Var[L]$.

Solución

Primero exhibimos los componentes de (6.3.2),

$$A_x = c\sum_{k=0}^{\infty}(1.06)^{-k-1}(0.96)^{k+1} = 0.40$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} = 10.60$$

Después usando (6.3.2) obtenemos

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = 0.0377$$

Para la $Var[L]$, calculamos

$${}^2A_x = c\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1.06)^2\right]^{-k-1}(0.96)^{k+1} = 0.2445$$

Por lo tanto,

$$Var[L] = \frac{0.2445 - 0.1600}{\left[(0.06)(10.60)/(1.06)\right]^2} = 0.2347$$

∇

Existe una relación entre los ejemplos 6.2 y 6.4. Ya que

$$ {}_{k|}q_x = \int_k^{k+1} {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{6.3.4} $$

para la situación descrita en el ejemplo 6.4, tenemos

$$ \frac{0.04}{0.96}(0.96)^{k+1} = \int_k^{k+1} {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt $$

Si la fuerza de mortalidad es una constante, μ, se sigue que

$$ \frac{0.04}{0.96}(0.96)^{k+1} = e^{-(k+1)\mu}(e^{\mu} - 1) $$

y entonces $e^{-\mu} = 0.96$ y $\mu = 0.0408$. La distribución geométrica con *f.p.*

$$ {}_{k|}q_x = \frac{0.04}{0.96}(0.96)^{k+1} $$

es una versión discreta de la distribución exponencial con μ = 0.0408. La fórmula (6.3.4) proporciona el puente entre las versiones continua y discreta. Las primas netas anuales totalmente continuas correspondientes a P_x = 0.0377 del ejemplo 6.4 serían $\overline{P}(\overline{A}_x) = \mu = 0.0408$.

Continuando con el uso del principio de equivalencia, podemos determinar fórmulas para las primas netas anuales de una diversidad de seguros de vida totalmente discretos. Nuestra pérdida general será

$$ b_{K+1} v_{K+1} - P\ddot{Y} $$

donde

- b_{k+1} y v_{k+1} son las funciones de indemnización y de descuento definidas en (4.3.1), respectivamente.
- P es un símbolo general para una prima anual pagada, mientras el asegurado sobreviva, al principio de cada año de la póliza durante el periodo de pagos de la prima, y

- Υ es la variable aleatoria de la anualidad discreta, como se definió en el ejemplo (5.4.9).
- La aplicación del principio de equivalencia nos produce

$$E\left[b_{K+1}v_{K+1} - P\Upsilon\right] = 0$$

o

$$P = \frac{E\left[b_{K+1}v_{K+1}\right]}{E\left[\Upsilon\right]}$$

Estas ideas se utilizan en el cuadro 6.2 para exhibir las fórmulas para las primas de seguros totalmente discretos.

Ejemplo 6.5:

Exprese la varianza de la pérdida, L, asociada con un seguro dotal a n años, en términos de primas netas únicas (veáse el tercer renglón del cuadro 6.2).

Solución

Empezamos con la notación del cuadro 6.2, Deje que

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \\ v^{n} & K = n,\ n+1, \ldots \end{cases}$$

Luego, podemos escribir, con referencia al renglón del cuadro 6.2,

$$L = Z - P_{\overline{x:n}|}\frac{1-Z}{d}$$

por tanto, tenemos

$$Var\left[L\right] = Var\left[Z\left(1+\frac{P_{\overline{x:n}|}}{d}\right) - \frac{P_{\overline{x:n}|}}{d}\right]$$

Podemos usar el teorema 4.1 para encontrar la $Var[Z]$, como se indica en el cuadro 4.2, y entonces obtener

$$Var\left[L\right] = \left(1+\frac{P_{\overline{x:n}|}}{d}\right)^2 \left({}^{2}A_{\overline{x:n}|} - A^{2}_{\overline{x:n}|}\right) = \left(1+\frac{P_{\overline{x:n}|}}{d}\right)^2 \left[{}^{2}A_{\overline{x:n}|} - \left(A_{\overline{x:n}|}\right)^2\right]$$

Cuadro 6.2 Primas anuales netas totalmente discretas

Plan	Componentes de la Pérdida $b_{K+1}v_{K+1}$	$P\Upsilon$ Donde Υ es	Fórmula de la prima $P=\frac{E[b_{K+1}v_{K+1}]}{E[\Upsilon]}$
Seguro de vida entera	$1v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K=0,1,2,\ldots$	$P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Seguro temporal a n años	$1v^{K+1}$ 0	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K=n,n+1,\ldots$	$P_{x:\overline{n}\rceil}=\frac{A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Seguro dotal a n años	$1v^{K+1}$ $1v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K=n,n+1,\ldots$	$P_{x:\overline{n}\rceil}=\frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Seguro* de vida entera a h pagos	$1v^{K+1}$ $1v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K=0,1,\ldots,h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}$, $K=h,h+1,\ldots$	${}_hP_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
Seguro* dotal a n años con h pagos $h\le n$	$1v^{K+1}$ $1v^{K+1}$ $1v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K=0,1,\ldots,h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}$ $K=h,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K=n,n+1,\ldots$	${}_hP_{x:\overline{n}\rceil}=\frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
Seguro dotal puro a n años	0 $1v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K=n,n+1,\ldots$	$P_{x:\overline{n}\rceil}^{1}=\frac{A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Anualidad vitalicia diferida a n años	0 $\ddot{a}_{\overline{K+1-n}\rceil}v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K=n,n+1,\ldots$	$P\left({}_n\middle\vert\ddot{a}_x\right)=\frac{A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$

La fórmula (5.4.11) y el componente del tercer renglón del cuadro 6.2 pueden combinarse en la siguiente forma:

$$d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}+A_{x:\overline{n}\rceil}=1$$

$$1+\frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d}=\frac{1}{d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$$

Por lo tanto, la varianza que buscamos es

$$\frac{{}^{2}A_{x:\overline{n}\rceil}-\left(A_{x:\overline{n}\rceil}\right)^{2}}{\left(d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}\right)^{2}} \qquad (6.3.5)$$

∇

Ejemplo 6.6:

Considere un seguro de vida entera totalmente discreto de 10 000. Dejemos que π represente una prima anual para esta póliza y $L(\pi)$ denote la variable aleatoria de pérdida a la expedición para una de dichas pólizas sobre la base de la Tabla de mortalidad Ilustrativa; a una tasa de interés de 6 % y expedición a la edad de 35 años.

a. Determine la prima, π_a tal que la distribución de $L(\pi_a)$ tenga media 0. Calcule la varianza de $L(\pi_a)$.
b. Aproxime la prima más baja, π_b , en tal forma que la probabilidad de que la pérdida $L(\pi_b)$ sea positiva y sea menor que 0.5. Encuentre la varianza de $L(\pi_b)$.
c. Determine la prima, π_c, mediante la aproximación normal, de tal forma que la probabilidad de una pérdida positiva de un total de 100 de esas pólizas independientes sea 0.05.

Solución:

a. Por el principio de equivalencia, (6.1.2),

$$\begin{aligned}\pi_a = 10{,}000P_{35} &= 10{,}000\,\frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}}\\ &= \frac{1287.194}{15.39262}\\ &= 83.62\end{aligned}$$

de (6.3.3)

$$\begin{aligned}Var\left[L(\pi_a)\right] &= (10{,}000)^2\,\frac{^2A_{35}-A_{35}^2}{(d\ddot{a}_{35})^2} \text{ o } (10{,}000)^2\,\frac{^2A_{35}-\left(A_{35}\right)^2}{(d\ddot{a}_{35})^2}\\ &= 10^8\,\frac{0.0348843-(0.1287194)^2}{\left[(0.06/1.06)(15.39262)\right]^2}\\ &= \frac{1{,}831{,}562}{0.7591295}\\ &= 2{,}412{,}713\end{aligned}$$

b. Conforme a las condiciones, π_b debe cumplir

$$\Pr\left[L(\pi_b)>0\right]<0.5$$

o en términos del tiempo de vida futuro truncado, K,

$$\Pr(10,000v^{K+1} - \pi_b \ddot{a}_{\overline{K+1}|} > 0) < 0.5$$

De la Tabla de mortalidad Ilustrativa, ${}_{42}p_{35} = 0.5125101$ y ${}_{43}p_{35} = 0.4808964$. Por lo tanto, se escoge que π_b es tal que

$$10,000v^{43} - \pi_b \ddot{a}_{\overline{43}|} = 0$$

entonces $\Pr[L(\pi_b) > 0] = \Pr(K < 42) < 0.5$. Por tanto,

$$\pi_b = \frac{10,000}{\ddot{s}_{\overline{43}|}} = 50.31$$

Utilizando el análogo totalmente discreto de (6.2.6) podemos escribir

$$\begin{aligned} Var[L(\pi_b)] &= (10,000)^2 ({}^2A_{35} - A_{35}^2)\left[1 + \frac{\pi_b}{10,000}\frac{1}{d}\right]^2 \\ &= (1,831,562)(1.18567) \\ &= 2,171,630 \end{aligned}$$

c. Con una prima π_c, la pérdida en una póliza es

$$L(\pi_c) = 10,000v^{K+1} - \pi_c \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)v^{K+1} - \frac{\pi_c}{d}$$

su esperanza y varianza son las siguientes:

$$\begin{aligned} E[L(\pi_c)] &= \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)A_{35} - \frac{\pi_c}{d} \\ &= (0.1287194)\left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right) - \frac{\pi_c}{d} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var[L(\pi_c)] &= \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 ({}^2A_{35} - A_{35}^2) \\ &= \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 (0.01831562) \end{aligned}$$

Para cada una de las pólizas tenemos la pérdida $L_i(\pi_c) = L(\pi_c)$, con $i = 1, 2, ..., 100$ y

$$S = \sum_{i=1}^{100} L_i(\pi_c)$$

para la pérdida total del portafolio. Entonces

$$E[S]=100E[L(\pi_c)]$$

y, usando el supuesto de pólizas independientes,

$$Var[S]=100Var[L(\pi_c)]$$

Para determinar π_c de tal forma que $\Pr(S>0)=0.05$, consideremos la aproximación normal, así

$$\frac{0-E[S]}{\sqrt{Var[S]}}=1.645$$

$$10\left(\frac{-E[L(\pi_c)]}{\sqrt{Var[L(\pi_c)]}}\right)=1.645$$

$$10\left[\frac{-A_{35}\left(10{,}000+\frac{\pi_c}{d}\right)+\frac{\pi_c}{d}}{\left(10{,}000+\frac{\pi_c}{d}\right)\sqrt{{}^2A_{35}-A_{35}^2}}\right]=1.645$$

Por tanto

$$\pi_c=10{,}000d\left[\frac{(0.1645)\sqrt{({}^2A_{35}-A_{35}^2)}+A_{35}}{1-(A_{35}+0.1645\sqrt{{}^2A_{35}-A_{35}^2}}\right]=100.66$$

∇

Las dos identidades, (5.4.6) y (5.4.11), pueden utilizarse para derivar relaciones entre primas discretas. Por ejemplo, empezando con (5.4.6), tenemos para los seguros de vida entera

$$\begin{aligned} d\ddot{a}_x + A_x &= 1 \\ d + P_x &= \frac{1}{\ddot{a}_x} \\ P_x &= \frac{1}{\ddot{a}_x} - d \\ &= \frac{1-d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \\ &= \frac{d\,A_x}{1-A_x} \end{aligned} \qquad (6.3.6)$$

Empezando con (5.4.11) obtenemos una cadena similar de igualdades para seguros dotales discretos a n años:

$$
\begin{aligned}
d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} &= 1 \\
d + P_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
P_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d \\
&= \frac{1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{d\,A_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}}
\end{aligned}
\tag{6.3.7}
$$

Ejemplo 6.7:

Proporcione interpretaciones verbales a las siguientes ecuaciones tomadas del conjunto (6.3.6)

$$\frac{1}{\ddot{a}_x} = P_x + d \tag{6.3.8}$$

y

$$P_x = \frac{d\,A_x}{1 - A_x} \tag{6.3.9}$$

Solución:

Usaremos la palabra equivalente para significar igual en términos del valor presente actuarial. En la expresión (6.3.8) podemos apreciar, en primer lugar, que una unidad en el presente es equivalente a una anualidad vitalicia de $\ddot{a}_x^{-1}$ pagadera al principio de cada uno de los años que sobreviva (x). También es equivalente al interés anticipado de d al principio de cada uno de los años que sobreviva (x) con el reembolso de la unidad al final del año en que sobrevenga la muerte de (x). A su vez, mientras (x) sobreviva, el reembolso de la unidad al final del año del fallecimiento es equivalente a una anualidad vitalicia de pago anticipado de P_x. Por lo tanto la unidad en el presente es equivalente a $P_x + d$ al principio de cada año durante el tiempo de vida de (x). Entonces

$\ddot{a}_x^{-1} = P_x + d$, para cada lado de la igualdad, representa el pago anual de una anualidad vitalicia producida por una unidad disponible en el presente.

De (6.3.9) consideramos un asegurado (x) que toma prestada la prima neta única A_x para la compra de un seguro de vida de pago unitario después de la muerte y de prima única (no dividida en periodos). El asegurado acepta pagar un interés anticipado por la cantidad de $d\,A_x$ sobre el préstamo al principio de cada año durante el tiempo de sobrevivencia y rembolsar A_x de la indemnización unitaria por defunción al final del año en que ocurra el deceso. En esencia, el asegurado está pagando una prima neta anual de dA_x por un seguro de monto $1-A_x$. Entonces, para una unidad completa de seguro, la prima neta anual debe ser $d\,A_x/(1-A_x)$.

∇

Existen interpretaciones similares para las relaciones correspondientes que involucran seguros dotales como las que se dan en el segunda y quinta igualdades en el conjunto (6.3.7). Hay analogía entre (6.3.8), la fórmula correspondiente que involucra a los seguros dotales,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{-1} = P_{x:\overline{n}|} + d$$

y la fórmula de interés,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{-1} = \ddot{s}_{\overline{n}|}^{-1} + d$$

Ejemplo 6.8:

Demuestre e interprete la fórmula

$$P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overline{n}|}^{1}\left(1 - A_{x+n}\right) \qquad (6.3.10)$$

Solución:
La prueba se completa usando los registros del cuadro 6.2:

$$P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{1}$$
$${}_nP_x\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{1}\,A_{x+n}$$

restando,

$$\left(P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x\right)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{1}\left(1 - A_{x+n}\right)$$

de la cual se sigue (6.3.10).

La interpretación es que ambas $P_{x\overline{n}|}$ y ${}_nP_x$ son pagaderas durante la sobrevivencia de (x) hasta un máximo de n años. Durante estos años, ambos seguros proporcionan una indemnización por defunción de una unidad monetaria que se paga al final del año de fallecimiento de (x). Si (x) sobrevive los n años, $P_{x\overline{n}|}$ proporciona una indemnización al vencimiento de una unidad monetaria, mientras que ${}_nP_x$ proporciona un seguro de vida entera sin primas adicionales, es decir, un seguro con un valor presente actuarial de A_{x+n}. Por tanto, la diferencia $(P_{x\overline{n}|} - {}_nP_x)$ es la prima anual uniforme de un dotal puro de $(1-A_{x+n})$. ∇

En la práctica, los seguros de vida son pagados inmediatamente después del fallecimiento en lugar de al final del año en que ocurre éste, por lo tanto es necesario el pago anual de primas netas semicontinuas. Dichas primas, siguiendo el mismo orden utilizado en los cuadros 6.1 y 6.2 se denotarán como $P(\overline{A}_x)$, $P(\overline{A}^1_{x\overline{n}|}), P(\overline{A}_{x\overline{n}|})$ ${}_hP(\overline{A}_x)$ y ${}_hP(\overline{A}_{x\overline{n}|})$. No hay necesidad de un dotal puro a n años con prima anual semicontinua porque no se involucra una indemnización por defunción. El principio de equivalencia puede aplicarse para producir fórmulas como las del cuadro 6.2, pero con el símbolo general A remplazado por $\overline{A}$. Por ejemplo,

$$P(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x} \tag{6.3.11}$$

Observemos que la notación para estas primas no es $\overline{P}_x$, la prima anual pagadera continuamente para una indemnización de seguro de vida entera de pago unitario pagadera al final del año del fallecimiento e igual a $A_x/\overline{a}_x$. Si se supone una distribución uniforme de fallecimientos para cada año de edad, podemos usar las nociones de la Sección 4.4. para escribir

$$P(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta}\frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\delta}P_x$$

$$P(\overline{A}^1_{x\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}P^1_{x\overline{n}|} \tag{6.3.12}$$

y

$$P(\overline{A}_{x\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}P^1_{x\overline{n}|} + P_{x\overline{n}|}$$

6.4 Primas reales pagaderas *m* veces

Si las primas son pagaderas *m* veces en el año de la póliza, en lugar de anualmente, sin ajuste en la indemnización al fallecimiento, las primas resultantes se denominan ***primas reales fraccionarias***. Por tanto $P_x^{(m)}$ denota la ***prima neta anual real uniforme***, pagadera en *m*-ésimos, de un seguro de vida entera de pago unitario pagadero al final del año del fallecimiento. El símbolo $P_x^{(m)}(\overline{A}_x)$ tendría la misma interpretación excepto que el seguro es pagadero al momento de la muerte. Típicamente, *m* es 2, 4 o 12.

En el desarrollo de esta sección se enfatizará el pago de indemnizaciones al final del año de la póliza en que ocurre el fallecimiento. El cuadro 6.3 especifica los símbolos y fórmulas para primas fraccionarias reales de los seguros de vida comunes. Las fórmulas de las primas pueden obtenerse aplicando el principio de equivalencia.

En algunas aplicaciones es útil escribir el *m*-ésimo pago de la prima como un múltiplo de la prima anual. Esto se ejemplificará para ${}_hP_{x\overline{n}|}^{(m)}$ la prima de un seguro muy general. La fórmula resultante puede modificarse para producir fórmulas de primas para otros seguros comunes. Del último renglón del cuadro 6.3 tenemos

$$ {}_hP_{x\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{h}|}^{(m)}} \tag{6.4.1} $$

Ya que

$$ A_{x\overline{n}|} = {}_hP_{x\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x\overline{h}|} $$

(6.4.1) puede reacomodarse como

$$ {}_hP_{x\overline{n}|}^{(m)} = \frac{{}_hP_{x\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x\overline{h}|}^{(m)}} \tag{6.4.2} $$

La formula (6.4.2) se usará en el siguiente capítulo. Se expresa como el pago de la prima en forma *m* (mensual, bimestral, trimestral, cuatrimestral, semestral), que es igual al correspondiente pago anual de la prima a razón del valor de la anualidad. Esto puede llevar a varios caminos, correspondiendo a las diferentes fórmulas usadas en la relación $\ddot{a}_{x\overline{h}|}^{(m)}$ y $\ddot{a}_{x\overline{h}|}$ (veáse el ejercicio 6.11).

Cuadro 6.3 Primas fraccionarias reales*

Plan	Procedimientos de pago	
	Al final del año de la póliza	Al momento de la muerte
Seguro de vida entera	$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$	$P^{(m)}\left(\overline{A}_x\right) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$
Seguro temporal a n años	$P_{x:\overline{n}|}^{1\,(m)} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}$	$P^{(m)}\left(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}$
Seguro dotal a n años	$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}$	$P^{(m)}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}$
Seguro* de vida entera a h pagos	${}_hP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}\left(\overline{A}_x\right) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}$
Seguro* dotal a n años con h pagos $h \le n$	${}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}$

*La cantidad actual de cada prima fraccionaria pagadera m veces cada año de la póliza durante el periodo de pago de la prima y la sobrevivencia de (x), es $P^{(m)}/m$. Nótese que esta h se refiere al número de años en que se paga la prima.

Ejemplo 6.9:

a. Calcule la prima neta anual igual a la que se pagaría semestralmente, para un seguro dotal con plazo a 20 años, con suma asegurada de 10,000 u.m., considerando que el pago al ocurrir la muerte se efectúa al final del año de la póliza (discreta), el seguro se emite para una persona de 50 años., sobre la base de la Tabla de mortalidad Ilustrativa con una tasa de interés anual efectivo de 6%.
b. Determine la prima correspondiente con procedimiento de pago al momento de la muerte (semicontinuo).

Para ambas partes suponga para cada edad una distribución uniforme de muertes.

Solución:

a. Requerimos $10{,}000\, P^{(2)}_{50:\overline{20|}}$. Calculamos como paso preliminar

$$
\begin{aligned}
d &= 0.056603774 \\
i^{(2)} &= 0.059126028 \\
d^{(2)} &= 0.057428275 \\
\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1|}} &= 0.98564294 \\
s^{(2)}_{\overline{1|}} &= 1.01478151 \\
\alpha(2) &= s^{(2)}_{\overline{1|}}\ \ddot{a}^{(2)}_{\overline{1|}} = 1.0002122 \\
\beta(2) &= \frac{s^{(2)}_{\overline{1|}} - 1}{d^{(2)}} = 0.25739081
\end{aligned}
$$

y las primas siguientes:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{a}_{50:\overline{20|}} = 11.291832, \\
&A^{1}_{50:\overline{20|}} = 0.13036536, \\
&P^{1}_{50:\overline{20|}} = 0.01154510, \\
&{}_{20}E_{50} = 0.23047353, \\
&A_{50:\overline{20|}} = 0.36083889, \\
&P_{50:\overline{20|}} = 0.03195574.
\end{aligned}
$$

Después, con el supuesto de distribución uniforme de fallecimientos para cada edad, la prima requerida puede calcularse mediante el uso de (6.4.1), con $x = 50$, $n = 20$, h=20 y $m = 2$. Con este propósito calculamos

$$
\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20|}} = \alpha(2)\ \ddot{a}_{50:\overline{20|}} - \beta(2)\ (1 - {}_{20}E_{50}) = 11.096159,
$$

y después

$$
10{,}000\, P^{(2)}_{50:\overline{20|}} = 325.19
$$

b. La prima semicontinua correspondiente puede obtenerse multiplicando los valores de (a) por la fracción

$$
\frac{P(\bar{A}_{50:\overline{20|}})}{P_{50:\overline{20|}}} = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20|}}}{A_{50:\overline{20|}}}
$$

Bajo el supuesto de la distribución uniforme de muertes la fracción

$$\frac{(i/\delta)P^{1}_{50:\overline{20|}} + P_{50:\overline{20|}^{1}}}{P_{50:\overline{20|}}} \tag{6.4.3}$$

y el resultado es

$$10,000\ P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = 328.68$$

∇

6.5 Primas prorrateadas

Un segundo tipo de primas fraccionarias es la ***prima prorrateada***. En este, en el momento de la muerte, se hace un reembolso de una parte de la prima relacionada con el periodo transcurrido entre el momento de la muerte y el del tiempo del siguiente pago de la prima programada. En la práctica esto puede hacerse sobre una base prorrateada sin interés. En la presente sección lo consideraremos y tomaremos la secuencia de las m-ésimas primas como una anualidad vitalicia vencida prorrateada en el sentido de la sección 5.9. Los símbolos utilizados para denotar estas primas anuales prorrateadas netas iguales pagaderas m veces en el año, serán iguales a los símbolos para las primas fraccionarias reales con base semicontinua. Difieriendo en que el subíndice m se encerrará en llaves { } en lugar de entre paréntesis ( ), por ejemplo, $P^{\{m\}}(\bar{A}_x)$. En vista de la característica del reembolso de la prima, es natural suponer que la indemnización por fallecimiento es pagadera al momento de la muerte.

Usaremos otra vez un seguro dotal a plazo de h años de pago, para ejemplificar el desarrollo de fórmulas para primas prorrateables pagadas m veces en el año. El principio de equivalencia conduce a las fórmulas

$${}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h|}} = \bar{A}_{x:\overline{n|}}$$

y

$${}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h|}}} \tag{6.5.1}$$

Usando la parte (b) del ejemplo 5.12 obtenemos

$$ {}_hP^{(m)}(\overline{A}_{x\overline{n}|}) = \frac{\overline{A}_{x\overline{n}|}}{(\delta/d^{(m)})\overline{a}_{x\overline{n}|}} = \frac{d^{(m)}}{\delta}\,{}_h\overline{P}(\overline{A}_{x\overline{n}|}) \tag{6.5.2} $$

Esto implica que el m-ésimo pago a plazos es

$$ \frac{1}{m}\,{}_hP^{(m)}(\overline{A}_{x\overline{n}|}) = {}_h\overline{P}(\overline{A}_{x\overline{n}|})\frac{1-v^{1/m}}{\delta} = {}_h\overline{P}(\overline{A}_{x\overline{n}|})\overline{a}_{\overline{1/m}|}, \tag{6.5.3} $$

y en particular, para $m = 1$,

$$ {}_hP^{(1)}(\overline{A}_{x\overline{n}|}) = {}_h\overline{P}(\overline{A}_{x\overline{n}|})\overline{a}_{\overline{1}|} \tag{6.5.4} $$

Las fórmulas (6.5.3) y (6.5.4) demuestran que estas primas prorrateables son equivalentes a primas totalmente continuas, descontadas del interés al principio de cada periodo de pago. Existen fórmulas similares para otros tipos de seguro. Por ejemplo, permitiendo que h y $n \to \infty$, (6.5.4) se transforma en

$$ P^{(1)}(\overline{A}_x) = \overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{\overline{1}|} \tag{6.5.5} $$

La prima neta prorrateable $P^{(1)}(\overline{A}_x)$ y la prima neta semicontinua $P(\overline{A}_x)$ son ambas pagaderas anualmente al principio de cada año mientras (x) sobreviva. Cada seguro proporciona una unidad a la muerte de (x). Los dos seguros difieren únicamente con respecto al reembolso proporcionado por $P^{(1)}(\overline{A}_x)$. Por lo tanto la diferencia

$$ P^{(1)}(\overline{A}_x) - P(\overline{A}_x) \tag{6.5.6} $$

es una prima neta anual uniforme pagadera al principio de cada año debido a la característica del reembolso de la prima. En el siguiente análisis verificaremos esta afirmación acerca de la expresión (6.5.6).

Del ejercicio 5.32, notamos que dada la característica del reembolso, la variable aleatoria para el valor presente de la prima, es

$$\frac{P^{(1)}(\bar{A}_x)v^T \bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}$$

donde K y T se definen igual que en el capítulo 3. Por el principio de equivalencia, la prima neta única para esta característica es

$$\bar{A}_x^{PR} = P^{(1)}(\bar{A}_x)E\left[v^T \frac{\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}\right]$$

Utilizando (6.5.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{A}_x^{PR} &= \bar{P}(\bar{A}_x)E\left[\frac{v^T - v^{K+1}}{\delta}\right] \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{\bar{A}_x - A_x}{\delta}\right)\end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Luego la prima neta anual es igual a

$$P(\bar{A}_x^{PR}) = \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)(\bar{A}_x - A_x)}{\delta \ddot{a}_x} \tag{6.5.8}$$

La fórmula (6.5.7) tiene la siguiente interpretación: el valor presente actuarial de la característica de reembolso es la diferencia entre el valor de una perpetuidad continua de $\bar{P}(\bar{A}_x)$ por año empezando a la muerte de (x), y el valor de una perpetuidad continua de $\bar{P}(\bar{A}_x)$ pagadera desde el final del año de la muerte de (x).

Volvamos ahora a (6.5.6) en donde, por (6.5.5) tenemos

$$P^{(1)}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d}{\delta} - \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{d}{\delta} - \frac{\bar{a}_x}{\ddot{a}_x}\right) \\
&= \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{d\,\ddot{a}_x - \delta\,\bar{a}_x}{\delta\,\ddot{a}_x}\right) \qquad (6.5.9) \\
&= \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{\bar{A}_x - A_x}{\delta\,\ddot{a}_x}\right) \\
&= P(\bar{A}_x^{PR})
\end{aligned}
$$

como lo obtuvimos en (6.5.8). Esto confirma nuestra afirmación acerca de (6.5.6).

Podemos ampliar este análisis a los pagos *m*-ésimos de primas y a otros seguros de vida además del de vida entera. En general,

$$P^{(m)}(\bar{A}) \cdots P^{(m)}(\bar{A})$$

es un pago *m*-ésimo de prima para la característica de reembolso.

Ejemplo 6.10

Si la póliza del ejemplo 6.9(b) tuviera primas prorrateables , ¿qué incremento ocurriría en la prima neta anual?

Solución:
La prima anual prorrateable por unidad de seguro esta dada por (6.5.2),

$$P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = \bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{20|}})\frac{d^{(2)}}{\delta} = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20|}}}{\bar{a}_{50:\overline{20|}}}\frac{d^{(2)}}{\delta}$$

Bajo el supuesto de distribución uniforme de muertes en cada intervalo de edad, ésta se transforma en

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(i/\delta)A^{1}_{50:\overline{20|}} + A_{50:\overline{20|}^{\frac{1}{}}}}{\alpha(\infty)\ddot{a}_{50:\overline{20|}} - \beta(\infty)(1 - {}_{20}E_{50})}\frac{d^{(2)}}{\delta} \\
&= \frac{(i/\delta)P^{1}_{50:\overline{20|}} + P_{50:\overline{20|}^{\frac{1}{}}}}{\alpha(\infty) - \beta(\infty)(P^{1}_{50:\overline{20|}} + d)}\frac{d^{(2)}}{\delta}
\end{aligned}
$$

aquí $\alpha(\infty) = \bar{s}_{\overline{1|}}\,\bar{a}_{\overline{1|}} = i\,d/\delta^2 = 1.00028$, $\beta(\infty) = (\bar{s}_{\overline{1|}} - 1)/\delta = 0.50985$.

Usando otros valores disponibles en el ejemplo 6.9 encontramos

$$10,000P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = 329.69$$

Entonces el incremento en la prima anual es

$$10,000\left[P^{(2)}\bar{A}_{50:\overline{20}|} - P^{(2)}\bar{A}_{50:\overline{20}|}\right] = 1.01,$$

que es la prima neta anual pagadera semestralmente para la característica de reembolso.

∇

6.6 Funciones conmutativas

Hemos visto que las primas netas anuales pueden expresarse en términos de primas netas únicas de seguros de vida y de valor presente actuarial de los pagos (anualidad). En los capítulos 4 y 5 se dieron fórmulas para estas primas y anualidades en términos de funciones conmutativas. Ahora podemos escribir las primas netas anuales en términos de funciones conmutativas. La prima neta anual totalmente continua para un seguro dotal de plazo a n años con h pago anuales (pagos limitados) para (x), se expresa como

$$ {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}. \tag{6.6.1}$$

Casos especiales de (6.6.1) incluyen, para $n = \omega - x$,

$$ {}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}} \tag{6.6.2}$$

y para $h = n = \omega - x$,

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x} \tag{6.6.3}$$

Para los seguros temporales, tenemos fórmulas tales como

$$\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}} \tag{6.6.4}$$

y

$$ {}_h\bar{P}\left(D\bar{A}\right)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{n\bar{M}_x - \bar{R}_{x+1} + \bar{R}_{x+n+1}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}. \tag{6.6.5}$$

Para seguros de vida con pago anual e indemnización al fallecimiento con el pago al final del año de la muerte, las fórmulas correspondientes a (6.6.1), (6.6.2) y (6.6.4) son

$$ {}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}} \tag{6.6.6} $$

$$ {}_hP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}} \tag{6.6.7} $$

$$ P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{6.6.8} $$

Para primas reales pagaderas m veces sobre seguros pagaderos al final del año del fallecimiento, tenemos fórmulas tales como

$$ {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N^{(m)}_x - N^{(m)}_{x+h}} \tag{6.6.9} $$

[véanse (5.6.6) y (5.6.7)].

Las fórmulas para primas prorrateables m veces pueden escribirse como primas descontadas totalmente continuas como se mostró en (6.5.3) y (6.5.4).

Ejemplo 6.11:

Exprese en términos de funciones conmutativas, la prima neta anual inicial para un seguro de vida entera de una unidad monetaria para (x), si después de 5 años la prima neta anual es el doble de la que se pagaba durante los primeros cinco años. Se utiliza un modelo completamente discreto.

Solución:

Sea P la prima neta anual inicial. La ecuación de valor, derivado del principio de equivalencia, utilizado para determinar P es

$$ P(N_x - N_{x+5}) + 2\,PN_{x+5} = M_x $$

Por tanto

$$ P = \frac{M_x}{N_x - N_{x+5}} $$

6.7 Indemnizaciones de tipo acumulativo

El análisis de esta sección se hará en términos de primas anuales para seguros pagaderos al final del año del fallecimiento. Es posible realizar un desarrollo similar para primas completamente continuas y, con algunos ajustes, para primas semicontinuas. Primero buscamos la prima neta única para un seguro temporal a n años en (x), en el que la suma asegurada es $\ddot{s}_{\overline{k+1}|_j}$, en caso de que el fallecimiento ocurra en el año $k+1$. La variable aleatoria del valor presente de esta indemnización, a la expedición de la póliza es

$$W = \begin{cases} v^{K+1}\ddot{s}_{\overline{K+1}|_j} = \dfrac{1}{d_{(j)}}\left[v^{K+1}(1+j)^{K+1} - v^{K+1}\right] & 0 \le K < n \\ 0 & K \ge n \end{cases}$$

en donde el valor presente del asegurador se calcula a una tasa de interés i y $d_{(j)}$ es la tasa de descuento equivalente a la tasa de interés j. Por el principio de equivalencia, la prima neta única es

$$E[W] = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d_{(j)}} \tag{6.7.1}$$

en donde $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ se calcula a la tasa de interés $i' = (i-j)/(1+j)$.

Si $i = j$, entonces $i' = 0$ y la prima neta única es

$$\begin{aligned} \frac{{}_nq_x - A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d} &= \frac{1 - {}_np_x - A_{x:\overline{n}|} + v^n {}_np_x}{d} \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_np_x\,\ddot{a}_{\overline{n}|} \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\,\ddot{s}_{\overline{n}|} \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

La fórmula (6.7.2) indica que, cuando $j = i$, este seguro especial temporal es equivalente a una anualidad vitalicia vencida a n años, excepto para el caso de que (x) sobreviva los n años. Entonces el seguro temporal proveerá una indemnización de 0 mientras que los pagos de la anualidad vitalicia, dada la sobrevivencia de n años tendrá un valor $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ en el tiempo n.

Ahora consideremos la situación en la que (x) tiene la oportunidad de comprar un seguro dotal de una unidad a n años con una prima anual de $P_{x\overline{n}|}$ o de establecer un fondo de ahorro con depósitos de $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$ al principio de cada uno de los n años y de comprar un seguro temporal decreciente. El seguro especial proveerá, en el caso de la muerte en el año $k+1$, la diferencia,

$$1-\frac{\ddot{s}_{\overline{k+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

entre la indemnización de uno bajo el seguro dotal y la acumulación en el fondo de ahorros. Supondremos además que la misma tasa de interés i es aplicable para valuar todas estas transacciones. Se proporcionan las mismas indemnizaciones por el seguro dotal y por la combinación del seguro especial temporal y el fondo de ahorros. Por lo tanto se puede anticipar que

$$\begin{aligned}&\text{(la prima neta anual } P_{x\overline{n}|} \text{ del seguro dotal)}\\ =\ &\text{(la prima neta anual del seguro temporal especial)}\\ +\ &\text{(el depósito } 1/\ddot{s}_{\overline{n}|} \text{ del fondo de ahorros anual).}\end{aligned}$$

Para verificar esta conjetura, consideremos el valor presente de la variable aleatoria para el seguro especial temporal decreciente,

$$\tilde{W}=\begin{cases} v^{K+1}\left(1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)=v^{K+1}-\dfrac{\ddot{a}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} & 0\le K<n \\ 0 & K\ge n \end{cases} \tag{6.7.3}$$

Mediante la aplicación del principio de equivalencia la prima neta única, denotada por $\tilde{A}^{1}_{x\overline{n}|}$, esta dada por

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{1}_{x\overline{n}|} &= E[\tilde{W}]\\ &= A^{1}_{x\overline{n}|}-\frac{\ddot{a}_{x\overline{n}|}-{}_{n}p_{x}\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\\ &= A^{1}_{x\overline{n}|}-\frac{\ddot{a}_{x\overline{n}|}-{}_{n}E_{x}\,\ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\end{aligned}$$

[veáse (6.7.2)].

La prima neta anual para el seguro especial temporal es por lo tanto

$$\tilde{P}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\tilde{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + P_{x:\overline{n}|}^{\,\frac{1}{}}$$

$$= P_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

Entonces

$$P_{x\overline{n}|} = \tilde{P}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \tag{6.7.4}$$

Ya hemos visto que

$$P_{x:\overline{n}|} = P^{1}_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\,\frac{1}{}}$$

y ahora (6.7.4) proporciona una descomposición alternativa de $P_{x:\overline{n}|}$. Los componentes son la prima anual para el seguro especial temporal y los depósitos del fondo de ahorros anual, $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$, que se acumularán hasta uno al final de n años.

Ejemplo 6.12:

Obtenga las fórmulas para la prima neta anual para un seguro sobre (x) a 20 años de plazo que proporciona al fallecimiento una suma asegurada de 5000 y el reembolso de las primas netas anuales pagadas dentro del plazo indicado de la cobertura

a. sin interés
b. acumulada a la tasa de interés empleada en la determinación de las primas.

En cada caso, el reembolso de las primas es adicional a los 5000 de suma asegurada y los pagos por indemnización se hacen al final del año de la muerte.

Solución:

a. Sea π_a la prima neta. Entonces

$$\pi_a \, \ddot{a}_{x:\overline{20|}} = 5000 A^1_{x:\overline{20|}} + \pi_a (IA)^1_{x:\overline{20|}}$$

y

$$\pi_a = 5000 \frac{A^1_{x:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - (IA)^1_{x:\overline{20|}}}$$

b. Sea π_b la prima neta. Usamos (6.7.2) para obtener

$$\pi_b \ddot{a}_{x:\overline{20|}} = 5000 A^1_{x:\overline{20|}} + \pi_b [\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - {}_{20}E_x \, \ddot{s}_{\overline{20|}}]$$

$$\pi_b \, {}_{20}E_x \, \ddot{s}_{\overline{20|}} = 5000 A^1_{x:\overline{20|}}$$

$$\pi_b = 5000 \frac{A^1_{x:\overline{20|}}}{{}_{20}E_x \, \ddot{s}_{\overline{20|}}}$$

$$= 5000 \frac{A^1_{x:\overline{20|}}}{{}_{20}p_x \, \ddot{a}_{\overline{20|}}}$$

En la práctica, las primas brutas anuales se rembolsarían, y las fórmulas lo tomarían en cuenta.

Ejemplo 6.13:

Una anualidad expedida a (x) con un ingreso anual de una unidad monetaria comenzando a la edad $x + n$, se pagará mediante primas netas anuales durante el periodo diferido. La indemnización por fallecimiento durante el periodo de pago de primas es el reembolso de las primas netas anuales acumuladas con interés a la tasa usada para la prima. Suponiendo que la indemnización por fallecimiento se paga al final del año del mismo. Determine la Prima Neta Anual.

Solución:

Igualando el valor presente actuarial de las primas anuales netas π, al valor presente actuarial de las indemnizaciones, tenemos

$$\pi\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n}E_{x}\, \ddot{a}_{x+n} + \pi(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_{n}E_{x}\, \ddot{s}_{\overline{n}|})$$

en donde el segundo término del lado derecho viene de (6.7.2). Resolviendo para π tenemos

$$\pi = \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

6.8 Notas y referencias

Lukacs (1945) proporciona una investigación del desarrollo del principio de equivalencia. En la literatura de la economía de la incertidumbre, las primas derivadas mediante la aplicación del principio de equivalencia frecuentemente se denominas primas actuariales. Los diversos tipos de primas fraccionarias son importantes en la práctica. Scher (1974) discutió los desarrollos en este terreno, específicamente, las relaciones entre primas completamente continuas, proporcionales y semicontinuas. La descomposición de una prima de seguro dotal apareció en una ponencia de Linton (1919).

6.9 Ejercicios

Sección 6.1

6.1 Determine la esperanza y la varianza del valor presente de la pérdida financiera del seguro del ejemplo 6.1, cuando se determina la prima mediante el Principio I.

Sección 6.2

6.2 Si la fuerza de mortalidad se incrementa estrictamente con la edad, demuestre que $\bar{P}(\bar{A}_x) > \mu_x$. [Sugerencia: demuestre que $\bar{P}(\bar{A}_x)$ es un promedio ponderado de μ_{x+t}, $t > 0$.]

6.3 Siguiendo el ejemplo 6.2, derive una expresión general para

$$\frac{^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{(\delta \bar{a}_x)^2}$$

Donde $\mu_{x+t} = \mu$ y δ es la fuerza de interés para $t > 0$.

6.4 Si $\delta = 0$, demuestre que

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\overset{o}{e}_x}$$

6.5 Demuestre que la varianza de la pérdida asociada con la prima neta única de un seguro de vida entera es menor que la varianza de una pérdida asociada con una prima anual de un seguro de vida entera. Suponga el pago inmediato de las reclamaciones a la muerte y pagos continuos de primas anuales netas.

6.6 Demuestre que

$$\left(1 + \frac{d\,\bar{a}_x}{dx}\right)\bar{P}(\bar{A}_x) - \frac{d\bar{A}_x}{dx} = \mu_x$$

Sección 6.3

6.7 Con base en la Tabla de mortalidad Ilustrativa y una tasa de interés de 6%, calcule los valores para las primas anuales del siguiente cuadro. Indique cualquier patrón de desigualdades que aparezca en la matriz de resultados.

Totalmente continuas	Semicontinuas	Totalmente discretas
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P_{35:\overline{10}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P_{35:\overline{30}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{60}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{60}\rceil})$	$P_{35:\overline{60}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35})$	$P(\bar{A}_{35})$	P_{35}
$\bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P(\bar{A}^{\,1}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P^{\,1}_{35:\overline{30}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P(\bar{A}^{\,1}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P^{\,1}_{35:\overline{10}\rceil}$

6.8 Demuestre que

$$ {}_{20}P^{1}_{x:30|} - P^{1}_{x:20|} = {}_{20}P(\,{}_{20|10}A_x) $$

6.9 Generalice el ejemplo 6.4 en donde

$$ {}_{k|}q_x = (1-r)r^k \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots $$

Es decir, derive expresiones en términos de r e i para A_x, $\ddot{a}_x$, P_x y $\left({}^{2}A_x - A_x^2\right)/(d\ddot{a}_x)^2$.

Sección 6.4

6.10 Usando la información dada en el ejemplo 6.9, calcule el valor $P^{(2)}_{50}$.

6.11 Usando varias fórmulas para $\ddot{a}^{(m)}_{x:n|}$ demuestre que la fracción

$$ \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} $$

en (6.4.2) puede expresarse como el recíproco de

a. $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} - \beta(m)P^{1}_{x:\overline{n}|}$

b. $\alpha(m) - \beta(m)\left(P^{1}_{x:\overline{n}|} + d\right)$

c. $1 - \dfrac{m-1}{2m}\left(P^{1}_{x:\overline{n}|} + d\right)$

6.12 Refiérase al ejemplo 6.9 (b) y calcule directamente

$$ P^{(2)}(\overline{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\overline{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} $$

usando la Tabla de mortalidad Ilustrativa para la prima neta única de la dotación en el numerador y para el valor de la anualidad vitalicia en el denominador.

6.13 Si

$$ \frac{P^{1}{}^{(12)}_{x:\overline{20}|}}{P^{1}_{x:\overline{20}|}} = 1.032 $$

y $P_{x:\overline{20}|} = 0.040$, cuál es el valor de $P^{(12)}_{x:\overline{20}|}$?

Sección 6.5

6.14 Arregle en orden de magnitud e indique su razonamiento.

$$P^{(2)}(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ \bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ P^{(4)}(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ P(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ P^{(12)}(\bar{A}_{40:\overline{25}|})$$

6.15 Dado que

$$\frac{d}{d^{(12)}} = \frac{99}{100}$$

Evalúe

$$\frac{P^{(12)}(\bar{A}_x)}{P^{(1)}(\bar{A}_x)}$$

6.16 Si $\bar{P}(\bar{A}_x)$=0.03, y si el interés es a la tasa anual efectiva de 5%, calcule la prima neta semestral de un seguro de vida entera que se emite a una persona de edad (x) con una suma asegurada de 50,000, en donde las primas son proporcionales.

6.17 Demuestre que

$$P^{(m)}(\bar{A}_{x\overline{n}|}) - P^{(m)}(\bar{A}_{x\overline{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x\overline{n}|})\left[\frac{\bar{A}_{x\overline{n}|} - A^{(m)}_{x\overline{n}|}}{\delta\ \ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|}}\right]$$

Sección 6.6

6.18 De fórmulas, en términos de funciones conmutativas para

a. ${}_{20}P^{(12)}(\bar{A}_{x:\overline{30}|})$ b. ${}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{30}|})$

c. ${}_{20}P^{(4)}(\bar{A}_{x:\overline{30}|})$ d. ${}_{20}P(_{40|}\ddot{a}_{25})$

6.19 Usando funciones conmutativas apropiadas, escriba una ecuación en la forma de (6.6.1) para la prima neta anual que se paga anualmente por 20 años, sobre un seguro temporal decreciente para una persona de edad 30. La suma asegurada inicial es de 200,000 decreciendo en 5,000 al aniversario de la póliza (al final de cada año), considere que el seguro cubre hasta la edad de 70 años:

6.20 Exprese

$$1-\frac{\ddot{s}_{\overline{20}|}}{\ddot{s}_{45:\overline{20}|}}$$

como una prima anual. Interprete su resultado.

6.21 Con base en la Tabla de mortalidad Ilustrativa y una tasa de interés de 6%, calcule los componentes de las dos expresiones

a. $1000P_{50:\overline{20}|}=1000(P^1_{50:\overline{20}|}+P_{50:\frac{1}{20}|})$

b. $1000P_{50:\overline{20}|}=1000\left(\tilde{P}^1_{50:\overline{20}|}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{20}|}}\right)$

6.22 Considere la variable aleatoria continua similar a (6.7.3),

$$\tilde{\tilde{W}}=\begin{cases} v^T\left(1-\dfrac{\bar{s}_{\overline{T}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}\right) & 0\le T<n \\ 0 & T\ge n \end{cases}$$

La pérdida,

$$L=\tilde{\tilde{W}}-\tilde{\tilde{A}}^1_{x:\overline{n}|}$$

Demuestre

a. $\tilde{\tilde{A}}^1_{x:\overline{n}|}=\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}-\dfrac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}\,{}_n p_x\,\bar{a}_{\overline{n}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}$

b. $E\left[\tilde{\tilde{W}}^2\right]=\dfrac{(1+i)^{2n}\,{}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}-2(1+i)^n\cdot\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+(1-{}_n p_x)}{[(1+i)^n-1]^2}$

Puede ser usada con el principio de equivalencia para determinar $\tilde{\tilde{A}}^1_{x:\overline{n}|}$, que es la prima neta única para esta póliza especial.

6.23 Exprese

$$A_{40}\ P_{40:\overline{25}|}+(1-A_{40})P_{40}$$

como una prima neta anual. Interprete su resultado.

6.24 a. Demuestre que

$$\frac{1}{\ddot{a}_{65:\overline{10}|}}-\frac{1}{\ddot{s}_{65:\overline{10}|}}=P^{1}_{65:\overline{10}|}+d$$

b. Cuál es la fórmula correspondiente para

$$\frac{1}{\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{10}|}}-\frac{1}{\ddot{s}^{(12)}_{65:\overline{10}|}}\ ?$$

c. Demuestre que el monto del ingreso anual provisto por una prima neta única de 100,000 en donde

- el ingreso es pagadero al principio de cada mes mientras (65) sobrevive durante los siguientes 10 años, y
- la prima única está dada por $100{,}000\left(\frac{1}{\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{12}|}}-\frac{1}{\ddot{s}^{(12)}_{65:\overline{10}|}}\right)=100{,}000(\beta)$ que es el reembolso al final de 10 años, si (65) alcanza la edad de 75, donde (β) denota la respuesta para la parte (b) de este ejercicio.

d. En términos de funciones conmutativas, demuestre que el ingreso anual del punto (c) puede expresarse como

$$100{,}000\frac{D_{65}-D_{75}}{N^{(12)}_{65}-N^{(12)}_{75}}$$

6.25 Un seguro expedido a edad (35) con primas iguales a la edad 65 proporciona

- 100,000 en caso de que el asegurado sobreviva a los 65 años de edad, y

- el reembolso de las primas anuales brutas con interés a la tasa de valuación al final del año del fallecimiento, si el asegurado muere antes de los 65.

Si la prima anual bruta G es 1.1π, en donde π es la prima neta anual, escriba una expresión para π.

6.26 Si ${}_{15}P_{45} = 0.038$, $P_{45:\overline{15}|} = 0.056$ y $A_{60} = 0.625$, calcule, $P^{1}_{45:\overline{15}|}$.

6.27 Una póliza de vida con 20 (Las primas son anuales y las reclamaciones por defunción se pagan al final del año del fallecimiento), está diseñado para rembolsar en el caso del fallecimiento 10000 u.m., más todas las primas brutas sin interés. Calcule en términos de funciones conmutativas, para una póliza expedida a (x), la prima anual bruta si esta debe ser 110% de la prima neta más 25.

6.28 Calcule, en términos de funciones conmutativas, la prima neta anual inicial de un seguro de vida entera expedido a edad (25), sujeto a las siguientes previsiones:

- La cantidad nominal es de una unidad monetaria para los primeros 10 años y 2 de ahí en adelante.
- Cada prima durante los primeros 10 años es 1/2 de cada prima pagadera de ahí en adelante.
- Las primas son pagaderas anualmente hasta la edad 65.
- Las reclamaciones se pagan al final del año del fallecimiento.

6.29 Rescriba en términos de funciones conmutativas, las primas del cuadro 6.3 con procedimientos de pago al momento del fallecimiento.

6.30 Sea L_1 la pérdida del asegurador sobre un seguro de vida entera de una unidad monetaria expedido a edad (x) en una base de primas netas totalmente continuas. Sea L_2 la pérdida de (x) en una anualidad vitalicia continua comprada por una prima neta única de una unidad monetaria. Demuestre que $L_1 \equiv L_2$ y de una explicación verbal.

6.31 Se emite un contrato de un seguro ordinario vida por una unidad monetaria sobre una base totalmente discreta a una persona de edad x con primas anuales de 0.048. Suponga $d = 0.06$, $A_x = 0.4$ y ${}^2A_x = 0.2$. Sea L la función de pérdidas del asegurador a la emisión de esta póliza.

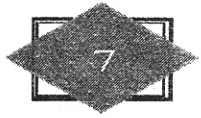
a. Calcule $E[L]$

b. Calcule $Var[L]$

d. Ahora considere una cartera de 100 pólizas de este tipo con las cantidades nominales que se dan a continuación:

Cantidad nominal	Número de pólizas
1	80
4	20

Suponga que las pérdidas son independientes, use una aproximación normal para calcular la probabilidad de que el valor presente de las ganancias para la cartera exceda de 20.



RESERVAS DE PRIMAS NETAS

7.1 Introducción

En el Capítulo 6 se introdujo el principio de equivalencia. Como lo utilizamos en nuestra discusión, una relación de equivalencia se establece en el momento en que se inicia un contrato entre dos partes que acceden a intercambiar un conjunto de pagos. Por ejemplo, en un préstamo amortizable el prestatario puede pagar una serie de pagos mensuales iguales equivalentes a un pago único al prestamista a la fecha del préstamo. Un asegurado en la fecha de la expedición de la póliza puede pagar una serie de primas netas a un asegurador, equivalente a la suma asegurada sobre la muerte del asegurado, o a la sobrevivencia del mismo a la fecha de vencimiento. Un individuo puede adquirir en la fecha de consentimiento del contrato, una anualidad vitalicia diferida por medio de primas iguales pagaderas a una aseguradora, equivalente, a pagos mensuales que la aseguradora se compromete a otorgar al individuo siempre y cuando esa persona sobrevive más allá de la fecha especificada. La equivalencia en el ejemplo del préstamo está en términos del valor presente, mientras que en el seguro y la anualidad es una equivalencia entre dos valores presentes actuariales.

Sin embargo, después de un período de tiempo ya no habrá equivalencia entre las dos obligaciones financieras futuras de las partes. El que pide prestado puede tener que seguir haciendo pagos mientras que el prestamista ya cumplió con sus responsabilidades. En otros casos, ambas partes pueden todavía tener obligaciones. Al asegurado puede requerírsele que pague primas netas adicionales mientras que el asegurador tiene el deber de pagar la cantidad nominal al vencimiento o muerte del asegurado. En nuestro ejemplo anterior sobre la anualidad diferida, el individuo puede haber completado sus pagos mientras que la organización todavía tiene que hacer remuneraciones mensuales.

En este capítulo aplicaremos el principio de equivalencia a pagos de periodos más allá de la fecha de inicio. Para ello se requiere un elemento de balance, éste será una obligación o deuda para una de las partes y un activo para la

otra. En el caso del préstamo, el elemento de balance es la deuda principal, un activo para el prestamista y una obligación para el prestatario. En los otros dos casos, el elemento de balance se denominará reservas de primas netas. Esta es una obligación que deberá reconocerse en cualquier estado financiero de un asegurador u organización de anualidades, cualquiera que sea el caso. También es un activo para el asegurado o individuo que adquiera una anualidad.

Parte de las secciones de este capítulo serán similares a las del Capítulo 6 sobre primas netas. También asumiremos que las tasas de mortalidad y de interés, adoptadas a la expedición de la póliza para la determinación de las primas netas, continuarán siendo apropiadas y se utilizarán para la determinación de las reservas de primas.

Ejemplo 7.1:
Suponga que un asegurado está vivo todavía un año después de iniciado el acuerdo de seguro del ejemplo 6.1. Evalúe el valor presente de las obligaciones financieras futuras en ese momento. Utilice la prima anual 0.3667, determinada en el ejemplo 6.1.

Solución:
La *f.p.* para K, el tiempo futuro de vida truncado, se hizo igual a 1/4 para $k = 0,1,2,3$. La *f.p.* condicional para K, dado que $K \geq 1$, es

$$\Pr\left[K = k \middle| K \geq 1\right] = \frac{\Pr(K=k)}{\Pr(K \geq 1)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \qquad k = 1,2,3.$$

Los valores presentes requeridos se indican en el siguiente cuadro:

		Valor presente (un año después de la expedición de la póliza, $i = 0.06$) de las obligaciones futuras del		
Resultado k	Probabilidad condicional	Asegurador	Asegurado	Pérdida Prospectiva del Asegurador
1	1/3	$v = 0.9434$	$P = 0.3667$	0.5767
2	1/3	$v^2 = 0.8900$	$P\ddot{a}_{\overline{2}\rceil} = 0.7126$	0.1774
3	1/3	$v^3 = 0.8396$	$P\ddot{a}_{\overline{3}\rceil} = 1.0390$	-0.1994

El valor presente actuarial de las obligaciones del asegurador es

$$\frac{1}{3}(0.9434 + 0.8900 + 0.8396) = 0.8910$$

De igual forma, el valor presente actuarial de las obligaciones del asegurado es 0.7061. En el balance, la diferencia

$$0.8910 - 0.7061 = 0.1849$$

es la reserva de la prima neta a un año después de la expedición de la póliza (tiempo 1), inmediatamente antes de que se pague la segunda prima.

Alternativamente, podemos examinar el valor esperado de la pérdida prospectiva. Para cada valor de K, la pérdida prospectiva es la diferencia entre los valores presentes de las obligaciones del asegurador y del asegurado. El valor esperado de la pérdida prospectiva es

$$\frac{1}{3}(0.5767 + 0.1774 - 0.1994) = 0.1849 \qquad \square$$

7.2 Reservas de Primas Netas Totalmente Continuas

Desarrollaremos ahora las ideas sobre reservas relacionadas con las primas netas discutidas en la Sección 6.2 a través del principio de equivalencia.

Consideremos las reservas para un seguro de vida entera de una unidad expedido a (x), sobre una base totalmente continua con una prima anual de $\bar{P}\left(\bar{A}_{[x]}\right)$. La reserva correspondiente para un asegurado que sobrevive al final de t años esta definida bajo el principio de equivalencia de la esperanza condicional de la perdida prospectiva al año t, cuando (x) ha sobrevivido a t. En forma más formal la pérdida prospectiva, para $T(x) > t$ es

$$_tL = v^{T(x)-t} - \bar{P}\left(\bar{A}_{[x]}\right)\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|} \qquad (7.2.1)$$

La reserva, es la esperanza condicional, calculada bajo la condición de la distribución del tiempo futuro para t para una vida de edad selecta x. En notación Actuarial Internacional esto es

$$
\begin{aligned}
{}_t\overline{V}\left(\overline{A}_{[x]}\right) &= E\left[{}_tL \middle| T(x) > t\right] \\
&= E\left[v^{T(x)-t} \middle| T(x) > t\right] - \overline{P}\left(\overline{A}_{[x]}\right) E\left[a_{\overline{T(x)-t}|} \middle| T(x) > t\right] \\
&= \overline{A}_{[x]+t} - \overline{P}\left(\overline{A}_{[x]}\right) \overline{a}_{[x]+t}
\end{aligned}
$$

Si la edad lograda era la única información dada en la aplicación el seguro en la edad x, o por una cierta otra razón una **tabla de mortalidad agregada** se utiliza para la distribución del curso de la vida futura, después la distribución condicional de $T(x)$-t es igual que la distribución de $T(x+t)$, y la expresión anterior se simboliza como

$$
{}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right) = \overline{A}_{x+t} - \overline{P}\left(\overline{A}_x\right) \overline{a}_{x+t} \tag{7.2.2}
$$

El mismo efecto se produce si para determinar ${}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right)$ bajo el principio de equivalencia, si introducimos la variable aleatoria U, que denota el tiempo transcurrido hasta que se sobreviene la muerte de $(x+t)$, con la *f.d.p.* dada por

$$
{}_u p_{x+t}\, \mu_{x+t+u} \qquad u \geq 0
$$

Ahora definamos la ***pérdida prospectiva*** en el tiempo t como

$$
{}_tL = v^U - \overline{P}\left(\overline{A}_x\right) \overline{a}_{\overline{U}|} \tag{7.2.1 bis}
$$

Definamos la reserva de la prima neta como la esperanza de la pérdida prospectiva. Por lo tanto tenemos

$$
\begin{aligned}
{}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right) &= E\left[{}_tL\right] = E\left[v^U\right] - \overline{P}\left(\overline{A}_x\right) E\left[\overline{a}_{\overline{U}|}\right] \\
&= \overline{A}_{x+t} - \overline{P}\left(\overline{A}_x\right) \overline{a}_{x+t}
\end{aligned} \tag{7.2.2 bis}
$$

Esta fórmula establece (ya sea 7.2.2 o 7.2.2 bis) que la reserva es igual al:

(valor presente actuarial para el seguro de vida entera desde la edad $x + t$) menos
(el valor presente actuarial de las primas netas futuras pagaderas a partir de la edad $x+t$ a una prima anual de $\overline{P}(\overline{A}_x)$).

Las formulaciones de $\overline{P}(\overline{A}_x)$ y ${}_t\overline{V}(\overline{A}_x)$ están relacionadas. Cuando $t = 0$, la fórmula (7.2.2) produce ${}_0\overline{V}(\overline{A}_x) = 0$. Esto es una consecuencia de aplicar el principio de equivalencia para el tiempo en el que se determinan las primas netas.

Con base a lo desarrollado, nótese que la distribución de U es la distribución condicional de $T - t$, dado que $T > t$. Es decir, la *f.d.* de U es

$$1 - \frac{{}_{t+u}P_x}{{}_tP_x} = {}_uq_{x+t}$$

y su *f.d.p.* es

$$\frac{{}_{t+u}P_x\mu_{x+t+u}}{{}_tP_x} = {}_uP_{x+t}\mu_{x+t+u}$$

Mediante pasos similares a los utilizados para obtener (6.2.6), determinamos

$${}_tL = v^U\left[1 + \frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right] - \frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta} \tag{7.2.3}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} Var[{}_tL] &= \left[1 + \frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right]^2 Var\left[v^U\right] \\ &= \left[1 + \frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right]^2 \left({}^2\overline{A}_{x+t} - \overline{A}^2_{x+t}\right) \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

Nótese la relación con (6.2.6).

Ejemplo 7.2:

Siga el Ejemplo 6.2 mediante el cálculo de ${}_t\overline{V}(\overline{A}_x)$ y $Var[{}_tL]$.

Solución:
Ya que $\overline{A}_x$, $\overline{a}_x$ y $\overline{P}(\overline{A}_x)$ son independientes de la edad x, (7.2.2) se transforma en

$${}_t\overline{V}(\overline{A}_x) = \overline{A}_x - \overline{P}(\overline{A}_x)\,\overline{a}_x = 0 \quad t \geq 0$$

En este caso, las primas futuras son siempre equivalentes a las indemnizaciones futuras y no se necesita de reserva para el balance.

También, en este caso, (7.2.4) se reduce a

$$Var[{}_tL] = \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2 \left({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2\right) = Var[L] = 0.25$$

como en el Ejemplo 6.2. Aquí la varianza no depende ni de la edad x ni de la duración t.

Ejemplo 7.3:

Si la mortalidad sigue la Ley de Moivre con $l_x = 100 - x$ y la tasa de interés es 6%, calcule

a. $\bar{P}(\bar{A}_{35})$

b. ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35})$ y $Var[{}_tL]$ para $t = 0, 10, 20, \ldots, 60$.

Solución

a. De $l_x = 100 - x$, obtenemos ${}_tp_{35} = 1 - \frac{t}{65}$ y ${}_tp_{35}\,\mu_{35+t} = \frac{1}{65}$ para $0 \le t < 65$.

Se sigue que

$$\bar{A}_{35} = \int_0^{65} v^t \frac{1}{65}\,dt = \frac{\bar{a}_{\overline{65}|}}{65} = 0.258047$$

y

$$\bar{a}_{35} = \frac{1 - \bar{A}_{35}}{\log 1.06} = 12.7333$$

Entonces

$$\bar{P}(\bar{A}_{35}) = \frac{0.258047}{12.7333} = 0.020266$$

b. A la edad $35+t$, tenemos $\bar{A}_{35+t} = \frac{\bar{a}_{\overline{65-t}|}}{65-t}$ y

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{35}) = \bar{A}_{35+t} - 0.020266 \frac{1-\bar{A}_{35+t}}{\log 1.06} $$

Además,

$$ {}^2\bar{A}_{35+t} = \int_0^{65-t} v^{2u} \frac{1}{65-t} du = \frac{{}^2\bar{a}_{\overline{65-t}|}}{65-t} $$

y, de (7.2.4),

$$ Var[{}_tL] = \left(1 + \frac{0.020266}{\log 1.06}\right)^2 ({}^2\bar{A}_{35+t} - \bar{A}_{35+t}^2) $$

Aplicando estas fórmulas, obtenemos los siguientes resultados

t	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35})$	$Var[{}_tL]$
0	0.0000	0.1187
10	0.0557	0.1201
20	0.1289	0.1174
30	0.2271	0.1073
40	0.3619	0.0861
50	0.5508	0.0508
60	0.8214	0.0097

∇

Por analogía con el nivel de indemnización y las primas netas, podemos definir la pérdida prospectiva en forma general para un seguro totalmente continuo, como

$$ {}_tL = b_{t+U} v^U - \int_0^U \pi_{t+s} v^s ds $$

en donde b_{t+U} es el monto de la indemnización pagadera si la muerte ocurre en el tiempo $t+U$ y π_{t+s} es la tasa anual de pago en el tiempo $t+s$ de la prima neta totalmente continua. Entonces la reserva de prima neta denotada como ${}_t\bar{V}$, para este caso general, es

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V} = E\left[{}_tL\right] &= \int_0^\infty \left(b_{t+u}v^u - \int_0^u \pi_{t+s}v^s ds \right)_u p_{x+t}\ \mu_{x+t+u} du \\
&= \int_0^\infty b_{t+u}v^u\ {}_u p_{x+t}\ \mu_{x+t+u} du - \int_0^\infty \pi_{t+s}v^s\ {}_s p_{x+t} ds
\end{aligned}
\tag{7.2.6}
$$

en donde la segunda integral en (7.2.6) se obtiene aplicando el teorema 3.1 o, alternativamente, invirtiendo el orden de la integración. En otras palabras, ${}_t\bar{V}$ puede expresarse como el valor presente actuarial de las indemnizaciones futuras menos el valor presente actuarial de las primas netas futuras.

En correspondencia con el cuadro 6.1, presentamos el cuadro 7.1 para las reservas. Es de precisar que no calculamos detalles de la pérdida prospectiva, ${}_tL$, ni son explícitas las fórmulas exhibidas para la $Var\left[{}_tL\right]$, las cuales corresponden a las diversas reservas.

7.3 Otras fórmulas para reservas totalmente continuas

Hasta ahora sólo hemos desarrollado un método para escribir fórmulas para las reservas totalmente continuas, denominado, ***método prospectivo*** que establece que la reserva es la diferencia entre los valores presentes actuariales de las indemnizaciones futuras y las primas netas futuras. A partir del método de proyección podemos desarrollar fácilmente otras tres fórmulas generales para pólizas con tasas de primas niveladas o iguales. Ejemplificamos esto para el caso de seguros dotales de n años.

La ***fórmula de diferencia de primas*** para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ se obtiene al factorizar $\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ de la fórmula para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ del Cuadro 7.1 :

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \right] \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \right] \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}
\end{aligned}
\tag{7.3.1}
$$

Cuadro 7.1 Reservas de primas netas totalmente continuas, para una edad x a la fecha de expedición; duración t y una cantidad unitaria

Plan	Notación Actuarial Internacional	Fórmula Prospectiva
Seguro de vida entera	${}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right)$	$\overline{A}_{x+t} - \overline{P}\left(\overline{A}_x\right)\overline{a}_{x+t}$
Seguro temporal a n años	${}_t\overline{V}\left(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)$	$\begin{cases} \overline{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|} - \overline{P}\left(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t<n \\ 0 & t=n \end{cases}$
Seguro dotal a n años	${}_t\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)$	$\begin{cases} \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \overline{P}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t<n \\ 1 & t=n \end{cases}$
Seguro de vida entera con h años de pago	${}^h_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right)$	$\begin{cases} \overline{A}_{x+t} - {}_h\overline{P}\left(\overline{A}_x\right)\overline{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & t\le h \\ \overline{A}_{x+t} & t>h \end{cases}$
Seguro dotal a n años con h años de pago	${}^h_t\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)$	$\begin{cases} \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_h\overline{P}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)\overline{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & t\le h<n \\ \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} & h<t<n \\ 1 & t=n \end{cases}$
Seguro dotal puro a n años	${}_t\overline{V}\left(\overline{A}^{\frac{1}{}}_{x:\overline{n}|}\right)$	$\begin{cases} \overline{A}^{\frac{1}{}}_{x+t:\overline{n-t}|} - \overline{P}\left(\overline{A}^{\frac{1}{}}_{x:\overline{n}|}\right)\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t<n \\ 1 & t=n \end{cases}$
Anualidad vida entera (vitalicia) diferida n años	${}_t\overline{V}\left({}_{n|}\overline{a}_x\right)$	$\begin{cases} {}_{n-t|}\overline{a}_{x+t} - \overline{P}\left({}_{n|}\overline{a}_x\right)\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t\le n \\ \overline{a}_{x+t} & t>n \end{cases}$

Este muestra la reserva como el valor presente actuarial de una diferencia de primas pagadera durante el período de pagos de primas restantes. La diferencia de primas se obtiene al restar la prima neta anual original de las primas similares de un seguro expedido a la edad alcanzada $x + t$ para las indemnizaciones restantes.

Se obtiene una segunda fórmula al factorizar el valor presente actuarial de las indemnizaciones futuras de la fórmula prospectiva. Por lo tanto, para ${}_t\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
{}_t\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) &= \left[1 - \overline{P}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)\frac{\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\right]\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \left[1 - \frac{\overline{P}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)}{\overline{P}\left(\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)}\right]\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}
\end{aligned}
\qquad (7.3.2)
$$

Esta muestra aquella porción que no está formada por las primas netas que aún no han sido cobradas, por lo que la reserva esta definida como el valor presente actuarial de una porción de las indemnizaciones futuras restantes. Nótese que $\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})$ es la prima neta requerida si las indemnizaciones futuras se formasen a partir de las primas netas a edad $x+t$, pero $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ es la prima neta realmente pagadera. Por lo tanto, $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})/\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})$ es la parte de las indemnizaciones formadas por las primas futuras. A esto se le llama ***fórmula de un seguro totalmente pagado***, derivado el nombre del seguro totalmente pagado sin pérdida de indemnización que se discutirá en el Capítulo 15. Existen fórmulas similares a (7.3.1) y (7.3.2) para una amplia variedad de reservas de seguros.

Una tercera expresión es la ***fórmula retrospectiva***. La desarrollaremos a partir de una relación más general. Tenemos, del ejercicio 4.12 y de (5.3.22), (5.3.24), para $t<n-s$,

$$\bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|} = \bar{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\,\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}$$

$$\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|} = \bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\cdot\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de proyección para ${}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ obtenemos

$$\begin{aligned}{}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}_{x+s:\overline{t}|}^{\,1} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} \\ &\quad + {}_tE_{x+s}\left[\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right] \\ &= \bar{A}_{x+s:\overline{t}|}^{\,1} + {}_tE_{x+s}\cdot {}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|}\end{aligned} \qquad (7.3.3)$$

Por tanto las reservas al principio y al final de un intervalo están vinculadas mediante el siguiente argumento:

(la reserva al principio)
= (el valor presente actuarial de las indemnizaciones pagaderas durante el intervalo)
+ (el valor presente actuarial de un dotal puro por el monto de la reserva al final del intervalo)
- (el valor presente actuarial de las primas netas pagaderas durante el intervalo).

La forma simbólica reacomodada,

$$ {}_{s}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{t}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t-s}|} = \bar{A}_{x+s:\overline{t-s}|} + {}_{t-s}E_{x+s} \cdot {}_{s}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) \quad \text{(Ver 1987 *1)} \qquad (7 $$

muestra que los valores presentes actuariales de los recursos del asegurador y los requerimientos son iguales.

La fórmula retrospectiva se obtiene de (7.3.4) estableciendo $s = 0$, notando que ${}_{0}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) = 0$ por el principio de equivalencia, y resolviendo para ${}_{t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|})$. Tenemos,

$$ {}_{t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) = \frac{1}{{}_{t}E_{x}}\left[\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{t}|})\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{t}|}\right] $$

Además, $\bar{s}_{x:\overline{t}|} = \bar{a}_{x:\overline{t}|}/{}_{t}E_{x}$ así la fórmula se reduce a

$$ {}_{t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) = \frac{1}{{}_{t}E_{x}}\left[\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{t}|})\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{t}|}\right] \qquad (7.3.5) $$

Adicionalmente $\bar{s}_{x:\overline{t}|} = \bar{a}_{x:\overline{t}|}/{}_{t}E_{x}$, por lo que la expresión se reduce

$$ {}_{t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) \cdot \bar{s}_{x:\overline{t}|} - {}_{t}\bar{k}_{x} \qquad (7.3.6) $$

Donde

$$ {}_{t}\bar{k}_{x} = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{t}|}}{{}_{t}E_{x}} $$

es llamado ***costo acumulado del seguro***. Se nota que

$$ \begin{aligned} {}_{t}\bar{k}_{x} &= \int_{0}^{t} \frac{v^{s}\,{}_{s}p_{x}\mu_{x+s}}{v^{t}\,{}_{t}p_{x}}ds \\ &= \int_{0}^{t} \frac{(1+i)^{t-s} l_{x+s}\mu_{x+s}ds}{l_{x+t}} \end{aligned} \qquad (7.3.7) $$

Esto puede interpretarse como la valoración de cada uno de los l_{x+t} sobrevivientes para proveer al valor acumulado de las reclamaciones por muerte del grupo sobreviviente entre las edades x y $x + t$. Por lo tanto, la reserva puede verse como la diferencia entre las primas netas, acumuladas con interés y repartidas sólo entre los sobrevivientes a la edad $x + t$, y el costo acumulado del seguro.

(*1)En la Versión 1986 ${}_{s}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|}) + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{t}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t-s}|} = \bar{A}_{x+s:\overline{t-s}|} + {}_{t-s}E_{x+s} \cdot {}_{s}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{t}|})$

Puede surgir una duda en relación a si una fórmula ***prospectiva*** o la ***retrospectiva*** debería utilizarse en los cálculos numéricos. En relación a ello se tiene dos criterios que son:

- La fórmula prospectiva es más conveniente para duraciones posteriores al periodo de pago de la prima. En tales casos, la reserva se simplifica al valor presente actuarial, a la edad alcanzada, de las indemnizaciones futuras. Por ejemplo, para $t \geq h$, ${}_t^h\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t}$.

- La fórmula retrospectiva es más conveniente en un periodo diferido durante el que no se han proporcionado indemnizaciones. La reserva en este caso se simplifica al valor acumulado actuarial de las primas netas pasadas. Por ejemplo, para $t < n$, ${}_t\bar{V}\left({}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)}\right) = \bar{P}({}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)})\bar{s}_{x:\overline{t}|}$.

Concluimos esta sección con algunas fórmulas especiales para reservas de seguros de vida entera.

Fórmulas similares son válidas para las reservas de seguros dotales a n años, pero no para las reservas de seguros en general. La primera de estas se sigue de la fórmula (6.2.9), $\bar{P}(\bar{A}_x) = (1/\bar{a}_x) - \delta$. Para obtener,

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= 1 - \delta \cdot \bar{a}_{x+t} - \left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \delta\right)\bar{a}_{x+t} \\
&= 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}.
\end{aligned}
\tag{7.3.8}
$$

Además, usando (7.3.1) se obtiene

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \left[\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)\right]\bar{a}_{x+t} \\
&= \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) + \delta}
\end{aligned}
\tag{7.3.9}
$$

Finalmente, podemos reescribir (7.3.8) utilizando $\bar{A}_{x+t} = 1 - \delta\,\bar{a}_{x+t}$, para obtener

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \frac{1 - \bar{A}_{x+t}}{1 - \bar{A}_x} = \frac{\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}
\tag{7.3.10}
$$

7.4 Reservas de primas netas totalmente discretas

Las reservas que se discuten aquí están relacionadas con las primas netas anuales tratadas en la Sección 6.3, es decir, para el caso del pago de primas anuales y pago de la indemnización al final del año del fallecimiento. Para efecto de introducirnos en el tema, consideremos un seguro de vida entera que paga una unidad monetaria de suma asegurada en caso de fallecimiento, con prima neta anual P_x. Para este caso, la reserva al final de k años se denota por ${}_kV_x$. Siguiendo el desarrollo en las Secciones 6.3 y 7.2, definimos la variable aleatoria J como el ***tiempo futuro de vida truncado*** de $(x+k)$ con *f.p.* ${}_jp_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$, $j = 0,1,2, \ldots$. La pérdida prospectiva se define entonces como

$$ {}_kL = v^{J+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{\overline{J+1}|} \tag{7.4.1} $$

y la definición de que ${}_kV_x = E[{}_kL]$ produce

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k} \tag{7.4.2} $$

Esta fórmula prospectiva para ${}_kV_x$ es el valor presente actuarial del seguro de vida entera desde la edad $(x+k)$ menos el valor presente actuarial de las primas netas futuras P_x. Comparándolo con el desarrollo en la Sección 7.2, observamos que $J = K - k$ con *f.p.*

$$ {}_jp_{x+k} \cdot q_{x+k+j} = \frac{{}_{k+j}p_x \, q_{x+k+j}}{{}_kp_x} $$

Aquí estamos tratando con probabilidades condicionales sobre (x) sobrevivientes a la edad $(x+k)$.

En forma análoga a (7.2.4), tenemos

$$ \begin{aligned} Var[{}_kL] &= Var\left[v^{J+1}\left(1+\frac{P_x}{d}\right)\right] \\ &= \left[1+\frac{P_x}{d}\right]^2 Var\left[v^{J+1}\right] \end{aligned} \tag{7.4.3} $$

Ejemplo 7.4:

Siga el ejemplo 6.4 para calcular ${}_kV_x$ y $Var[{}_kL]$.

Solución

Considerando $\bar{A}_{x:\overline{1}|}$, $\ddot{a}_x$ y P_x son independientes de la edad x, así $A_{x+k} = A_x$ y

$$ {}_kV_x = A_x - P_x \cdot \ddot{a}_x = 0 \qquad k = 0,1,2,.... $$

También como (7.4.3), $Var[{}_kL] = Var[L] = 0.2347$ ∇

Ahora consideraremos en forma más general un seguro totalmente discreto sobre (x) en el que:

- la indemnización por fallecimiento es pagadera al final del año de la póliza del fallecimiento;
- las primas se pagan anualmente, al principio del año de la póliza;
- la indemnización por fallecimiento en el j-ésimo año de la póliza es b_j, $j = 1,2,...$
- el pago de la prima en el j-ésimo año de la póliza es π_{j-1}, $j = 1,2,...$

La pérdida prospectiva, a partir del final del año de la póliza k, es en este momento

$$ {}_kL = b_{k+J+1} \cdot v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h} \cdot v^h \qquad (7.4.4) $$

La reserva de prima neta, denotada por ${}_kV$ se define como

$$ \begin{aligned} {}_kV = E[{}_kL] &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[b_{k+j+1} v^{j+1} - \sum_{h=0}^{j} \pi_{k+h} v^h \right] {}_jp_{x+k} \cdot q_{x+k+j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{k+j+1} v^{j+1} {}_jp_{x+k} \cdot q_{x+k+j} - \sum_{h=0}^{\infty} \pi_{k+h} v^h \cdot {}_hp_{k+x} \end{aligned} \qquad (7.4.5) $$

en donde la segunda suma en (7.4.5) se obtiene al aplicar el Teorema 3.2 ó invirtiendo el orden de la suma. Por lo tanto, así como para otras reservas, ${}_kV$ es el valor presente actuarial de las indemnizaciones futuras menos el valor presente actuarial de las primas netas futuras.

Las fórmulas que se exhiben en el Cuadro 7.2 corresponden a las primas netas del Cuadro 6.2 y son similares a las del Cuadro 7.1.

Cuadro 7.1 Reservas de primas netas totalmente discretas, para una edad x a la fecha de expedición; duración k y una cantidad unitaria

Plan	Notación Actuarial Internacional	Fórmula Prospectiva
Seguro de vida entera	${}_kV_x$	$A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$
Seguro temporal a n años	${}_kV^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	$\begin{cases} A^{1}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - P^{1}_{x:\overline{n}\rceil}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} & k<n \\ 0 & k=n \end{cases}$
Seguro dotal a n años	${}_kV_{x:\overline{n}\rceil}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - P_{x:\overline{n}\rceil} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} & k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
Seguro de vida entera con h años de pago	${}^{h}_{k}V_x$	$\begin{cases} A_{x+k} - {}_hP_x \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rceil} & k<h \\ A_{x+k} & k \geq h \end{cases}$
Seguro dotal a n años con h años de pago	${}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}\rceil}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - {}_hP_{x:\overline{n}\rceil} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rceil} & k<h<n \\ A_{x+k:\overline{n-k}\rceil} & h \leq k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
Seguro dotal puro a n años	${}_kV^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	$\begin{cases} A^{1}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - P^{1}_{x:\overline{n}\rceil} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} & k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
Anualidad vida entera (vitalicia) diferida n años	${}_kV\left({}_{n|}\ddot{a}_x\right)$	$\begin{cases} {}_{n-k|}\ddot{a}_{x+k} - P\left({}_{n|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} & k<n \\ \ddot{a}_{x+k} & k \geq n \end{cases}$

Ejemplo 7.5:
Determine la $Var[{}_kL]$ para un seguro dotal a n años

Solución:

$$
\begin{aligned}
{}_kL &= v^{J+1}\left[1+\frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d}\right] - \frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d} \quad J<n-k \\
&= v^{n-k}\left[1+\frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d}\right] - \frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d} \quad J \geq n-k
\end{aligned}
$$

J tiene $f.p.\ {}_jp_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$, $j=1,\ldots$ De ello obtenemos

$$
Var[{}_kL] = \left[1+\frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d}\right]^2 \left[{}^{2}A_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - A^{2}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}\right]
$$

∇

En otros casos diferentes a los del seguro de vida entera o dotal con primas que se pagan durante toda la vigencia del seguro, las expresiones de la varianza de la pérdida contienen muchos términos. En tales casos, los resultados de la Sección 7.10 pueden facilitar los cálculos.

Se pueden desarrollar fórmulas similares a las de la Sección 7.3 para las reservas de primas netas totalmente discretas. Lo ejemplificaremos expresando las fórmulas para ${}_kV_{x:\overline{n}|}$ con una explicación mínima. Las interpretaciones y los manejos algebraicos siguen muy de cerca el proceso realizado para las reservas de primas netas totalmente continuas.

La fórmula de diferencia de primas es

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = \left(P_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{7.4.6} $$

La del seguro totalmente pagado es

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = \left[1 - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}\right] A_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{7.4.7} $$

Para la fórmula retrospectiva, establecemos primero un resultado similar al de (7.3.3), específicamente, para $h < n - j$

$$ {}_jV_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x+j:\overline{h}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} + {}_hE_{x+j}\cdot {}_{j+h}V_{x:\overline{n}|} \tag{7.4.8} $$

Entonces, si $j = 0$, tenemos ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$,

$$ \begin{aligned} {}_hV_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{{}_hE_x}\left[P_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - A^{1}_{x:\overline{h}|}\right] \\ &= P_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x \end{aligned} \tag{7.4.9} $$

Donde ${}_hk_x = A^{1}_{x:\overline{h}|}/{}_hE_x$ es el costo acumulado del seguro y es posible una interpretación sobre el grupo sobreviviente.

De la fórmula retrospectiva se puede hacer una interesante observación para la reserva. Consideremos dos pólizas diferentes expedidas a edad (x), cada una por una unidad monetaria de seguro durante los primeros h años. Donde h es

menor o igual que al más pequeño de los dos periodos de pagos de primas. Las fórmulas retrospectivas para las reservas son

$$ {}_hV_{(1)} = P_{(1)}\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x $$

y

$$ {}_hV_{(2)} = P_{(2)}\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x $$

Se sigue que

$$ {}_hV_{(1)} - {}_hV_{(2)} = \left(P_{(1)} - P_{(2)}\right)\ddot{s}_{x:\overline{h}|} \qquad (7.4.10) $$

que demuestra que la diferencia en las dos reservas es igual al valor acumulado actuarial de la diferencia $P_{(1)} - P_{(2)}$ en las primas netas. Ya que

$$ \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{h}|}} = \frac{{}_hE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = P_{x:\overline{h}|}^{\ 1} $$

la fórmula (7.4.10) puede reacomodarse como

$$ P_{(1)} - P_{(2)} = P_{x:\overline{h}|}^{\ 1}\left({}_hV_{(1)} - {}_hV_{(2)}\right) \qquad (7.4.11) $$

Ahora la diferencia en las primas netas se expresa como la prima neta para un dotal puro a h años, multiplicado por la diferencia entre las reservas al final de los h años. La fórmula (6.3.10) es un caso especial de (7.4.11) con ${}_nV_{x:\overline{n}|} = 1$ y ${}_nV_x = A_{x+n}$. Otro ejemplo es

$$ P_x = P_{x:\overline{n}|}^{\ 1} + P_{x:\overline{n}|}^{\ 1} \cdot {}_nV_x \qquad (7.4.12) $$

ya que ${}_nV_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = 0$.

Al igual que en el caso totalmente continuo, existen fórmulas especiales para las reservas de los seguros de vida entera y dotales en el caso totalmente discreto. En forma similar a (7.3.8) - (7.3.10), tenemos mediante el uso de las relaciones $A_y = 1 - d\,\ddot{a}_y$ y $1/\ddot{a}_y = P_y + d$

$$ \begin{aligned} {}_kV_x &= 1 - d\,\ddot{a}_{x+k} - \left(\frac{1}{\ddot{a}_x} - d\right)\ddot{a}_{x+k} \\ &= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \end{aligned} \qquad (7.4.13) $$

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{1 - A_{x+k}}{1 - A_x} = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x} \qquad (7.4.14) $$

y

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{P_x + d}{P_{x-k} + d} = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d} \quad (*) \qquad (7.4.14) $$

Ejemplo 7.6:

Suponga que un seguro de vida temporal a 5 años por un monto de suma asegurada de 1,000 u.m. el se emite sobre una base totalmente discreta a cada miembro de un grupo de l_{50} (personas de edad 50 años). Encuentre el flujo de caja esperado para este grupo con base en la Tabla de mortalidad Ilustrativa con interés de 6% y, como subproducto, obtenga las reservas de la prima neta.

Solución:

Primero calculamos la prima neta anual, $\pi = 1\,000\ P_{\overline{50:5|}}^{1} = 6.55692$.

Después se calcula la acumulación esperada de fondo para el grupo a través del cobro de las primas, la acreditación del interés y los pagos por reclamaciones, tal como se muestra en el siguiente cuadro.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8) $1000\ {}_hV_{\overline{50:5|}}^{1}$
Año h	$l_{50+h-1} \cdot \pi$	$(2)_h + (6)_{h-1}$	$(0.06)(3)_h$	$1000\, d_{50+h-1}$	$(3)_h + (4)_h - (5)_h$	l_{50+h}	$(6)_h \div (7)_h$
1	586 903	586 903	35 214	529 884	92 233	88 979.11	1.04
2	583 429	675 662	40 540	571 432	144 770	88 407.68	1.64
3	579 682	724 452	43 467	616 416	151 503	87 791.26	1.73
4	575 640	727 143	43 629	665 065	105 707	87 126.20	1.21
5	571 280	676 987	40 619	717 606	0	86 408.60	0.00

(1) año h
(2) Primas esperadas al principio del año
(3) Fondo esperado al principio del año
(4) Interes esperado
(5) Reclamaciones por fallecimiento esperadas
(6) Fondo esperado al final del año
(7) Número de sobrevivientes esperado al final del año
(8) Reserva Terminal año h

(*) **Fórmulas especiales similares son también válidas para las reservas del seguro dotal a n años, pero no para reservas de seguros en general.**

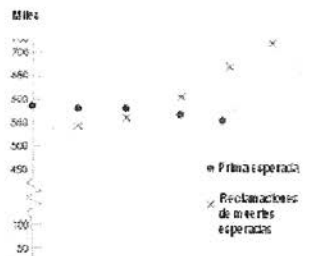


Figura 7.1. Primas y Reclamaciones por fallecimiento esperado para el ejercicio 7.6

Ejemplo 7.7:

Suponga que se expide un seguro dotal a cinco años por 1,000 u.m. con una base totalmente discreta a cada miembro de un grupo de personas de edad 50 años (l_{50}). Encuentre el flujo de caja esperado para este grupo con base en la Tabla de mortalidad Ilustrativa con interés de 6%, y obtenga, como subproducto, las reservas de las primas netas.

Solución:

Determinemos primero la prima neta anual; $\pi = 1000\, P_{50:\overline{5}|} = 170.083$. El flujo de caja esperado se muestra en el siguiente cuadro.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8) $1000\,{}_hV_{50:\overline{5}|}$
Año h	$l_{50+h-1}\pi$	$(2)_h + (6)_{h-1}$	$(0.06)(3)_h$	$1000\,d_{50+h-1}$	$(3)_h + (4)_h - (5)_h$	l_{50+h}	$(6)_h \div (7)_h$
1	15 233 954	15 223 954	913 437	529 884	15 607 507	88 979.11	175.14
2	15 133 829	30 741 336	1 844 480	571 432	32 014 384	88 407.68	362.12
3	15 036 638	47 051 022	2 823 061	616 416	49 257 667	87 791.26	561.08
4	14 931 796	64 189 463	3 851 368	665 065	67 375 766	87 126.20	773.31
5	14 818 680	82 194 446	4 931 667	717 606	86 408 507	86 408.60	1 000.00

(1) año h
(2) Primas esperadas al principio del año
(3) Fondo esperado al principio del año
(4) Interés esperado
(5) Reclamaciones por fallecimiento esperadas
(6) Fondo esperado al final del año
(7) Número de sobrevivientes esperado al final del año
(8) Reserva Terminal año h

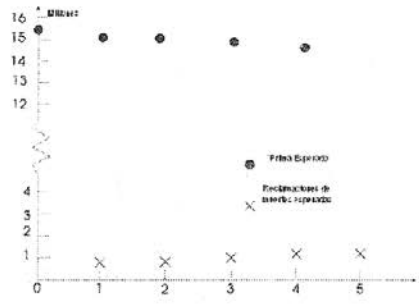


Figura 7.2. Primas y Reclamaciones por fallecimiento esperado para el ejercicio 7.7.

En las figuras 7.1 y 7.2 se muestran las primas y reclamaciones por fallecimiento esperadas para los dos ejemplos anteriores. En el 7.6, las primas exceden a las reclamaciones por fallecimiento esperadas durante dos años, pero a partir de ahí son menores que las reclamaciones. Las primas en exceso se acumulan en un fondo en los primeros años y se retirarán en los últimos años cuando las reclamaciones son mayores. Al final de los cinco años, se espera que el fondo se haya agotado.

Para el caso del ejemplo 7.7, la situación es bastante diferente. Como se muestra en la figura 7.2, las primas esperadas permanecen durante todo el tiempo en exceso de las reclamaciones por fallecimiento. El fondo esperado al final de los cinco años es suficiente para proporcionar 1,000 en los pagos por maduración a cada uno de los sobrevivientes esperados.

7.5 Reservas con una Base Semicontinua

Al final de la Sección 6.3 se señaló que, en la práctica, hay una necesidad de primas anuales netas semicontinuas $P(\overline{A}_x)$, $P(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|})$, $P(\overline{A}_{x:\overline{n}|})$, ${}_hP(\overline{A}_x)$ y ${}_hP(\overline{A}_{x:\overline{n}|})$ para tomar en cuenta los pagos inmediatos de reclamaciones por fallecimiento. En tales casos, las fórmulas de reserva del Cuadro 7.2 necesitan revisarse mediante el reemplazo de A por $\overline{A}$ y de P por $P(\overline{A})$. Por lo tanto, como ejemplo, para un seguro dotal a n años con h pagos anuales

$$ {}^{h}_{k}V\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)=\begin{cases}\overline{A}_{x+k\,:\,\overline{n-k}|}-{}_{h}P\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+k\,:\,\overline{h-k}|} & k<h<n\\ \overline{A}_{x+k\,:\,\overline{n-k}|} & h\le k<n\\ 1 & k=n\end{cases} \qquad (7.5.1) $$

si suponemos una distribución uniforme de los fallecimientos para cada intervalo de año de edad, tenemos, de (4.4.2) y (6.3.12),

$$ {}^{h}_{k}V\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)=\frac{i}{\delta}\,{}^{h}_{k}V^{\frac{1}{1}}_{x:\overline{n}|}+{}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} \qquad (7.5.2) $$

Bajo estas circunstancias se calculan fácilmente las reservas con una base semicontinua a partir de las correspondientes reservas totalmente discretas.

7.6 Reservas con base en primas *m*-ésimas iguales

En esta sección examinamos las fórmulas de reservas correspondientes a las de las primas mensuales que se discutieron en la Sección 6.4. Mediante el método de proyección, se puede escribir una fórmula directa para ${}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, es decir,

$$ {}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|}=A_{x+k:\overline{n-k}|}-{}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \quad k<h \qquad (7.6.1) $$

Esto puede evaluarse después de obtener ${}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ mediante (6.4.1) o (6.4.2), y $\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}$ mediante (5.5.13) ó (5.5.15).

Ahora consideramos la diferencia entre ${}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ y ${}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|}$ en el caso general de un seguro dotal de pago limitado. Tenemos, para $k<h$,

$$ \begin{aligned} {}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|}-{}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} &= {}_{h}P_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}-{}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}\\ &= {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\cdot\frac{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\cdot\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}-{}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \end{aligned} \qquad (7.6.2) $$

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de muertes para cada intervalo de año de edad, (7.6.2) se convierte en

$$ {}_k^hV^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}_kV_{x:\overline{n}|} = {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left\{\frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{x:\overline{k}|}-\beta(m)A^{\ 1}_{x:\overline{k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}\right. $$

$$ \left. -\left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}-\beta(m)A^{\ 1}_{x+k:\overline{h-k}|}\right]\right\} $$

Los términos que contienen $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}$ se cancelan para producir

$$ \begin{aligned} {}_k^hV^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}_kV_{x:\overline{n}|} &= \beta(m)\cdot {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left[A^{\ 1}_{x+k:\overline{h-k}|}-P^{\ 1}_{x:\overline{k}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}\right] \\ &= \beta(m)\cdot {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\cdot {}_kV^{\ 1}_{x:\overline{h}|} \end{aligned} \qquad (7.6.3) $$

Por lo tanto,

(la reserva para un seguro con primas m-ésimas reales)

$=$ (la reserva totalmente discreta correspondiente)
+ (una reserva totalmente discreta para el plazo del seguro mayor que el periodo de pago de la prima por una fracción, $\beta(m)$ de la prima m-ésima real para el plan del seguro).

Un resultado similar es válido para las reservas con una base semicontinua con primas m-ésimas verdaderas bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos para cada intervalo de año de edad. Mediante el método de proyección, tenemos para $k < h$,

$$ {}_k^hV^{(m)}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \overline{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^{(m)}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \qquad (7.6.4) $$

Siguiendo los pasos que se relacionan con (7.6.1) y (7.6.3), obtenemos

$$ {}_k^hV^{(m)}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) = {}_k^hV\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) + \beta(m)\cdot {}_hP^{(m)}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right){}_kV^{\ 1}_{x:\overline{h}|} \qquad (7.6.5) $$

Adicionalmente, en la expresión anterior, permitiendo que $m \to \infty$ obtenemos para una base totalmente continúa

$$ {}_k^h\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) = {}_k^hV\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right) + \beta(\infty)\cdot {}_h\overline{P}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right){}_kV^{\ 1}_{x:\overline{h}|} \qquad (7.6.6) $$

Nótese otra vez que el plazo de la reserva está con una base totalmente discreta.

Ejemplo 7.8:
Para el seguro dotal a 20 años del Ejemplo 6.9 con primas semestrales, calcule

a. la reserva al final de 10 años con una base totalmente discreta
b. la reserva correspondiente con base semicontinua.

También verifique (7.6.5) con relación a la reserva de la parte (b).

Solución:

a. Además de los valores calculados para el ejemplo 6.9, requerimos

$$A^{1}_{60:\overline{10}|} = 0.13678852$$

$$A_{60:\overline{10}|} = 0.58798425$$

$$\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 7.2789425$$

$${}_{10}V^{1}_{50:\overline{20}|} = A^{1}_{60:\overline{10}|} - P^{1}_{50:\overline{20}|}\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0.052752$$

$${}_{10}V_{50:\overline{20}|} = A_{60:\overline{10}|} - P_{50:\overline{20}|}\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0.355380$$

Luego, bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos para cada intervalo de año de edad, tenemos

$$\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = \alpha(2)\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} - \beta(2)\,(1 - {}_{10}E_{60}) = 7.1392299$$

La reserva, ${}_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20}|}$, puede calcularse usando

(7.6.1): $$A_{60:\overline{10}|} - P^{(2)}_{50:\overline{20}|}\cdot\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = 0.355822$$

ó

(7.6.3): $${}_{10}V_{50:\overline{20}|} + \beta(2)\,P^{(2)}_{50:\overline{20}|}\cdot {}_{10}V^{1}_{50:\overline{20}|} = 0.355822$$

b. Necesitamos valores calculados adicionales,

$$\frac{i}{\delta}A^{1}_{50:\overline{20}|} = 0.13423835 \qquad p^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} = 0.03286830$$

$$\frac{i}{\delta}A^{\frac{1}{60:\overline{10}|}} = 0.14085233 \qquad \overline{A}_{50:\overline{20}|} = 0.36471188$$

$$P(\overline{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\overline{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}} = 0.03229873 \qquad \overline{A}_{60:\overline{10}|} = 0.59204806$$

$${}_{10}V(\overline{A}_{50:\overline{20}|}) = \overline{A}_{60:\overline{10}|} - P\left(\overline{A}_{50:\overline{20}|}\right)\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0.3569475$$

$${}_{10}V^{(2)}(\overline{A}_{50:\overline{20}|}) = \overline{A}_{60:\overline{10}|} - P^{(2)}\left(\overline{A}_{50:\overline{20}|}\right)\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = 0.3573937$$

$$\beta(2)P^{(2)}\left(\overline{A}_{50:\overline{20}|}\right){}_{10}V_{\frac{1}{50:\overline{20}|}} = 0.000446$$

Este último valor es la diferencia entre los dos inmediatamente anteriores, como se estableció en (7.6.5). □

7.7 Reservas sobre una base prorrateada o continua descontada

En la Sección 6.5 discutimos las primas prorrateadas, o continuas descontadas, ahora consideraremos las reservas correspondientes. Para todo entero k, tenemos mediante el método de prospectivo

$${}_{k}V^{\{m\}}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) = \overline{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_{h}P^{\{m\}}\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}^{\{m\}}_{x+k\,:\,\overline{h-k}|} \qquad k < h \tag{7.7.1}$$

Pero por (6.5.2),

$${}_{h}P^{\{m\}}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{d^{(m)}}{\delta}\,{}_{h}\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) \tag{7.7.2}$$

y por (5.9.7),

$$\ddot{a}^{\{m\}}_{x+k\,:\,\overline{h-k}|} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\overline{a}_{x+k\,:\,\overline{h-k}|}$$

Sustituyendo en (7.7.1)

$${}_{k}V^{\{m\}}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) = \overline{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_{h}\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|})\overline{a}_{x+k:\overline{h-k}|} = {}_{h}\overline{V}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) \tag{7.7.2}$$

Esto significa que las reservas totalmente continuas pueden utilizarse para todos los casos de prorrateo, independientemente del modo de pago de la prima.

En la Sección 6.5, se señaló que la prima prorrateada podría descomponerse como

$$P^{\{\}}(\bar{A}_x) = P(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x^{PR}) \tag{7.7.3}$$

en donde el índice PR se utiliza para denotar un seguro para la característica de reembolso de la prima. Se podría esperar que una descomposición similar sea válida para las reservas. Para verificarlo, puede utilizarse el método de proyección y (6.5.7) para escribir

$$\begin{aligned} {}_kV(\bar{A}_x^{PR}) &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{A}_{x+k} - A_{x+k}}{\delta} - P(\bar{A}_x^{PR})\ddot{a}_{x+k} \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d\,\ddot{a}_{x+k} - \delta\,\bar{a}_{x+k}}{\delta} - \left[P^{\{\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x)\right]\ddot{a}_{x+k} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x) = P^{\{\}}(\bar{A}_x)$$

la expresión puede reducirse a

$$\begin{aligned} {}_kV(\bar{A}_x^{PR}) &= -\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} + P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k} \\ &= \bar{A}_{x+k} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} - \left[\bar{A}_{x+k} - P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k}\right] \\ &= {}_k\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_kV(\bar{A}_x) \\ &= {}_kV^{\{\}}(\bar{A}_x) - {}_kV(\bar{A}_x). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$${}_kV^{\{\}}(\bar{A}_x) = {}_kV(\bar{A}_x) + {}_kV(\bar{A}_x^{PR}) \tag{7.7.4}$$

7.8 Fórmulas recurrentes para reservas totalmente discretas

En la Sección 7.4 consideramos un seguro general para (x) que proporcionaba una indemnización por fallecimiento de b_{j+1} al final del año de la póliza $j+1$, comprado mediante primas netas anuales, π_j , $j=0,1,...$, con π_j pagadero al principio del año de la póliza $j+1$. La reserva ${}_{h-1}V$ al final del año de la póliza $h-1$ está dada por (7.4.5),

$$ {}_{h-1}V = \sum_{j=0}^{\infty} b_{h+j} v^{j+1} {}_j p_{x+h-1} \cdot q_{x+h-1+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j-1} v^j {}_j p_{x+h-1} \qquad (7.8.1) $$

Podemos separar los primeros términos de las sumas para obtener

$$ {}_{h-1}V = b_h \; v \; q_{x+h-1} - \pi_{h-1} + v \; p_{x+h-1} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} b_{h+j} \; v^j \; {}_{j-1}p_{x+h} \cdot q_{x+h+j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{h+j-1} \; v^{j-1} \; {}_{j-1}p_{x+h} \right\} $$

La expresión entre paréntesis es igual a ${}_hV$, por tanto

$$ {}_{h-1}V = b_h \; v \; q_{x+h-1} - \pi_{h-1} + v \; p_{x+h-1} \; {}_hV $$

ó

$$ {}_{h-1}V + \pi_{h-1} = b_h \cdot v \cdot q_{x+h-1} + {}_hV \cdot v \cdot p_{x+h-1} \qquad (7.8.2) $$

En palabras, los recursos requeridos al principio del año de la póliza h son iguales al valor presente actuarial de los requerimientos del final del año.

La fórmula (7.8.2) puede reacomodarse para separar la prima π_{h-1} en los componentes de la póliza del año h, es decir,

$$ \pi_{h-1} = b_h \cdot v \cdot q_{x+h-1} + \left({}_hV \cdot v \cdot p_{x+h-1} - {}_{h-1}V \right) \qquad (7.8.3) $$

El primer componente del lado derecho de (7.8.3) es la prima neta del primer año del plazo del seguro para el monto asegurado b_h. El segundo componente, ${}_hV \cdot v \cdot p_{x+h-1} - {}_{h-1}V$, representa el monto que, si se agrega a ${}_{h-1}V$ al principio del año, se acumularía con el interés y la sobrevivencia a ${}_hV$ al final del año.

Con el fin de comparaciones subsecuentes con fórmulas para un seguro totalmente continuo, multipliquemos ambos lados de la expresión (7.8.3) por $1+i$ y reacomodando la fórmula

$$\pi_{h-1} + \left({}_{h-1}V + \pi_{h-1}\right)i + {}_{h}V\, q_{x+h-1} = b_h \cdot q_{x+h-1} + \Delta\left({}_{h-1}V\right) \qquad (7.8.4)$$

Para indicar que ${}_{h-1}V$ y ${}_{h}V$ son reservas de fin de año, nos referiremos a ellas como las ***reservas finales*** para la póliza de los años $h-1$ y h, respectivamente. La suma ${}_{h-1}V + \pi_{h-1}$ se denomina la ***reserva inicial*** para pólizas de un año h. El lado izquierdo de (7.8.4) indica los recursos para la póliza en el años h, integrado por el premio, los intereses del año de la reserva inicial y el valor esperado de muertes que implicarán la liberación de las reservas. El lado derecho esta formado por los pagos esperados por la muerte al final del año y el incremento ${}_{h}V - {}_{h-1}V$ en la reserva.

Un análisis diferente resulta si se considera a la reserva ${}_{h}V$ disponible para realizar los pagos (b_h) de beneficios por muerte y por otro lado se necesita ser cubierta con la ***cantidad neta en riesgo*** $(b_h - {}_{h}V)$. Para este análisis tenemos, que al sustituir $1-q_{x+h-1}$ por p_{x+h-1} en (7.8.2) y multiplicando después por $1+i$, se tiene

$${}_{h}V = \left({}_{h-1}V + \pi_{h-1}\right)(1+i) - (b_h - {}_{h}V)q_{x+h-1} \qquad (7.8.5)$$

Aplicando en (7.8.3), tenemos ahora

$$\pi_{h-1} = (b_h - {}_{h}V)\, v\, q_{x+h-1} + v\, {}_{h}V - {}_{h-1}V \qquad (7.8.6)$$

El primer componente de la derecha es la prima para la cantidad en riesgo. El segundo componente, $v \cdot {}_{h}V - {}_{h-1}V$ es el monto que, sí adicionado a ${}_{h-1}V$ al principio del año, podrá acumular bajo intereses, la cantidad ${}_{h}V$ al final del año. Aquí ${}_{h}V$ es usada, en caso de muerte. Consecuentemente, la reserva es acumulada, como un fondo de ahorro. Esto es mostrado nuevamente por la fórmula correspondiente a (7.8.4).

$$\pi_{h-1} + ({}_{h-1}V + \pi_{h-1}) \cdot i = (b_h - {}_{h}V)q_{x+h-1} + \Delta({}_{h-1}V) \qquad (7.8.7)$$

lo que esta a la izquierda queda a interpretación del lector.

El primer análisis, (7.8.3), no hace uso de la reserva para compensar el beneficio de muerte y, consecuentemente, la reserva se acumula bajo intereses y sobrevivientes. Ambos componentes del lado derecho de (7.8.3) involucran riesgos de mortalidad, mientras en (7.8.6) sólo el primer componente lo hace. Veremos en la Sección 7.10 que (7.8.6) es descrito para un significado flexible para cualquier varianza de pérdidas.

Ejemplo 7.9:

Considere para una persona de edad (x), una anualidad diferida, la cual corresponde a una renta de una unidad monetaria que inicia a edad $(x + n)$, para lo cual se pagarán primas anuales durante el periodo de diferimiento. Por otra parte el beneficio en caso de muerte antes de la edad $(x + n)$ es la (prima neta de la) reserva. Suponga que el beneficio por muerte se paga al final del año de fallecimiento. Determine la prima neta anual y la reserva al final del año k para $k \le n$.

Solución:
De (7.8.6) y considerando que $b_h = {}_hV$ para $h = 1, 2, \ldots, n$,

$$\pi = v \cdot {}_hV - {}_{h-1}V$$

Multiplicando por v^{h-1}, tenemos

$$\pi \cdot v^{h-1} = v^h {}_hV - v^{h-1} {}_{h-1}V = \Delta\left(v^{h-1} {}_{h-1}V\right) \qquad (7.8.8)$$

Sumando sobre $h = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$v^n {}_nV - v^0 {}_0V = \pi \sum_{h=1}^{n} v^{h-1} = \pi \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

y como ${}_0V = 0$, mientras que ${}_nV = \ddot{a}_{x+n}$, se sigue que

$$\pi = \frac{v^n \cdot \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

Por lo tanto, esta anualidad es idéntica a la descrita en el Ejemplo 6.13. La reserva al final de k años puede ser encontrada sumando (7.8.8) sobre $h = 1, 2, \ldots, k$, para obtener

$$v^k \cdot {}_kV = \pi \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|}$$

de lo cual

$$ {}_kV = \pi \cdot \ddot{s}_{\overline{k}|}$$

∇

Ejemplo 7.10:

Un seguro a edad (x) provee, en caso de muerte antes de n años, un pago de una unidad monetaria más la reserva correspondiente al final del año de fallecimiento. Obtenga las fórmulas para la prima anual nivelada y de la reserva al final del año k.

Solución:
En este caso $b_h = 1 + {}_hV$, y el monto neto en riesgo tiene un valor constante de una unidad monetaria. Denotando la prima anual nivelada con π y considerando la expresión (7.8.6), tenemos

$$v\ {}_hV - {}_{h-1}V = \pi - v\ q_{x+h-1}$$

Multiplicando por v^{h-1}, tenemos

$$\Delta\left(v^{h-1}\ {}_{h-1}V\right) = \pi\ v^{h-1} - v^h\ q_{x+h-1} \qquad (7.8.9)$$

Sumando sobre $h = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos

$$v^n \cdot {}_nV = \pi \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} - \sum_{h=1}^{n} v^h \cdot q_{x+h-1}$$

tal que, con ${}_nV = 1$,

$$\pi = \frac{v^n + \sum_{h=1}^{n} v^h \cdot q_{x+h-1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

Pero sumando (7.8.9) sobre $h = 1, 2, \ldots, k$, y resolviendo para ${}_kV$, hallamos

$${}_kV = \pi \cdot \ddot{s}_{\overline{k}|} - \sum_{h=1}^{k} (1+i)^{k-h} \cdot q_{x+h-1}$$

∇

7.9 Reservas de Duración Fraccionada

Consideremos un seguro general en edad (x), para un beneficio por fallecimiento de b_{j+1} al final del año $j+1$ de la póliza, con una prima neta anual de π_j, $j = 0, 1, \ldots$ donde π_j se paga al principio del año póliza. La reserva en el año $k+s$ esta dada por

$${}_{k+s}V = b_{k+1} v^{1-s}\ {}_{1-s}q_{x+k+s} + {}_{k+1}V\ v^{1-s}\ {}_{1-s}p_{x+k+s} \qquad (7.9.1)$$

donde k es un entero, y $0 < s < 1$.

Bajo el supuesto de distribución uniforme de muertes, en cada año

$$ {}_sp_{x+k} \cdot {}_{1-s}q_{x+k+s} = {}_{s|1-s}q_{x+k} = (1-s)q_{x+k} $$

Por tanto

$$ {}_{1-s}q_{x+k+s} = \frac{(1-s)q_{x+k}}{1-sq_{x+k}} \qquad (7.9.2) $$

$$ {}_{1-s}p_{x+k+s} = \frac{p_{x+k}}{1-s\cdot q_{x+k}} \qquad (7.9.3) $$

Entonces (7.9.1) puede ser escrita como

$$ {}_{k+s}V = \frac{v^{1-s}}{1-s\cdot q_{x+k}}\left[b_{k+1}(1-s)q_{x+k} + {}_{k+1}V\cdot p_{x+k}\right] $$

Sin embargo (7.8.2) muestra que:

$$ b_{k+1}\cdot q_{x+k} = ({}_kV+\pi_k)(1+i) - {}_{k+1}V\cdot p_{x+k} $$

también podemos expresar la reserva como

$$ {}_{k+s}V = \frac{v^{1-s}}{1-s\cdot q_{x+k}}\left[(1-s)({}_kV+\pi_k)(1+i) + s\,{}_{k+1}V\cdot p_{x+k}\right] \qquad (7.9.4) $$

En la práctica es usada una simple aproximación a la fórmula. Una forma para obtener (7.9.4) es suponer que i y q_{x+k} son pequeños, también que $1+i$, p_{x+k}, v^{1-s} y $1-s\cdot q_{x+k}$ pueden ser aproximadamente 1. El resultado es

$$ {}_{k+s}V \cong (1-s)({}_kV+\pi_k) + s\cdot{}_{k+1}V \qquad (7.9.5) $$

Ésta expresión es una interpolación lineal entre la reserva inicial ${}_kV+\pi_k$ y la reserva terminal ${}_{k+1}V$. Otra forma de ver esta aproximación es como la suma de la reserva terminal interpolada,

$$ (1-s)\,{}_kV + s\cdot{}_{k+1}V $$

y la prima neta no devengada, $(1-s)\pi_k$. En general,

(la prima neta no devengada, en cualquier momento del año)
= (es la prima neta para ese año) × (la diferencia entre el tiempo transcurrido desde el momento en que fue pagada la prima, y el momento de cálculo).

Por lo tanto, en una base de prima anual, ésta ha sido pagada al final del año así que al momento s, la ***prima neta no devengada*** es $(1-s)\pi_k$. Esta noción de prima neta no devengada, puede ser usada para plantear aproximaciones en donde la frecuencia de pago de primas, es a plazos menores a un año.

Consideremos un caso donde la prima es semianual (semestral) con reclamaciones pagadas al final del año póliza, para $0<s\le 1/2$, se tiene (denotando como $\pi_k^{(2)}$ la prima anual)

$$\begin{aligned} {}_{k+s}V^{(2)} &= v^{1-s}\,{}_{1-s}q_{x+k+s} \\ &\quad + {}_{k+1}V^{(2)}v^{1-s}\,{}_{1-s}p_{x+k+s} - \frac{\pi_k^{(2)}}{2}v^{1/2-s}\,{}_{1/2-s}p_{x+k+s} \end{aligned} \tag{7.9.6}$$

Esto muestra, (véase Ejercicio 7.44) que bajo el supuesto de distribución uniforme de muertes, en cada intervalo de año de edad, la expresión (7.9.6) llega a ser

$$\begin{aligned} {}_{k+s}V^{(2)} &= \frac{v^{1-s}}{1-s\,q_{x+k}}\left\{(1-s)\,{}_kV^{(2)}(1+i)+s\,{}_{k+1}V^{(2)}p_{x+k}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi_k^{(2)}}{2}\left[(1+i)(1-s)-s(1+i)^{1/2}\,{}_{1/2}p_{x+k}\right]\right\} \end{aligned} \tag{7.9.7}$$

Y esta se puede aproximar como

$${}_{k+s}V^{(2)} \equiv (1-s)\,{}_kV^{(2)} + s\,{}_{k+1}V^{(2)} + \left(\frac{1}{2}-s\right)\pi_k^{(2)} \tag{7.9.8}$$

Aquí en adición a la reserva terminal interpolada, hay una prima neta no devengada igual a una fracción del porcentaje de prima anual, siendo dicha fracción, la diferencia entre el tiempo transcurrido desde que la prima fue pagada (en este caso $1/2$) y el momento s.

Para $1/2 < s < 1$, la expresión de la reserva es de la misma forma que (7.9.1) y por pasos similares a los que conducen a (7.9.4) puede ser expresada como

$$
\begin{aligned}
{}_{k+s}V^{(2)} = \frac{v^{1-s}}{1-s\,q_{x+k}} \Big\{ & (1-s)\,{}_kV^{(2)}(1+i) + s\,{}_{k+1}V^{(2)}\,p_{x+k} \\
& + (1-s)(1+i)^{1/2}\,\frac{\pi_k^{(2)}}{2}\left[(1+i)^{1/2} + {}_{1/2}p_{x+k}\right] \Big\}
\end{aligned}
$$

esto puede ser aproximado como

$$
{}_{k+s}V^{(2)} \cong (1-s)\,{}_kV^{(2)} + s\cdot {}_{k+1}V^{(2)} + (1-s)\,\pi_k^{(2)} \tag{7.9.9}
$$

Esto nuevamente es la reserva terminal interpolada más la prima neta no devengada en el tiempo s.

7.10 Asignación de Pérdidas para el año Póliza

Hemos visto en (7.8.6) que para cada año póliza la prima neta anual para un seguro de vida puede ser dividida en la prima neta de un seguro anual para cubrir la cantidad neta en riesgo y un depósito a un fondo de ahorro, para la acumulación de la reserva. Es así que podríamos anticipar que la varianza asociada con un seguro dado, puede ser expresada en términos de la varianza del seguro anual considerado. Este es el caso. Este bi-producto, es un medio flexible para calcular la varianza asociada con el seguro dado.

Para el seguro totalmente discreto introducido en la Sección 7.4, la pérdida $L = {}_0L$ es, por (7.4.4)

$$
L = b_{K+1}\cdot v^{K+1} - \sum_{h=0}^{K} \pi_h v^h \tag{7.10.1}
$$

Donde K es la esperanza de vida truncada de (x). En la expresión, L es el valor presente de los resultados financieros de estos seguros, cuando las muertes ocurren en el año póliza $k+1$. Ahora veremos como asignar una parte de estos resultados, a cada uno de los primeros $k+1$ años. La base de esta asignación es el segundo análisis de la Sección 7.8 donde la reserva es considerada un fondo de ahorro y los riesgos de la mortalidad en un año dado, es considerada como la cantidad neta en riesgo de un seguro temporal a un año. Para estos propósitos, introduciremos la perdida valuada al tiempo h y

dependiendo implícitamente de K asignada al año póliza $h+1$, denomináda.

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & K \le h\text{-}1 \\ vb_{h+1} - ({}_hV + \pi_h) & K = h \\ v_{h+1}V - ({}_hV + \pi_h) & K \ge h+1 \end{cases} \qquad (7.10.2)$$

para $h=0, 1, 2, \ldots$ Observe que el primer caso es relativo a los asegurados muertos antes del año $h+1$, el segundo caso a los muertos en el año $h+1$, y el tercer caso, a los sobreviviente al final del año $h+1$.

De (7.8.2), con h reemplazado por $h+1$, podemos reformular $\wedge_h$, como

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & K \le h\text{-}1 \\ (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vp_{x+h} = (b_{h+1} - {}_{h+1}V)v - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h} & K = h \\ -(b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h} = 0 - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h} & K \ge h+1 \end{cases} \qquad (7.10.3)$$

donde $(b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h}$ es la prima para un seguro temporal a un año por la cantidad neta en riesgo en el año $h+1$, vimos que para valores distintos de cero, Λ_h expresa la pérdida asociada con un seguro temporal a un año, nombrándola, el valor presente al tiempo h de beneficios bajo el término de seguros inferiores a la prima natural.

Consecuentemente, por (7.10.3),

$$E[\Lambda_h] = v(b_{h+1} - {}_{h+1}V)\left[p_{x+h}\ {}_hp_x\ q_{x+h} + (-1)q_{x+h}\ {}_hp_x\ p_{x+h}\right] = 0 \qquad (7.10.4)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Var[\Lambda_h] &= E\left[\Lambda_h^2\right] = v^2\left(b_{h+1} - {}_{h+1}V\right)^2\left[p^2_{x+h}\ {}_hp_x\ q_{x+h} + (-1)^2\ q^2_{x+h}\ {}_hp_x\ p_{x+h}\right] \\ &= v^2\left(b_{h+1} - {}_{h+1}V\right)^2\ {}_hp_x\ p_{x+h}\ q_{x+h} \end{aligned} \qquad (7.10.5)$$

Lo siguiente, por un razonamiento general de que la pérdida total, puede ser obtenido como la suma sobre el valor presente de las pérdidas asignadas a las pólizas anuales individuales.

$$L = \sum_{h=0}^{\infty} v^h \Lambda_h \qquad (7.10.6)$$

Para propósitos ilustrativos, presentamos una derivación algebraica de (7.10.6) para notar que

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h \Lambda_h = \sum_{h=0}^{K-1} v^h \Lambda_h + v^K \Lambda_K + \sum_{h=K+1}^{\infty} v^h \Lambda_h$$

En el primer sumando $K \geq h+1$, y en el segundo sumando $K \leq h-1$, también por (7.10.2) tenemos

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h \Lambda_h = \sum_{h=0}^{K-1} \left(v^{h+1}\, {}_{h+1}V - v^h\, {}_hV - v^h \pi_h \right) + v^{K+1} b_{K+1} - v^K\, {}_KV - v^K \pi_K + 0$$

Cancelando términos de $v^j\, {}_jV$, $j = 1, 2, \ldots$, y haciendo ${}_0V = 0$, la expresión se reduce a

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h \Lambda_h = v^{K+1} b_{K+1} - \sum_{h=0}^{K} v^h \pi_h = L$$

Con la sumatoria empezando en $h = k$, este argumento puede ser utilizado para mostrar que

$$\sum_{h=k}^{\infty} v^h \Lambda_h = v^k\, {}_kL - v^k\, {}_kV \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Resolviendo para ${}_kL$ obtenemos

$${}_kL = \sum_{h=0}^{\infty} v^h \Lambda_{k+h} + {}_kV \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7.10.7}$$

Utilizando esta expresión para k y $k+j$, tenemos

$${}_kL = \sum_{h=0}^{j-1} v^h \Lambda_{k+h} + v^j\, {}_{k+j}L + \left({}_kV - v^j\, {}_{k+j}V \right) \qquad k = 0, 1, \ldots,\ j = 0, 1, \ldots \tag{7.10.8}$$

De (7.10.4) y (7.10.6), confirmamos que $E[L] = 0$. El siguiente resultado debido a Hattendorf, provee un medio para calcular la varianza de L. Su significado real es que la varianza de L puede ser asignada a año pólizas individuales.

Teorema 7.1:

a. $Cov\left[\Lambda_h, \Lambda_j\right] = 0 \quad h \neq j$

b. $Var[L] = \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h} Var[\Lambda_h]$

Demostración

De (7.10.4), $E[\Lambda_h] = 0$. Por lo tanto, $Cov\left[\Lambda_h, \Lambda_j\right] = E\left[\Lambda_h \Lambda_j\right]$. Veremos que la anterior especulación es 0. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j < h$. Entonces, siempre cuando $\Lambda_h \neq 0$, sabemos que $K \geq h \geq j+1$ de ello resulta que Λ_j tiene un valor constante $v^{j+1}{}_{j+1}V - \left({}_jV + \pi_j\right)$. De donde

$$E\left[\Lambda_h \Lambda_j\right] = \left[v^{j+1}{}_{j+1}V - \left({}_jV + \pi_j\right)\right] E[\Lambda_h]$$

Pero por (7.10.4) el lado derecho desaparece.

De (7.10.6) y parte de (a), resulta que, con toda covarianza igual a cero, la varianza de la suma de L, es la suma de las varianzas de $v^h \Lambda_h$, $h = 0,1,\ldots$, lo cual produce la parte (b).

∇

La Λ_h, $h = 0,1,\ldots$, son variables aleatoria dependientes pero no correlacionadas; lo cual permite a la varianza de L, ser asignada al año póliza individual.

El teorema 7.1 también nos permite calcular la varianza de ${}_kL$, $k = 1,2,\ldots$ [véase (7.4.4)]. Para estos propósitos, consideremos un seguro emitido a edad $x + k$, una prima inicial de $\pi_0' = {}_kV + \pi_k$, primas subsecuentes, $\pi_h' = \pi_{k+h}$, beneficios $b_h' = b_{k+h}$, reservas ${}_hV' = {}_{k+h}V$, para $h = 1,2,\ldots$, y pérdidas variables L' y Λ_h' para $h = 0,1,2,\ldots$ entonces, por (7.4.4)

$$\begin{aligned} {}_kL &= b_{k+J+1}\, v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h} v^h \\ &= b'_{J+1} \cdot v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi'_h \cdot v^h + {}_kV = L' + {}_kV \end{aligned}$$

Donde ${}_kL$ y L' difieren por una constante ${}_kV$,

$$Var\left[{}_kL\right]=Var\left[L'\right]=\sum_{h=0}^{\infty}v^{2h}\ Var\left[\Lambda_h^{\cdot}\right],$$

y de (7.10.5),

$$\begin{aligned}&=\sum_{h=0}^{\infty}v^{2h}\ v^2\left(b_{h+1}^{'}-{}_{h+1}V^{'}\right)^2\ {}_hp_{x+k}\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}\\&=\sum_{h=0}^{\infty}v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\left[v^2\left(b_{k+h+1}-{}_{k+h+1}V\right)^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}\right]\end{aligned}\qquad(7.10.9)$$

Por que el teorema de Hattendorf, la fórmula (7.10.9) hace inferir, el usar el concepto de la reserva como un fondo de ahorro y relacionar la varianza de las pérdidas para un seguro dado con la varianza de pérdidas en relación a futuros seguros anuales por la cantidad neta en riesgo, esta última varianza es ejemplificada por la expresión entre corchetes cuadrados para el año $k+h+1$.

Una relación entre $Var\left[{}_kL\right]$ y $Var\left[{}_{k+j}L\right]$, $j=0,1,\ldots$, puede ser establecida escribiendo (7.10.9) como

$$\begin{aligned}Var\left[{}_kL\right]=&\sum_{h=0}^{j-1}v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\left[v^2\left(b_{k+h+1}-{}_{k+h+1}V\right)^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}\right]\\&+\sum_{h=j}^{\infty}v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\left[v^2\left(b_{k+h+1}-{}_{k+h+1}V\right)^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}\right]\end{aligned}$$

Ahora en la segunda sumatoria, remplazamos h por $l+j$, lo cual transforma esto en

$$v^{2j}\ {}_jp_{x+k}\sum_{l=0}^{\infty}v^{2l}\ {}_lp_{x+k+j}\left[v^2\left(b_{k+j+l+1}-{}_{k+j+l+1}V\right)^2\ p_{x+k+j+l}\ q_{x+k+j+l}\right]$$

Comparando esto con (7.10.9) muestra que esta sumatoria es $Var\left[{}_{k+j}L\right]$ así tenemos que

$$\begin{aligned}Var\left[{}_kL\right]=&\sum_{h=0}^{j-1}v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\left[v^2\left(b_{k+h+1}-{}_{k+h+1}V\right)^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}\right]\\&+v^{2j}\ {}_jp_{x+k}Var\left[{}_{k+j}L\right]\end{aligned}\qquad(7.10.10)$$

Justamente como en la expresión para $Var[L]$ en el Teorema 7.1 fue derivada de $L=\sum_{h=0}^{\infty}v^h\Lambda_h$, las expresiones (7.10.9) y (7.10.10) para $Var\left[{}_kL\right]$ puede ser derivada directamente utilizando (7.10.7) y (7.10.8).

Los siguientes dos ejemplos ilustran la aplicación del Teorema 7.1 de Hattendorf.

Ejemplo 7.11:

Considere el asegurado del Ejemplo 7.6, quien ha sobrevivido hasta el segundo año póliza. Para este asegurado, evalúe

a. $Var[{}_2L]$, directamente

b. $Var[{}_2L]$, mediante el teorema de Hattendorf

c. $Var[{}_3L]$

d. $Var[{}_4L]$

Solución:

a. Para un cálculo directo, necesitamos una tabla de valores de ${}_2L$.

Resultado j	${}_2L = \begin{cases} 1000v^{j+1} - 6.55692\ddot{a}_{\overline{j+1}\rceil}, & j = 0,1,2 \\ 0 - 6.55692\,\ddot{a}_{\overline{3}\rceil}, & j = 3,4,\ldots \end{cases}$	**Resultado de la Probabilidad Condicional** ${}_jp_{52}\,q_{52+j} = d_{52+j}/l_{52}, \quad j = 0,1,2$ ${}_3p_{52} = l_{55}/l_{52}, \quad j = 3,4,\ldots$
0	936.84	0.0069724
1	877.25	0.0075227
2	821.04	0.0081170
≥3	-18.58	0.9773879

Entonces $E[{}_2L] = 1.64$, en concordancia con el valor mostrado en el Ejemplo 7.6 y

$$\begin{aligned} Var[{}_2L] &= E[{}_2L^2] - (E[{}_2L])^2 \\ &= 17,717.82 - (1.64)^2 \\ &= 17,715.1 \end{aligned}$$

b. Para aplicar el Teorema de Hattendorf, podemos usar la reserva del Ejemplo 7.6 para calcular la varianza de la pérdida asociada con el seguro a un año.

h	q_{52+h}	$v^2\left(1000-1000_{2+h+1}V_{\overline{50:5}\rceil}\right)^2 p_{52+h}q_{52+h}$
0	0.0069724	6 140.842
1	0.0075755	6 674.910
2	0.0082364	7 269.991

Entonces de (7.10.9),

$$Var\left[{}_2L\right] = 6140.842 + (1.06)^{-2}(6674.910)p_{52} + (1.06)^{-4}(7269.991)\,{}_2p_{52} = 17,715.1$$

lo que concuerda con el valor encontrado por cálculo directo en la parte (a).

Note que en el método directo fue necesario considerar la ganancia en el evento de supervivencia a edad 55; pero por el teorema de Hattendorf, necesitamos considerar sólo la pérdida asociada con el seguro en el término de un año por la cantidad neta en riesgo en los años pólizas remanentes. Después, la cantidad neta en riesgo es 0 y el correspondiente término en (7.10.9) desaparece.

También note que la desviación estándar, $\sqrt{17,751.1} = 133.1$, para una póliza es 80 veces la reserva, $E\left[{}_2L\right] = 1.64$.

Similarmente, utilizamos (7.10.9) para calcular

c. $Var\left[{}_3L\right] = 6674.910 + (1.06)^{-2}(7269.991)p_{53} = 13096.2$

d. $Var\left[{}_4L\right] = 7269.991$, o después de redondear 7270.0

Ejemplo 7.12

Considere un portafolio de 1,500 pólizas del tipo descrito en el Ejemplo 7.6 y discutido en el Ejemplo 7.11. Suponga que todas las pólizas tienen prima anual y de pago inmediato. Adicionalmente suponga que 750 pólizas tiene una duración de 2 años, 500 de duración 3 años y 250 de duración 4 años, y que las pólizas en cada grupo son divididas entre aquéllas de monto 1,000 y 3,000 respectivamente.

a. Calcule la reserva agregada.

b. Calcule la varianza de las pérdidas prospectivas sobre los periodos remanentes de coberturas de las pólizas, suponiendo que tales pérdidas son independientes. También, calcule el monto tal que, en base a una distribución normal, daría al asegurador una probabilidad de 0.95 de sufragar las obligaciones futuras para este conjunto de negocios.
c. Con base a una distribución normal, calcule la varianza, dando al asegurador un 95% de confianza de sufragar para el primer año de obligaciones un conjunto de seguros temporales a un año.
d. Rehaga los incisos (a) y (c) considerando una política de que se incrementan 100 veces.

Solución:

a) Sea Z la suma de las perdidas prospectivas en las 1,500 pólizas.
Considerando el resultado del Ejemplo 7.6, tendremos la reserva agregada

$$\begin{aligned} E[Z] &= [375(1)+375(3)](1.64)+[250(1)+250(3)](1.73) \\ &\quad +[125(1)+125(3)](1.21) \\ &= 4,795 \end{aligned}$$

b) Del Ejemplo 7.11, tenemos

$$\begin{aligned} Var[Z] &= [375(1)+375(9)](17,715.1) \\ &\quad +[250(1)+250(9)](13,096.2) \\ &\quad +[125(1)+125(9)](7,270.0) \\ &= (1.0825962)10^8 \end{aligned}$$

y $\sigma_Z = 10,404.8$

Entonces si

$$0.05 = \Pr[Z > c] = \Pr\left[\frac{Z-4,795.0}{10,404.8} > \frac{c-4,795.0}{10,404.8}\right]$$

Es implícita la distribución normal

$$\frac{c-4,795.0}{10,404.8} = 1.645$$

ò

$$c = 21,911$$

lo cual es 4.6 veces de la reserva agregada, $E[Z]$.

c) Aquí tenemos el informe de los siguientes riesgos anuales. Para cada póliza, consideremos la variable igual a la perdida asociada a seguros temporales a un año por la cantidad neta en riesgo. Dejando que la suma de los valores Z_1 sea 0, de aquí que $E[Z_1]=0$.

En la parte (b) de la tabla del Ejemplo 7.11 podemos obtener la varianza de las perdidas en consideración al seguro temporal a un año y de aquí

$$\begin{aligned} Var[Z_1] &= [375(1)+375(9)](6,140.8)+[250(1)+250(9)](6,674.9) \\ &\quad +[125(1)+125(9)](7,270.0) \\ &= (4.880275)10^7 \end{aligned}$$

y

$$\sigma_{Z_1} = 6,985.9$$

Si c_1, es el suplemento requerido de la reserva agregada, entonces

$$0.05 = \Pr[Z_1 > c_1] = \Pr\left[\frac{Z_1-0}{6,985.9} > \frac{c_1-0}{6,985.9}\right]$$

y determinamos

$$c_1 = (1.645)(6,985.9) = 11,492$$

lo cual es 2.4 veces la reserva agregada.

d) En este caso, $E[Z]=479,500$ y $Var[Z]=(1.0825962)10^{10}$. La cantidad c requiere de proporcionar la probabilidad de 0.95 aquella obligación conveniente que queremos es

$$479,500+1.645\sqrt{1.0825962}\ 10^5 = 650,659$$

lo cual es 1.36 veces la reserva agregada, E[Z].

También $Var[Z_1]$ es ahora $(4.880275)10^9$. La cantidad c_1 es el suplemento de la reserva agregada que requiere tener una probabilidad de 0.95 para conveniencia, para las obligaciones de la póliza de este seguro, es $1.645\sqrt{4.88027510}\cdot 10^{4.5} = 114,918$ o 24% para la reserva agregada del siguiente año.

□

7.11 Ecuaciones Diferenciables para Reservas Totalmente Continuas

Los resultados de aquí son paralelos a los de la Sección 7.8 para el caso discreto, y serán desarrollados más brevemente. El seguro general para (x), esta ahora en una base continua con monto asegurado b_t , el cual se paga si ocurre la muerte al tiempo t, y con una prima anual π_t al momento t, $t>0$. La especificación anterior implica que las primas $\pi_t dt$ son pagaderas en un intervalo de tiempo $(t, t+dt)$. La reserva ${}_t\overline{V}$ al momento t esta dada por la fórmula

$$ {}_t\overline{V} = \int_0^\infty b_{t+s} \cdot v^s \cdot {}_sp_{x+t} \cdot \mu_{x+t+s} ds - \int_0^\infty \pi_{t+s} \cdot v^s \cdot {}_sp_{x+t} ds \qquad (7.11.1) $$

Para simplificar el cálculo, definimos $u = t+s$ y simplifiquemos las dos integrales

$$ {}_t\overline{V} = \int_t^\infty \left(b_u \cdot \mu_{x+u} - \pi_u\right) e^{\delta(t-u)} \, {}_{u-t}p_{x+t} du \qquad (7.11.2) $$

entonces

$$ \frac{d}{dt} {}_{u-t}p_{x+t} = \frac{d}{dt} \exp\left[-\int_{x+t}^{x+u} \mu_y dy\right] = \mu_{x+t} \, {}_{u-t}p_{x+t} $$

la derivada de ${}_t\overline{V}$ es una combinación de tres términos

$$ \frac{d \, {}_t\overline{V}}{dt} = -\left(b_t \cdot \mu_{x+t} - \pi_t\right) + \delta \cdot I + \mu_{x+t} \cdot I $$

donde I denota la integral en (7.11.2). $I = {}_t\overline{V}$, de donde

$$ \frac{d \, {}_t\overline{V}}{dt} = \pi_t + \left(\delta + \mu_{x+t}\right) {}_t\overline{V} - b_t \cdot \mu_{x+t} \qquad (7.11.3) $$

Aquí la razón de cambio de la reserva está dada por tres componentes: La razón de prima, la razón de momentos de la reserva por interés y

sobrevivientes, y la razón de beneficios $b_t \cdot \mu_{x+t}$ en curso, La fórmula correspondiente a (7.8.4) es

$$\pi_t + {}_t\overline{V} \cdot \delta + {}_t\overline{V} \cdot \mu_{x+t} = b_t \cdot \mu_{x+t} + \frac{d\,{}_t\overline{V}}{dt} \tag{7.11.4}$$

Esto balancea la razón de ingresos con tasa de beneficios en curso y la tasa de incremento a la reserva. Si la reserva es tratada como un fondo de ahorro disponible para el conjunto de beneficios, tenemos

$$\pi_t + {}_t\overline{V} \cdot \delta = \left(b_t - {}_t\overline{V}\right)\mu_{x+t} + \frac{d\,{}_t\overline{V}}{dt} \tag{7.11.5}$$

Aquí la razón de ingreso esta dada por la prima y el interés de la reserva, un balance con los beneficios en curso $\left(b_t - {}_t\overline{V}\right)\mu_{x+t}$, basada en la cantidad neta en riesgo y la tasa de incremento de la reserva.

7.12 Fórmulas de Reservas en Términos de Valores Conmutados

En la Sección previa, hemos expresado fórmulas prospectivas para la reserva en términos del valor presente actuarial de beneficios futuros a las futuras primas netas. La fórmula retrospectiva, ha sido derivada en términos del valor actuarial acumulado de primas pasadas y el costo acumulado de beneficios pasados. En los Capítulos 4 y 5, son expresiones dadas en términos de valores conmutados.

Consecuentemente, es fácil escribir fórmulas de reserva. en términos de valores conmutados, especialmente si, por simplicidad, la prima es indicada por símbolos más apropiados a su expresión en valores conmutados. Esto esta dado en la tabla 7.3 para reservas con una base semicontinua. Fórmulas análogas pueden ser escritas para el caso continuo y el caso discreto.

Tabla 7.3 Reservas de Primas Netas Semicontinuas; Edad de Emisión x; Duración k; Monto Unitario

Plan	Notación de Reserva	Numerador (Denominador es siempre D_{x+k}) Fórmula Prospectiva		Fórmula Retrospectiva
Seguro Vida Entera	${}_kV(\bar{A}_x)$	$\bar{M}_{x+k} - P(\bar{A}_x)N_{x+k}$		$P(\bar{A}_x)(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$
Seguro Temporal a n años	${}_kV(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})$	$(\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n}) - P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})(N_{x+k} - N_{x+n})$		$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$
Seguro Dotal a n años	${}_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$(\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}) - P(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_{x+k} - N_{x+n})$		$P(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$
Seguro Vida Entera pagos limitados h	${}^h_kV(\bar{A}_x)$	$\bar{M}_{x+k} - {}_hP(\bar{A}_x)(N_{x+k} - N_{x+h})$,	$k < h$	${}_hP(\bar{A}_x)(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$ $k < h$
		$\bar{M}_{x+k}$	$k \geq h$	Utilice la fórmula prospectiva para $k \geq h$
Seguro Dotal a n años pagos limitados h	${}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$(\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}) - {}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_{x+k} - N_{x+n})$	$k < h$	${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$ $k < h$
		$\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}$	$h \leq k < n$	Utilice la fórmula prospectiva para $h \leq k < n$
Seguro Dotal a n años	${}_kV^1_{x:\overline{n}\rceil}$	$D_{x+n} - P^1_{x:\overline{n}\rceil}(N_{x+k} - N_{x+n})$		$P^1_{x:\overline{n}\rceil}(N_x - N_{x+k})$

Ejemplo 7.13:

a. Un seguro temporal decreciente es emitido para una persona de edad 45 años, para el cual el beneficio de 100,000. Comprometiéndose el asegurador en pagar en forma inmediata a la muerte dicha cantidad en el primer año, después decrecerá en 5,000 por año hasta su expiración al final de 20 años. Con base a la tabla de mortalidad ilustrativa e interés 6%, determine la prima neta anual nivelada que se pagará en forma anual durante 20 años, y la reserva al final del primero, segundo y tercer año.

b. Repita el ejercicio (a), con pago de primas a 15 años.

Solución:

a. La prima neta nivelada esta dada por

$$\frac{100{,}000\bar{M}_{45} - 5{,}000(\bar{R}_{46} - \bar{R}_{66})}{N_{45} - N_{65}} = 5{,}000\frac{i}{\delta}\frac{20M_{45} - (R_{46} - R_{66})}{N_{45} - N_{65}}$$
$$= 391.577$$

Mediante la fórmula de Fackler de acumulación de reservas, (vea Ejercicio 7.19), la reserva al final del primer año es

$$391.577\frac{D_{45}}{D_{46}} - 100,000\frac{i}{\delta}\frac{C_{45}}{D_{46}} = 3.551$$

al final del segundo año es

$$(3.551 + 391.577)\frac{D_{46}}{D_{47}} - 95,000\frac{i}{\delta}\frac{C_{46}}{D_{47}} = -3.199$$

al final del tercer año es

$$(-3.199 + 391.577)\frac{D_{47}}{D_{48}} - 90,000\frac{i}{\delta}\frac{C_{47}}{D_{48}} = -20.473$$

La reserva se hace negativa hasta el final del término del seguro.

b. La prima neta es

$$5,000\frac{i}{\delta}\frac{20M_{45} - (R_{46} - R_{66})}{N_{45} - N_{60}} = 455.221$$

y la reserva encontrada como en (a), es ahora 71.289, 136.664 y 196.255, al final del primero, segundo y tercer año respectivamente. La reserva ahora permanece positiva hasta el término del contrato. Δ

La reserva negativa de prima neta ocurre cuando el valor presente actuarial de beneficios futuros, es menor que el de las futuras primas netas. Tal situación podría inducir al asegurado a terminar el seguro y dejar al asegurador cargando el déficit. Como hemos visto, en el Ejemplo 7.13, la reserva negativa, puede ocurrir para un seguro decreciente a término con primas pagables para un plazo limitado. Acortando el periodo de pago de primas, la reserva puede ser incrementada a niveles no negativos. Y si se considera en el método retrospectivo, se puede ver que la reserva negativa ocurre cuando el valor actuarial acumulado de primas pasadas, es menor que el costo acumulado de beneficios pasados. Acortando el plazo de pago de primas, aumenta la prima neta, puede mantenerse la prima acumulada por encima del costo acumulado de beneficios.

7.13 Notas y Referencias

El concepto de pérdida y el principio de equivalencia usando el Capítulo 6 para definir la prima neta, ha sido seguido en este capítulo, por el concepto de pérdida prospectiva y la definición de reserva con el valor esperado de pérdida prospectiva. Consecuentemente, la teoría y fórmulas en las secciones anteriores de este capítulo, son exclusivamente relacionadas a los patrones establecidos para primas en la correspondiente sección del Capítulo 6. Una variedad de fórmulas de reserva, en particular, la fórmula retrospectiva, que involucra el concepto de valor acumulado de costo de beneficios pasados, ramifica la teoría. También las relaciones desarrolladas para reservas basadas en primas ciertas fraccionadas y primas prorrateadas, una referencia posterior a la existencia del documento de Scher (1974). Las fórmulas recursivas para reservas completamente discretas y ecuaciones diferenciables totalmente continuas de reservas, suministran la penetración básica del término del Seguro y el proceso de anualidades. En particular, una de las fórmulas recursivas es aplicar el desarrollo del teorema de Hattendorf (1868) [por referencia vea a Steffensen (1929), Hickman (1964), Gerber (1976)]. Esta fórmula asigna la varianza de la pérdida de la póliza separándola en forma anual. Otra aplicación es hacia la formulación del intervalo de duración de reservas fraccionadas, el cual se discutió para el caso discreto.

7.14 Ejercicios

Sección 7.1

7.1. Determine la reserva en $t = 2,3,4$ y 5 para el seguro del ejemplo 6.1

7.2. Determine la reserva exponencial en $t = 2, 3, 4$ y 5 para el seguro del ejemplo 6.1

7.3. Determine la reserva exponencial en $t = 1, 2, 3, 4$ y 5 para el seguro del ejercicio 6.2

7.4. Considere el seguro del ejemplo 7.1 y el asegurador del ejercicio 6.3 con función de utilidad $u(x)=x-0.01x^2$, $0<x<50$. Determine la reserva ${}_kV$, para $k = 1, 2, 3$ y 4, tal que el asegurador, con ganancia 10 en cada periodo, podrá ser indiferente entre el riesgo continuo mientras reciba primas de 0.30360 (del ejercicio 6.3) y pague el monto ${}_kV$ para un reasegurador que asuma el riesgo.

Sección 7.2

7.5. Para un seguro dotal a n años expedido para una base totalmente continua para una persona de edad (x), defina ${}_tL$, la pérdida prospectiva después del año t. Confirme que

$$Var\left[{}_tL|T>t\right]=\frac{{}^{2}\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\left(\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)^2}{\left(\delta\overline{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2}$$

7.6. La pérdida prospectiva, después del año t, con prima continúa de una renta de una unidad monetaria anual, temporal para una persona de edad (x), esta dada por

$${}_tL=\begin{cases}\overline{a}_{\overline{T}|} & 0<T\le n\\ \overline{a}_{\overline{n}|} & T\ge n\end{cases}$$

Calcule $E\left[{}_tL|T>t\right]$ y $Var\left[{}_tL|T>t\right]$

7.7. Escriba las fórmulas prospectivas para

a.- ${}_{10}^{20}\overline{V}\left(\overline{A}_{35:\overline{30}|}\right)$

b. La reserva al final del año 5 para un seguro temporal a 10 años para una persona de edad (45) con base en una prima única.

Sección 7.3

7.8. Escriba cuatro fórmulas para ${}^{20}_{10}\overline{V}\left(\overline{A}_{40}\right)$

7.9. Escriba fórmulas para ${}_{10}\overline{V}\left(\overline{A}_{40:\overline{20|}}\right)$.

7.10. De la fórmula retrospectiva de ${}^{30}_{20}\overline{V}\left({}_{20|}\overline{a}_{35}\right)$

7.11. Demuestre que para $0 < t \le m$,

a. $\overline{P}\left(\overline{A}_{x:\overline{m+n|}}\right) = \overline{P}\left(\overline{A}^{1}_{x:\overline{m|}}\right) + \overline{P}_{x:\overline{m|}}\,{}_{m}\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{m+n|}}\right)$

b. ${}_{t}\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{m+n|}}\right) = {}_{t}\overline{V}\left(\overline{A}^{1}_{x:\overline{m|}}\right) + {}_{t}\overline{V}^{\,1}_{x:\overline{m|}}\;{}_{m}\overline{V}\left(\overline{A}_{x:\overline{m+n|}}\right)$ y de una interpretación oral.

7.12. Conforme a la Sección 7.3 nos lleva a una ecuación

$${}^{20}_{10}\overline{V}\left(\overline{A}_{30}\right) = \overline{A}^{1}_{40:\overline{5|}} + {}_{5}E_{40}\;{}^{70}_{15}\overline{V}\left(\overline{A}_{30}\right) - {}_{20}\overline{P}\left(\overline{A}_{30}\right)\overline{a}_{\overline{20|}}$$

de una interpretación oral.

Sección 7.4

7.13. Escriba cuatro fórmulas para ${}^{20}_{10}V_{40}$

7.14. Escriba 7 fórmulas para ${}_{10}V_{40:\overline{20|}}$

7.15. Demuestre que para $0 < t \le m$,

$${}_{t}V_{x:\overline{m+n|}} = {}_{t}V^{\,1}_{x:\overline{m|}} + {}_{t}V^{\,1}_{x:\overline{m|}}\;{}_{m}V_{x:\overline{m+n|}}$$

7.16. Si $k < n/2$, ${}_{k}V_{x:\overline{n|}} = 1/6$ y $\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k|}} = 2\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}$, calcule ${}_{k}V_{x+k:\overline{n-k|}}$

Sección 7.5

7.17 Calcule los valores para cada reserva, de acuerdo con la tabla que se muestra, (vea el Ejercicio 6.7), considerando para tal efecto la Tabla Ilustrativa de Vida con interés al 6%.

Totalmente Continua	Semicontinua	Totalmente Discreta
${}_{10}\overline{V}\left(\overline{A}_{35:\overline{30|}}\right)$	${}_{10}V\left(\overline{A}_{35:\overline{30|}}\right)$	${}_{10}V_{35:\overline{30|}}$
${}_{10}\overline{V}\left(\overline{A}_{35}\right)$	${}_{10}V\left(\overline{A}_{35}\right)$	${}_{10}V_{35}$
${}_{10}\overline{V}\left(\overline{A}^{1}_{35:\overline{30|}}\right)$	${}_{10}V\left(\overline{A}^{1}_{35:\overline{30|}}\right)$	${}_{10}V^{\,1}_{35:\overline{30|}}$

7.18. Bajo la suposición de la distribución uniforme de fallecimientos en cada intervalo de año de edad, ¿Cuáles de las siguientes expresiones es correcta?

a. ${}_kV\left(\overline{\bar{A}}_{x:\overline{n}|}\right)=\frac{i}{\delta}\,{}_kV_{x:\overline{n}|}$

b. ${}_kV\left(\bar{A}_x\right)=\frac{i}{\delta}\,{}_kV_x$

c. ${}_kV\left(\overline{\bar{A}}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)=\frac{i}{\delta}\,{}_kV^{1}_{x:\overline{n}|}$

Sección 7.6

7.19. Demuestre que bajo el supuesto de distribución uniforme de muerte cada intervalo de año de edad,

$$\frac{{}_5V^{(4)}_{30:\overline{20}|}-{}_5V_{30:\overline{20}|}}{{}^{20}{}_5V^{(4)}_{30}-{}^{20}{}_5V_{30}}=\frac{A_{30:\overline{20}|}}{A_{30}}$$

(El supuesto es suficiente pero no necesario.)

7. 20. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es correcta para la expresión ${}_{15}V^{(m)}_{40}$?

a. $\left[P^{(m)}_{55}-P^{(m)}_{40}\right]\ddot{a}^{(m)}_{55}$

b. $\left[1-\frac{P^{(m)}_{40}}{P^{(m)}_{55}}\right]A_{55}$

c. $P^{(m)}_{40}\,\bar{s}^{(m)}_{40:15|}-{}_{15}k_{40}$

d. $1-\frac{\ddot{a}^{(m)}_{55}}{\ddot{a}^{(m)}_{40}}$

Sección 7.7

7.21. ¿Cual de las siguientes fórmulas es correcta para ${}_{15}V^{\{4\}}\left(\overline{\bar{A}}_{40}\right)$?

a. ${}_{15}\overline{V}\left(\overline{\bar{A}}_{40}\right)$

b. $\left[P^{\{4\}}\left(\overline{\bar{A}}_{55}\right)-P^{\{4\}}\left(\overline{\bar{A}}_{40}\right)\right]\ddot{a}^{\{4\}}_{55}$

c. $\left[\overline{P}\left(\overline{\bar{A}}_{55}\right)-\overline{P}\left(\overline{\bar{A}}_{40}\right)\right]\bar{a}_{55}$

d. $\left[1-\frac{\overline{P}\left(\overline{\bar{A}}_{40}\right)}{\overline{P}\left(\overline{\bar{A}}_{55}\right)}\right]\overline{\bar{A}}_{55}$

e. $1-\frac{\bar{a}_{55}}{\bar{a}_{40}}$

f. $\overline{P}\left(\overline{\bar{A}}_{40}\right)\bar{s}_{40:\overline{15}|}-{}_{15}\bar{k}_{40}$

7.22. Demuestre y de una interpretación verbal de

a. $P^{\{m\}}\left(\overline{A}_{x\overline{n}|}\right) = {}_nP^{\{m\}}\left(\overline{A}_x\right) + \left(1-\overline{A}_{x+n}\right)P^{\{m\}}{}_{x\overline{n}|}^{\ 1}$

b. ${}_kV^{\{m\}}\left(\overline{A}_{x\overline{n}|}\right) = {}_nV^{\{m\}}\left(\overline{A}_x\right) + \left(1-\overline{A}_{x+n}\right){}_kV^{\{m\}}{}_{x\overline{n}|}^{\ 1}$

Sección 7.8

7.23. Demuestre que de la expresión (7.8.2), al ser reemplazado h por $h+1$, se obtiene

$$ {}_{h+1}V = ({}_hV + \pi_h)\frac{1+i}{p_{x+h}} - b_{h+1}\frac{q_{x+h}}{p_{x+h}} $$

de una explicación a la misma. (A dicha expresión es llamada la reserva bajo el proceso de ***Fackler*** o ***fórmula acumulada***, seguida por David Parks Fackler de la *American Actuary*.)

7.24. Pruebe que para un seguro de vida entera expedido a edad (x), con suma asegurada de una unidad monetaria que se paga en caso de fallecimiento al final de año póliza, se puede escribir como:,

a. ${}_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1}\frac{P_x - vq_{x+h}}{{}_{k-h}E_{x+h}}$

b. ${}_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1}\left[P_x - vq_{x+h}\left(1-{}_{h+1}V_x\right)\right](1+i)^{k-h}$

De su interpretación oral de las fórmulas.

7.25. Pruebe que ${}_kV = \pi\cdot\ddot{s}_{\overline{k}|}$, si $b_{h+1} = {}_{h+1}V$, ${}_0V = 0$ y $\pi_h = \pi$, con $h = 0,1,...,k-1$, [Sugerencia: utilice (7.8.6).]

7.26. Demuestre que si π es la prima neta anual nivelada durante n años, al final del seguro con $b_h = \ddot{a}_{\overline{n-h}|}$, $h = 1,2,...,n$, ${}_0V = {}_nV = 0$ entonces

a. $\pi = \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$

b. ${}_kV = \ddot{a}_{\overline{n-k}|} - \ddot{a}_{x+k\overline{n-k}|} - \pi\ddot{a}_{x+k\overline{n-k}|}$

[Sugerencia: Esto podemos demostrarlo directamente, o usando (7.8.3)]

7.27. Con lo analizado en la expresión (7.9.1), podemos establecer la ecuación ${}_sp_{x+k}\ {}_{k+s}V + v^{1-s}\ {}_sq_{x+k}\ b_{k+1} = (1+i)^s\left({}_tV + \pi_k\right)$, $0<s<1$, bajo un razonamiento general.

7.28. Interprete las fórmulas,

a. a. ${}_{k+(h/m)+r}V^{(m)} \cong \left(1-\frac{h}{m}-r\right){}_kV^{(m)} + \left(\frac{h}{m}+r\right){}_{k+1}V^{(m)} + \left(\frac{1}{m}-r\right)P^{(m)}$

b. ${}_{k+(h/m)+r}V^{(m)} \cong \left(1-\frac{h}{m}-r\right){}_kV^{(m)} + \left(\frac{h}{m}+r\right){}_{k+1}V^{(m)} + \left(\frac{1}{m}-r\right)P^{(m)}$

Donde $0<r<1/m$

7.29. Para cada una de las reservas siguientes, desarrollar similarmente las fórmulas (7.9.5), (7.9.8) y (7.9.9).

a. ${}_{20\frac{1}{20}}V\left(\overline{A}_{x\overline{20|}}\right)$ b. ${}_{20\frac{1}{20}}\overline{V}\left(\overline{A}_{x\overline{20|}}\right)$

c. ${}_{20\frac{1}{20}}V^{(2)}\left(\overline{A}_{x\overline{20|}}\right)$ d. ${}_{20\frac{2}{3}}V^{(2)}\left(\overline{A}_{x\overline{20|}}\right)$

e. ${}_{20\frac{1}{20}}V^{(2)}\left(\overline{A}_{x\overline{20|}}\right)$ f. ${}_{20\frac{2}{3}}V^{(2)}\left(\overline{A}_{x\overline{20|}}\right)$

7.30. Determine en forma aproximada, el valor de la siguiente reserva, considerando para tal efecto la Tabla de mortalidad Ilustrativa, con un interés del 6%.

$${}_{10\frac{1}{6}}V^{(4)}\left(\overline{A}_{25}\right)$$

7.31. Demuestre que en (7.9.4) se puede escribir como

$${}_{k+s}V = \frac{1-s}{1-sq_{x+k}}\left({}_tV+\pi_k\right)(1+i)^s + \left(1-\frac{1-s}{1-sq_{x+k}}\right){}_{k+1}V\cdot v^{1-s}$$

7.32. Demuestre que para un seguro de una anualidad vitalicia totalmente discreta de una unidad monetaria, emitido a edad (x), es

a. $Var[L]=\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{\ddot{a}_{x+h+1}}{\ddot{a}_x}\right)^2 v^{2(h+1)}\,{}_hp_x\,p_{x+h}\,q_{x+h}$

b. $Var[{}_kL]=\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{\ddot{a}_{x+k+h+1}}{\ddot{a}_x}\right)^2 v^{2(h+1)}\,{}_hp_{x+k}\cdot p_{x+k+h}\cdot q_{x+k+h}$

7.33. Para una anualidad vencida de por vida de una unidad monetaria que se paga anualmente mientras que (x) este con vida, considerando la pérdida

$$L=\ddot{a}_{\overline{K+1}|}-\ddot{a}_x \qquad K=0,1,2,\ldots$$

y la pérdida Λ_h, valuada al momento h, que es asignada a la anualidad en el año h, definida como

$$\Lambda_h=\begin{cases}0 & K\le h-1\\ -(\ddot{a}_{x+h}-1)=-v\,p_{x+h}\,\ddot{a}_{x+h+1} & K=h\\ v\ddot{a}_{x+h+1}-(\ddot{a}_{x+h}-1)=v\cdot q_{x+h}\cdot\ddot{a}_{x+h+1} & K\ge h+1\end{cases}$$

a. Interprete las fórmulas para Λ_h

b. Demuestre que

(i) $L=\sum_{h=0}^{\infty}v^h\Lambda_h$

(ii) $E[\Lambda_h]=0$

(iii) $Var[\Lambda_h]=v^2\left(\ddot{a}_{x+h+1}\right)^2\,{}_hp_x\cdot p_{x+h}\cdot q_{x+h}$

7.34. a. Para el seguro del Ejemplo 7.10, establezca que

$$Var[L]=\sum_{h=0}^{n-1}v^{2(h+1)}\,{}_hp_x\cdot p_{x+h}\cdot q_{x+h}$$

b. Si $\delta=0.05$, $n=20$ y $\mu_{x+t}=0.01$, $t\ge 0$, calcule $Var[L]$ para el seguro del inciso (a).

7.35. Se emite un seguro vida entera a una persona de edad 25 años, con pago de primas limitadas a 20 años, la suma asegurada considerada es de una unidad monetaria en base completamente discreta (es decir se paga al

final del año póliza donde ocurrió el fallecimientos del asegurado), tomando como base la Tabla de mortalidad con un interés del 6% . Calcule

a. ${}_{20}P_{25}$ b. ${}^{20}_{19}V_{25}$ c. ${}^{20}_{20}V_{25}$

d. $Var[{}_{20}L]$ e. $Var[{}_{18}L]$. Usando el teorema 7.1.

Sección 7. 11

7.36. Interpreta las ecuaciones diferenciables:

a. $\frac{d}{dt}{}_t\overline{V} = \pi_t + (\delta + \mu_{x+t})_t\overline{V} - b_t\,\mu_{x+t}$

b. $\frac{d}{dt}{}_t\overline{V} = \pi_t + \delta\ {}_t\overline{V} - (b_t - {}_t\overline{V})\mu_{x+t}$

7.37. Si $b_t = {}_t\overline{V}$, ${}_0\overline{V} = 0$ y $\pi_t = \pi$ con $t \geq 0$, demuestre que ${}_t\overline{V} = \pi\,\bar{s}_{\overline{t}|}$.

7.38. Evalué $\frac{d}{dt}\left\{\left[1 - {}_t\overline{V}(\overline{A}_x)\right]{}_tP_x\right\}$

Sección 7.12

7.39. Considere un seguro decreciente, el cual es expedido a una persona de 30 años de edad y con periodo de término al cumplir los 65 años de edad; dicho seguro paga la suma asegurada al momento del fallecimiento, se considera que el beneficio a otorgar esta definida conforme a periodos de edad, tal como se indican a continuación:

Para muerte entre las edades	30-50	50-55	55-60	60-65
Beneficio	100,000	90,000	80,000	60,000

Escribas las fórmulas, en términos de funciones de valores conmutados para

a. Prima Neta Anual pagadera semestralmente
b. La reserva terminal del año 30, considerando la prima neta definida en el inciso anterior.

7.40. La prima única del seguro expedido a una persona de 35 años de edad, proporciona una suma asegurada de 100,000 u.m. en caso de que el asegurado sobreviva a la edad de 65 años, y caso de muerte antes de los

65 años de edad, otorgará como suma asegurada al final del año póliza la prima neta única sin interés. Si la prima neta única se denotada por S, escriba la expresión, en términos de función de valores conmutados para:

a. S

b. La fórmula prospectiva para la reserva expedida en el año k

c. La fórmula retrospectiva para, la reserva expedida en el año k

7.41. En términos de $P = {}_{20}P^{(12)}\left(\overline{A}_{30\,\overline{35}|}\right)$ en función de valores conmutados, escriba la fórmula prospectiva y retrospectiva para las siguientes expresiones:

a. ${}^{20}_{10}V^{(12)}\left(\overline{A}_{30\,\overline{35}|}\right)$

b. ${}^{20}_{25}V^{(12)}\left(\overline{A}_{30\,\overline{35}|}\right)$

Misceláneos

7.42. Calcule el valor de $P_{\overline{1}_{x:\overline{n}|}}$ si ${}_nV_x = 0.080$, $P_x = 0.024$ y $P_{\overline{1}_{x:\overline{n}|}} = 0.2$

7.43. Si ${}_{10}V_{35} = 0.150$ y ${}_{20}V_{35} = 0.354$, calcule ${}_{10}V_{45}$.

7.45. Un seguro de vida entera es expedido a una persona de edad 25 años, el cual paga el beneficio en caso de fallecimiento al final del año póliza. Las Primas que se pagan para este seguro son en forma anual hasta la edad de 65 años. La prima neta para los primeros 10 años es P_{25}, seguida por un incremento anual nivelado para los próximos 30 años. Exprese en función de valores conmutados lo siguiente:

a. La prima neta anual que se pagará a edad 35.

b. La reserva al final del décimo año.

c. La cantidad, B, bajo la siguiente opción: Al final del décimo año, el poseedor de la póliza puede continuar con la prima neta única P_{25} hasta la edad 65 a cambio de la reducción del beneficio de muerte de B, para después edad 35.

d. La reserva al final de 20 años, si la opción en (c) es seleccionada.

7.46. Utilice (7.11.3), escriba la expresión para

$$\text{a. } \frac{d}{dt}\left({}_tp_x\,\overline{V}\right) \quad \text{b. } \frac{d}{dt}\left(v^t\,\overline{V}\right) \quad \text{c. } \frac{d}{dt}\left(v^t\,{}_tp_x\,\overline{V}\right)$$

e interprete los resultados.

7.47. Demuestre que la fórmula equivalente a (7.9.1) infiere del supuesto de Baducci para mortalidad entre los años de edad.

$${}_{k+s}V = v^{1-s}\left[(1-s)\left({}_kV+\pi_k\right)(1+i)+s\;{}_{k+1}V\right]$$

7.48. Suponiendo $\delta = 0.05$, $p_x = 0.05$ y una distribución uniforme de muerte dentro intervalo del año de edad, calcule

a. $\left(\overline{IA}\right)_{x:\overline{1}|}$

b. ${}_{1/2}V\left(\overline{I}\;\overline{A}\right)_{x:\overline{1}|}$

7.49. * Usando el supuesto de la distribución uniforme de mortalidad dentro del intervalo del año de edad, y el seguimiento del crecimiento de las reservas en un caso real con prima semestral,

$$\left[{}_kV^{(2)}+\frac{\pi_k^{(2)}}{2}\right](1+i)+\frac{\pi_k^{(2)}}{2}\,{}_{1/2}p_{x+k}\,(1+i)^{1/2} = p_{x+k}\;{}_{k+1}V^{(2)}+q_{x+k}\;b_{k+1}$$

obtenga (7.9.7) de (7.9.6)

7.50. * Pruebe que

$$\int_0^n\left(v^t-\overline{P}\left(\overline{A}_x\right)\overline{a}_{\overline{t}|}\right)^2\,{}_tp_x\;\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty\left[\left[1-{}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right)\right]^2 v^{2t}\,{}_tp_x\;\mu_{x+t}dt\right]$$

e interprete el resultado.

7.51. * Si

$$ {}_{k,m}L = \begin{cases} b_{k+1}v^{K-k} - {}_{k}V - \sum_{h=0}^{K-k} \pi_{k+h}v^{h} & K(x) = k, k+1, .., k+m-1 \\ {}_{k+m}V \cdot v^{m} - {}_{k}V - \sum_{h=0}^{m-1} \pi_{k+h}v^{h} & K(x) = k+m, k+m+1, .. \end{cases} $$

y para $h = 0,1,2,...,m-1$

$$ \Lambda_{k+h} = \begin{cases} 0 & K(x) = k, k+1, ..., k+h-1 \\ v \cdot b_{k+h+1} - ({}_{k+h}V + \pi_{k+h}) & K(x) = k+h \\ v \cdot {}_{k+h+1}V - ({}_{k+h}V + \pi_{k+h}) & K(x) = k+h+1, k+h+2, .. \end{cases} $$

Demuestre que

a. ${}_{k,m}L = \sum_{h=0}^{m-1} v^{h}\Lambda_{k+h}$

b. $Var\left[{}_{k,m}L \middle| K(x) > k\right] = \sum_{h=0}^{m-1} v^{2h} Var\left[\Lambda_{k+h} \middle| K(x) > k\right]$

7.52. Rehaga el Ejemplo 7.11 en términos del asegurado del Ejemplo 7.7 cuanto el tiempo que sobrevivirá es hasta el final del segundo año de la póliza.

7.53. Repita el Ejemplo 7.12 en términos del portafolio con 1,500 pólizas conforme a lo descrito en el Ejemplo 7.7 y comentado en el Ejercicio 7.47.

7.54. En el Ejercicio 7.48 no hay incertidumbre en el monto o el tiempo de pago para los seguros para los sobrevivientes tengamos en la 40ª póliza del año. Repita el Ejercicio 7.48 para justificar la duración 2 y 3 de los asegurados.

7.55. ¿Que cambios se emplean para formar la quinta línea de la Tabla 7.3, si el seguro es:
a. en base totalmente continúa
b. en base totalmente discreta

7.56. Escriba la fórmula, en términos de símbolos de la prima y reserva terminal, para una reserva a la mitad del evento de la póliza anual de 10,000 u.m. de un seguro ordinario de vida con pago de primas anuales y emitidas a edad 30 años.

7.57. Una póliza de un dotal a 3 años, en la fase de acumulación tiene los siguientes valores al final de cada año como se muestra a continuación:

1	0.66
2	1.56
3	3.00

si se consideró considerando una tasa de interés del 20% anual y con base al principio de equivalencia, la prima neta anual es de 0.94, Calcule:

a. q_x

b. q_{x+1}

c. La varianza de la pérdida a la expedición de la póliza ${}_0L$

d. La varianza de la pérdida al final del año de la póliza ${}_1L$

FUNCIONES DE VIDAS MÚLTIPLES

8.1 Introducción

En los capítulos 3 al 7 desarrollamos una teoría para el análisis de las indemnizaciones financieras dependientes del tiempo de fallecimiento para una sola vida. Podemos extender esta teoría a las indemnizaciones que involucran varias vidas. Una aplicación de esta extensión, comúnmente encontrada en los planes de pensión, es la opción de la anualidad de sobrevivencia conjunta. Un participante puede elegir cambiar esta indemnización desde una cantidad específica pagadera en tanto esté vivo a una cantidad menor pagadera mientras el participante o su beneficiario estén vivos.

Las aplicaciones de los cálculos actuariales para vidas múltiples son comunes. En los impuestos sobre herencias y donativos, por ejemplo, el ingreso por inversión de un fideicomiso puede pagarse a un grupo de herederos durante el tiempo que al menos uno del grupo sobreviva. Otros ejemplos serian: el pago del beneficio a la muerte del último miembro de un grupo, o el pago de la indemnización en pólizas familiares en las que éstas dependerán del orden del fallecimiento de sus miembros, de forma semejante hay pólizas de seguros emitidos sobre una base conjunta de vida que proporciona efectivo para la planeación de la herencia.

En este capítulo restringiremos nuestra discusión a situaciones que involucren dos vidas. No discutiremos las primas anuales, reservas o el problema de selección inherente a las combinaciones de dos vidas. Esto se discutirá en el Capítulo 17 de este libro. Aquí nos concentraremos en las indemnizaciones básicas y la aplicación de conceptos y técnicas desarrolladas en los Capítulos 3 al 5.

Una abstracción útil en la teoría de las contingencias de vida, especialmente como es aplicada a varias vidas, es el del ***estatus*** para el que existen definiciones de sobrevivencia e interrupción. Una sólo vida de edad x define un estatus que sobrevive mientras (x) vive. Por tanto, la variable aleatoria $T(x)$, utilizada en el Capítulo 3 para representar el tiempo de vida futuro de (x), puede interpretarse como el periodo de sobrevivencia del estatus y también como el tiempo que transcurre hasta que se interrumpe el estatus. Un plazo determinado, $\overline{n}|$, define un estatus de sobrevivencia para exactamente n años y después se interrumpe. Se pueden definir estatus más complejos en términos de varias vidas en diferentes formas. Sobrevivencia puede significar que todos los miembros sobrevivan o, alternativamente, que al menos un miembro sobreviva. Pueden definirse estatus aún mas complicados con respecto a dos hombres y dos mujeres considerando que el estatus sobrevive sólo durante el tiempo que al menos un hombre y al menos una mujer sobrevivan.

Después de que se hayan definido el estatus y su sobrevivencia, podemos aplicar la definición para desarrollar modelos para anualidades y seguros. Una anualidad es pagadera durante el tiempo que el estatus permanezca, mientras que un seguro es pagadero a la interrupción del estatus. Los seguros también pueden estar restringidos de tal forma que sean pagaderos sólo si los individuos mueren en un orden específico.

8.2 El Estatus de Vida Conjunta

Un estatus que existe en tanto que todos los miembros sobrevivan y se interrumpe a la primera muerte es conocido como el ***estatus de vida conjunta***. Se representa por $(x_1 x_2 \cdots x_m)$ en donde x_i representa la edad del miembro i del grupo y m representa el número de miembros. La notación que se introdujo en los Capítulos 3, 4 y 5 será utilizada aquí con el subíndice indicando varias edades en lugar de una sola. Por ejemplo, A_{xy} y ${}_tP_{xy}$ tendrán el mismo significado para el estatus de vida conjunta (xy) como A_x y ${}_tP_x$ tienen para la vida única (x).

Consideraremos ahora la distribución de la variable aleatoria T, el tiempo transcurrido antes de la interrupción del estatus. Para el estatus de vida conjunta, $T = \min[T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)]$ en donde $T(x_i)$ es el tiempo del

fallecimiento de un individuo i. Para el tiempo de vida futuro de un estatus, los conceptos y relaciones establecidas en las Secciones 3.2.2 a 3.5 (excluyendo el ejemplo de la tabla de mortalidad de la Sección 3.3.2) se aplican a la distribución de T. Estos conceptos se utilizarán aquí sin nuevas demostraciones.

En las aplicaciones, no se especifican directamente la ley de mortalidad o tabla de mortalidad para el tiempo de vida futuro del estatus de vida conjunta. Cuando queremos expresar probabilidades de sobrevivencia o de interrupción del estatus de vida conjunta lo haremos en términos de probabilidades para las vidas individuales del grupo. En forma realista, los individuos cubiertos por un seguro de vida conjunta o un contrato de anualidad tienen alguna asociación, lo que implica que las variables aleatorias del tiempo de vida hasta que sobreviene la muerte no son independientes. Sin embargo, la dependencia de estas variables aleatorias es muy difícil de cuantificar, y no se realiza algún esfuerzo por hacerlo. Consecuentemente, siempre que expresemos funciones de la tabla de mortalidad para el estatus de vida conjunta en términos de los de las vidas individuales, estaremos utilizando el supuesto de independencia.

Empezamos definiendo la función de distribución de T para $t>0$ y restringimos nuestra atención al caso de dos vidas con $x_1 = x$ y $x_2 = y$, así que $T = T(xy)$, por tanto,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr(T \le t) \\ &= \Pr[\min[T(x), T(y)] \le t] \\ &= 1 - \Pr[T(x) > t \ \ y \ \ T(y) > t] \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Luego, por la independencia,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \Pr\left[T(x) > t\right]\Pr\left[T(y) > t\right] \\ &= 1 - {}_tp_x \ {}_tp_y \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Por tanto, la independencia implica que la probabilidad de un estatus de vida conjunta (xy) que sobrevive al tiempo t, ${}_tp_{xy}$, es

$${}_tp_{xy} = {}_tp_x \ {}_tp_y \tag{8.2.3}$$

La *f.d.p.* para T se obtiene derivando $F_T(t)$ con respecto a t y, para tiempos de vida futuros independientes, es

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x\ {}_tp_y) \\ &= -{}_tp_x(-{}_tp_y\ \ \mu_{y+t}) - {}_tp_y(-{}_tp_x\ \ \mu_{x+t}) \\ &= {}_tp_x\ {}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

La distribución de $T = T(xy)$ puede también especificarse por la fuerza de mortalidad de las vidas asociadas. Para hacerlo así, consideramos primero una notación para la fuerza de interrupción de un estatus en el tiempo t. Una notación común para esta fuerza es $\mu_{x+t:y+t}$ (en analogía con μ_{x+t}) pero, preparándonos para una discusión más general de estatus, emplearemos la notación $\mu_{xy}(t)$. Por analogía con la primera fórmula de (3.2.12) en la cual reemplazamos $f(x)$ y $F(x)$ por $f_{T(xy)}(t)$ y $F_{T(xy)}(t)$, respectivamente, se tiene

$$\mu_{xy}(t) = \frac{f_{T(xy)}(t)}{1 - F_{T(xy)}(t)} \tag{8.2.5}$$

Para $T(x)$, $T(y)$ independientes, tenemos entonces, de (8.2.2) y (8.2.4),

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} \tag{8.2.6}$$

En palabras, la fuerza de interrupción del estatus de vida conjunta es la suma de las fuerzas de mortalidad para los individuos si sus tiempos de vida futuros son independientes. Como en el Capítulo 3 del caso de vida única, podemos caracterizar la distribución de $T(xy)$ mediante la *f.d.p.*, la *f.d.* o la fuerza de mortalidad.

La probabilidad de que el estatus de la vida conjunta se interrumpa durante el tiempo k a $k+1$ se determina utilizando la función de distribución

$$\begin{aligned} \Pr(k < T \le k+1) &= \Pr(T \le k+1) - \Pr(T \le k) \\ &= {}_kp_{xy} - {}_{k+1}p_{xy} \\ &= {}_kp_{xy}\ \ q_{x+k:y+k} \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Nótese que la probabilidad del estatus de vida conjunta $(x+k:y+k)$ que se interrumpe dentro del siguiente año puede escribirse en términos de las probabilidades de interrupción independiente de las vidas individuales como sigue:

$$\begin{aligned} q_{x+k:y+k} &= 1 - p_{x+k:y+k} \\ &= 1 - p_{x+k}\ p_{y+k} \\ &= 1 - (1-q_{x+k})(1-q_{y+k}) \\ &= q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}\ q_{y+k} \end{aligned} \tag{8.2.8}$$

De la discusión en la Sección 3.2.3 del tiempo de vida futuro truncado de (x), observamos que (8.2.7) también proporciona la *f.p.* de la variable aleatoria K, el número de años completado antes de la interrupción del estatus, es decir, para $k = 0,1,2,\ldots$,

$$\begin{aligned} \Pr(K=k) &= \Pr(k \le T < k+1) \\ &= \Pr(k < T \le k+1) \\ &= {}_k p_{xy}\ \ q_{x+k:y+k} \\ &= {}_{k|} q_{xy} \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

8.3 El Estatus del Último Sobreviviente

Además de las indemnizaciones definidas en términos del tiempo de la primera defunción, existen aquellas definidas en términos del tiempo de la última defunción. En esta sección examinaremos situaciones en las que la variable aleatoria es el tiempo de la última defunción.

Un estatus que existe durante el tiempo en que al menos un miembro del grupo está vivo y se interrumpe hasta la última muerte se denomina ***estatus del último sobreviviente***. Se denota mediante $(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m})$ en donde x_i representa la edad del miembro i y m representa el número de miembros.

Consideramos la distribución de la variable aleatoria T, el tiempo que transcurre hasta que se interrumpe el estatus. En el estatus del último sobreviviente, $T = \max[T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)]$ en donde $T(x_i)$ es el tiempo que transcurre antes que sobrevenga la muerte del individuo i. Como en el

desarrollo del estatus de vida conjunta, cuando queremos expresar funciones y características de la distribución de las $T's$ en términos de las correspondientes a las vidas individuales, suponemos que $T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)$ son mutuamente independientes. Para dos vidas, tenemos

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr(T \le t) \\ &= \Pr[\text{máx}[T(x), T(y)] \le t] \\ &= \Pr[T(x) \le t \ \ y \ \ T(y) \le t] \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Luego, por la independencia,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr[T(x) \le t] \ \Pr[T(y) \le t] \\ &= (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \\ &= 1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x \, {}_tp_y \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

Por lo tanto,

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \, {}_tp_y \tag{8.3.3}$$

(Véase el Ejercicio 8.39 para una derivación directa.)

Podemos derivar (8.3.2) con respecto a t para expresar la *f.d.p.* de $T = T(\overline{xy})$ en términos de las funciones de vida para las vidas individuales bajo el supuesto de independencia:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt}\left[(1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y)\right] \\ &= (1 - {}_tp_x) \, {}_tp_y \mu_{y+t} + (1 - {}_tp_y) \, {}_tp_x \mu_{x+t} && \text{(8.3.4A)} \\ &= {}_tp_x \mu_{x+t} + {}_tp_y \mu_{y+t} - {}_tp_x \, {}_tp_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) && \text{(8.3.4B)} \end{aligned}$$

Existe una relación más general entre $T(xy), T(\overline{xy}), T(x)$ y $T(y)$. Aun si $T(x)$ y $T(y)$ no son independientes, $T(\overline{xy})$ es igual ya sea a $T(x)$ o $T(y)$ y $T(xy)$ es igual a la otra para cada resultado, así que tenemos las siguientes ecuaciones:

$$T(xy)+T(\overline{xy})=T(x)+T(y) \tag{8.3.5A}$$

$$F_{T(xy)}(t)+F_{T(\overline{xy})}(t)=F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t) \tag{8.3.5B}$$

$$f_{T(xy)}(t)+f_{T(\overline{xy})}(t)=f_{T(x)}(t)+f_{T(y)}(t) \tag{8.3.5C}$$

De (8.3.5B) se sigue que

$${}_tp_{\overline{xy}}={}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{xy} \tag{8.3.5D}$$

y de (8.3.5C) y (8.2.5A) que

$$f_{T(\overline{xy})}(t)={}_tp_x\mu_{x+t}+{}_tp_y\mu_{y+t}-{}_tp_{xy}\mu_{xy}(t) \tag{8.3.5E}$$

Notamos que (8.3.4B) y (8.3.5E) difieren sólo en el tercer término. La ecuación (8.3.5E) puede escribirse como (8.3.4B) si $T(x)$ y $T(y)$ son independientes.

Por analogía con la primera fórmula de (3.2.13), en donde $f(x)$ y $F(x)$ las reemplazamos por $f_{T(\overline{xy})}(t)$ y $F_{T(\overline{xy})}(t)$, tenemos

$$\mu_{\overline{xy}}(t)=\frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1-F_{T(\overline{xy})}(t)}$$

Se sigue de (8.3.5D) y (8.3.5E) que

$$\mu_{\overline{xy}}(t)=\frac{{}_tp_x\mu_{x+t}+{}_tp_y\mu_{y+t}-{}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)}{{}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{xy}} \tag{8.3.6}$$

La *f.p.* de la variable aleatoria K, el número de años completados antes de la interrupción del estatus, o para el estatus del último sobreviviente, el número de años completados antes de la última muerte, puede ahora determinarse mediante la confrontación de los elementos del par $[K(xy), K(\overline{xy})]$ con aquellos del par $[K(x), K(y)]$. Para $k=0,1,2,\ldots$ tenemos

$$\Pr[K(\overline{xy})=k]+\Pr[K(xy)=k]=\Pr[K(x)=k]+\Pr[K(y)=k]\ ,$$

por tanto

$$\Pr\left[K\left(\overline{xy}\right)=k\right] = {}_kp_x\ q_{x+k} + {}_kp_y\ q_{y+k} - {}_kp_{xy}\ q_{x+k:y+k} \tag{8.3.7}$$

Para vidas independientes, (8.2.3) y (8.2.7) nos permiten escribir (8.3.7) como

$$\begin{aligned}\Pr\left[K\left(\overline{xy}\right)=k\right] &= {}_kp_x\ q_{x+k} + {}_kp_y\ q_{y+k} \\ &\quad - {}_kp_x\ {}_kp_y(q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}\ q_{y+k}) \\ &= \left(1-{}_kp_y\right){}_kp_x\ q_{x+k} + \left(1-{}_kp_x\right){}_kp_y\ q_{y+k} \\ &\quad + {}_kp_x\ {}_kp_y\ q_{x+k}\ q_{y+k}\end{aligned} \tag{8.3.8}$$

Los dos primeros términos son la probabilidad de que sólo la segunda muerte ocurra entre el tiempo k y $k+1$. El tercero es la probabilidad de que ambas muertes ocurran durante ese año. Esta expresión para $\Pr\left[K\left(\overline{xy}\right)=k\right]$ es análoga a (8.3.4A) para la *f.d.p.* de $T(\overline{xy})$ donde, desde la probabilidad de que dos defunciones ocurran en el mismo instante es 0, sólo existen dos términos.

8.4 Probabilidades y Esperanzas

En las Secciones 2 y 3 expresamos las *f.d.p's.* y las *f.d's.* de los tiempos de vida futuros, del estatus de vida conjunta y del último sobrevivientes en términos de funciones vidas únicas e independientes. En esta sección utilizaremos estas expresiones para resolver problemas de probabilidad y para obtener esperanzas, varianzas y la covarianza de los tiempos de vida futuros de sobrevivencia conjunta y del último sobreviviente.

Ejemplo 8.1:

Suponiendo que los tiempos de vida futuros de (80) y (85) son independientes, obtenga una expresión para la probabilidad de que su

a. primera muerte ocurra después del 5° año y antes de 10° año a partir de este momento

b. la última muerte ocurra después del 5° año y antes de 10° año a partir de este momento.

Solución:

a. Con $T = T(80:85)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Pr(5 < T \le 10) &= \Pr(T > 5) - \Pr(T > 10) \\ &= {}_5p_{80:85} - {}_{10}p_{80:85} \\ &= {}_5p_{80}\,{}_5p_{85} - {}_{10}p_{80}\,{}_{10}p_{85}\end{aligned}$$

Nótese que el supuesto de independencia se utiliza sólo en el último paso.

b. Con $T = T(\overline{80:85})$ utilizamos (8.3.5D) para obtener

$$\begin{aligned}\Pr(5 < T \le 10) &= \Pr(T > 5) - \Pr(T > 10) \\ &= {}_5p_{\overline{80:85}} - {}_{10}p_{\overline{80:85}} \\ &= {}_5p_{80} - {}_{10}p_{80} + {}_5p_{85} - {}_{10}p_{85} - ({}_5p_{80:85} - {}_{10}p_{80:85})\end{aligned}$$

Utilizando el supuesto de independencia, podemos sustituir ${}_5p_{80}\,{}_5p_{85}$ por ${}_5p_{80:85}$ y ${}_{10}p_{80}\,{}_{10}p_{85}$ por ${}_{10}p_{80:85}$.

Los resultados de la Sección 3.5 respecto a los valores esperados de la distribución de T, el tiempo transcurrido antes de la muerte de (x), son también válidos si $T = T(u)$ es el tiempo transcurrido antes de la interrupción de un estatus general (u).

Por ejemplo, de (3.5.2) tenemos que $\mathring{e}_x = E[T(u)]$, el cual para un estatus general (u) puede obtenerse de la fórmula

$$\mathring{e}_u = \int_0^\infty {}_tp_u\,dt \tag{8.4.1}$$

Si (u) es el estatus de vida conjunta (xy), entonces

$$\mathring{e}_{xy} = \int_0^\infty {}_tp_{xy}\,dt \tag{8.4.2}$$

y para el estatus del último sobreviviente $(\overline{xy})$, tenemos

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}}\, dt \tag{8.4.3}$$

Al sustituir (8.3.5D) en el último resultado, vemos que

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy} \tag{8.4.4}$$

De (3.5.5), el valor esperado de $K = K(u)$ es

$$e_u = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_u$$

para un estatus general, (u). Los casos especiales incluyen

$$e_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{xy}$$

y

$$e_{\overline{xy}} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{\overline{xy}}$$

De estos casos especiales y de (8.3.5D) se sigue que

$$e_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy}$$

Las fórmulas de varianza derivadas en la Sección 3.5 pueden utilizarse para calcular la varianza del tiempo de vida futuro, o el tiempo de vida futuro truncado, de cualquier estatus, (u). Por tanto,

$$Var\left[T(xy)\right] = 2\int_0^\infty {}_tp_{xy}\, dt - (\mathring{e}_{xy})^2$$

y

$$Var\left[T(\overline{xy})\right] = 2\int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}}\, dt - (\mathring{e}_{\overline{xy}})^2$$

Para expresar la covarianza de $T(xy)$ y $T(\overline{xy})$ en términos de las funciones de la tabla de mortalidad para las vidas individuales, empezamos con

$$Cov\left[T(xy),T(\overline{xy})\right]=E\left[T(xy)T(\overline{xy})\right]-E\left[T(xy)\right]E\left[T(\overline{xy})\right]$$

Sobre la misma base que para (8.3.5A)

$$T(xy)T(\overline{xy})=T(x)T(y)$$

por tanto

$$E\left[T(xy)T(\overline{xy})\right]=E\left[T(x)T(y)\right]$$

Si $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, entonces

$$E[T(x)T(y)]=E[T(x)]E[T(y)]$$

Por tanto

$$Cov\left[T(xy),T(\overline{xy})\right]=\mathring{e}_{x}\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}\mathring{e}_{\overline{xy}} \tag{8.4.5}$$

Sustituyendo (8.4.4) en (8.4.5) y reacomodando los términos tenemos

$$Cov\left[T(xy),T(\overline{xy})\right]=(\mathring{e}_{x}-\mathring{e}_{xy})(\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}) \tag{8.4.6}$$

Como ambos factores de (8.4.6) deben ser no-negativos, podemos observar que $T(xy)$ y $T(\overline{xy})$ están correlacionados positivamente excepto en casos triviales donde $\mathring{e}_{x}$ o $\mathring{e}_{y}$ son iguales a $\mathring{e}_{xy}$.

8.5 Indemnizaciones de Seguros y de Anualidades

Los seguros y anualidades, previamente discutidas para una vida individual, pueden definirse para el estatus general, (u). Reemplazando el estatus de una sola vida (x) por el general, (u), los modelos y fórmulas de los Capítulos 4 y 5 son aplicables aquí. Inmediatamente quedan disponibles expresiones para los valores presentes actuariales y las varianzas, en términos de la distribución del tiempo de vida futuro de (u). Las relaciones de la Sección 8.3 pueden entonces utilizarse para poner estas expresiones en términos de funciones para las vidas individuales del estatus general.

Para un seguro unitario pagadero al final del año en el que el estatus general se interrumpe, se aplica el modelo y las fórmulas de la Sección 4.3. Por lo tanto si K representa el tiempo de vida futuro truncado de (u), entonces el

- tiempo de pago es $K+1$,
- el valor presente a la expedición del pago es $Z = v^{K+1}$,
- la prima neta única, A_u, es $E[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \Pr(K=k)$, (8.5.1)
- $Var[Z] = {}^2A_u - (A_u)^2$ (8.5.2)

Como ejemplo, considere una suma asegurada de una unidad pagadera al final del año en el que el último sobreviviente de (x) y (y) muere. De (8.3.7) y (8.5.1) tenemos

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_kp_x \;\; q_{x+k} + {}_kp_y \;\; q_{y+k} - {}_kp_{xy} \;\; q_{x+k\,:\,y+k} \right)$$

que puede usarse en las fuerzas de interés δ y 2δ para obtener la varianza mediante (8.5.2).

Las numerosas fórmulas para las anualidades discretas de la Sección 5.4 son válidas cuando los pagos de la anualidad son dependientes de la sobrevivencia de un estatus general. Por ejemplo, si reemplazamos x con u para enfatizar que K es el tiempo de vida futuro truncado del estatus general, (u), podemos

reestablecer las siguientes fórmulas para una anualidad temporal a n años con respecto a (u):

$$\Upsilon = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & K \ge n \end{cases} \qquad \text{(5.4.9)reformulada}$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = E[\Upsilon] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_k|q_u + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_u \qquad \text{(5.4.8)reformulada}$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_u = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_u$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left(1 - A_{u:\overline{n}|}\right) \qquad \text{(5.4.10)reformulada}$$

$$Var[\Upsilon] = \frac{1}{d^2}\left[{}^2A_{u:\overline{n}|} - \left(A_{u:\overline{n}|}\right)^2\right] \qquad \text{(5.4.12)reformulada}$$

Para ejemplificar, considere una anualidad de una unidad, pagadera al principio de cada año en el que ambos (x) y (y) sobrevivan durante los siguientes n años. Esta es una anualidad del estatus de vida conjunta (xy). Sustituyendo ${}_tp_{xy}$, o ${}_tp_x\,{}_tp_y$ si los tiempos de vida son independientes, por ${}_tp_u$ en las fórmulas precedentes, puede obtenerse el valor presente actuarial de la anualidad. Para la varianza de (5.4.12), se puede utilizar

$$A_{xy:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

y

$${}^2A_{xy:\overline{n}|} = 1 - (2d - d^2)\ {}^2\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

o pueden calcularse directamente las primas netas únicas.

Podemos establecer relaciones entre los modelos para las anualidades y seguros sobre el estatus del último sobreviviente y de vida conjunta. Igual que el argumento utilizado para (8.3.5A), tenemos que, para cada resultado, $K(\overline{xy})$ es igual ya sea a $K(x)$ o $K(y)$ y $K(xy)$ es igual al otro. Por lo tanto

$$v^{K(\overline{xy})+1} + v^{K(xy)+1} = v^{K(x)+1} + v^{K(y)+1} \qquad (8.5.3)$$

$$\ddot{a}_{\overline{K(\overline{xy})+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(xy)+1}|} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|} \qquad (8.5.4)$$

$$v^{K(xy)+1}\, v^{K(\overline{xy})+1} = v^{K(x)+1}\, v^{K(y)+1} \qquad (8.5.5)$$

Al tomar las esperanzas de ambos lados de (8.5.3) y (8.5.4), tenemos

$$A_{\overline{xy}} + A_{xy} = A_x + A_y$$

y

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} + \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y$$

Estas fórmulas nos permiten expresar los valores presentes actuariales de anualidades y seguros del último sobreviviente en términos de aquellos para las vidas individuales y para el estatus de vida conjunta.

Consideraremos ahora anualidades y seguros continuos. Si T, la variable aleatoria del tiempo de vida futura de las Secciones 4.2 y 5.3, se reinterpreta como $T(u)$, el tiempo transcurrido hasta la interrupción del estatus (u) general, las fórmulas de esas secciones para valores presentes, valores presentes actuariales y varianzas son válidos para seguros y anualidades con respecto al estatus (u).

Para un seguro que paga una cantidad unitaria al momento de la interrupción de (u), el valor presente a la expedición de la póliza, la prima neta única y la varianza están dados por

$$Z = v^T$$
$$\overline{A}_u = \int_o^\infty v^t \, {}_tp_u \, \mu_{u+t} dt \qquad \text{(4.2.6) reformulada}$$
$$Var[Z] = {}^2\overline{A}_u - \overline{A}_u^2$$

Como ilustración, la expresión (4.2.6) reformulada para el último sobreviviente de (x) y (y) sería

$$\overline{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{\overline{xy}} \, \mu_{\overline{xy}}(t) \, dt$$

Por (8.3.6) este es

$$\overline{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t [{}_tp_x \, \mu_{x+t} + {}_tp_y \, \mu_{y+t} - {}_tp_{xy} \, \mu_{xy}(t)] \, dt$$

Para una anualidad pagadera continuamente a la tasa de 1 por año hasta T, para el tiempo de interrupción de (u), tenemos

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$$

$$\bar{a}_u = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_u\, \mu_{u+t}\, dt \qquad \text{(5.3.2A) reformulada}$$

$$= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_u\, dt \qquad \text{(5.3.2B) reformulada}$$

$$Var[Y] = \frac{{}^2\bar{A}_u - \bar{A}_u^2}{\delta^2} \qquad \text{(5.3.8) reformulada}$$

La identidad del interés,

$$\delta\, \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T = 1 \qquad \text{(5.3.9) reformulada}$$

está también disponible para $T = T(u)$ y proporciona la conexión entre los modelos para seguros y anualidades.

Como una aplicación, considere una anualidad pagadera continuamente a la tasa de 1 por año durante el tiempo en el que al menos sobreviva (x) o (y). Esta es una anualidad con respecto a $(\overline{xy})$, así tenemos que de las fórmulas anteriores con $T = T(\overline{xy})$

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\left[{}_tp_x\, \mu_{x+t} + {}_tp_y\, \mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\ \ \mu_{xy}(t)\right]dt$$

$$= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{\overline{xy}}\ \ dt$$

$$Var[Y] = \frac{{}^2\bar{A}_{\overline{xy}} - \bar{A}_{\overline{xy}}^2}{\delta^2}$$

Las fórmulas (8.5.3)-(8.5.5) mantienen su validez si se reemplaza el tiempo de vida futuro truncado, K, por el tiempo de vida futuro, T, por tanto,

$$v^{T(\overline{xy})} + v^{T(xy)} = v^{T(x)} + v^{T(y)} \qquad (8.5.6)$$

$$\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \bar{a}_{\overline{T(xy)}|} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} + \bar{a}_{\overline{T(y)}|} \qquad (8.5.7)$$

$$v^{T(\overline{xy})}\ v^{T(xy)} = v^{T(x)}\ v^{T(y)}$$

Estas identidades pueden utilizarse para obtener las relaciones entre las primas netas únicas, los valores presentes actuariales, las varianzas y covarianzas de los seguros y anualidades para varios estatus. Por ejemplo, tomando las esperanzas en ambos lados de (8.5.6) y (8.5.7), obtenemos

$$\overline{A}_{\overline{xy}} + \overline{A}_{xy} = \overline{A}_x + \overline{A}_y \tag{8.5.8}$$

$$\overline{a}_{\overline{xy}} + \overline{a}_{xy} = \overline{a}_x + \overline{a}_y \tag{8.5.9}$$

De la misma manera que la $Cov[T(\overline{xy}), T(xy)]$ fue expresada en términos de los tiempos de vida futuros esperados para $T(x)$ y $T(y)$ independientes, podemos demostrar que

$$Cov\left[v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}\right] = \left(\overline{A}_x - \overline{A}_{xy}\right)\left(\overline{A}_y - \overline{A}_{xy}\right) \tag{8.5.10}$$

es verdadera para tiempos de vida independientes. Ambos factores de (8.5.10) son no-positivos, así que esta covarianza es no-negativa. Será 0 sólo en el caso trivial en el que $\overline{A}_x$ o $\overline{A}_y$ sea igual a $\overline{A}_{xy}$.

Ejemplo 8.2:

Calcule la prima neta única para un seguro temporal a n años que paga una indemnización de una unida monetaria al momento en que fallece el último de entre (x) y (y), si ésta ocurre antes del tiempo n. Por otra parte si al menos un individuo sobrevive al término del tiempo n, no se realiza pago alguno.

Solución:
Mediante la reformulación de (4.2.3), y utilizando (8.3.6), tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{A}^{\,1}_{\overline{xy}\,\overline{|n|}} &= \int_0^n v^t\, {}_tp_{\overline{xy}}\ \mu_{\overline{xy}}(t)dt \\
&= \int_0^n v^t[{}_tp_x\ \mu_{x+t} + {}_tp_y\ \mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\ \mu_{xy}(t)]dt \\
&= \overline{A}^{\,1}_{x\overline{|n|}} + \overline{A}^{\,1}_{y\overline{|n|}} - \overline{A}^{\,1}_{\overline{xy}\,\overline{|n|}}
\end{aligned}$$

El símbolo $\overline{A}^{\,1}_{\overline{xy}\,\overline{|n|}}$ representa la prima neta única para un seguro temporal a n años pagadero al momento de la interrupción del estatus de vida conjunta.

Ejemplo 8.3:

Una anualidad es pagadera a la tasa de

- 1 al año mientras ambos (x) y (y) están vivos,
- 2/3 al año mientras uno de (x) o (y) está vivo y el otro ha muerto.

Suponiendo que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, obtenga expresiones para

a. la variable aleatoria del valor presente de la anualidad.
b. el valor presente actuarial de la anualidad
c. la varianza de la variable aleatoria en (a).

Solución:

a. La anualidad es una combinación de una que es pagadera a la tasa de 2/3 al año mientras que al menos uno de (x) y (y) este vivo [hasta el tiempo $T(\overline{xy})$] y una que es pagadera a la tasa de 1/3 al año mientras ambos individuos estén vivos [hasta el tiempo $T(xy)$]. El valor presente de los pagos es

$$Z = \frac{2}{3}\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \frac{1}{3}\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}$$

b. El valor presente actuarial es

$$E[Z] = \frac{2}{3}\bar{a}_{\overline{xy}} + \frac{1}{3}\bar{a}_{xy}$$

Utilizando (8.5.9) para sustituir por $\bar{a}_{\overline{xy}}$, tenemos

$$E[Z] = \frac{2}{3}\bar{a}_x + \frac{2}{3}\bar{a}_y - \frac{1}{3}\bar{a}_{xy}$$

Alternativamente, de (5.3.2B) reformulada, tenemos

$$E[Z] = \frac{2}{3}\int_0^\infty v^t \, {}_tp_{\overline{xy}} \, dt + \frac{1}{3}\int_0^\infty v^t \, {}_tp_{xy} \, dt$$

Luego, considerando los tres casos mutuamente excluyentes respecto a cual de las vidas han sobrevivido cuando $(\overline{xy})$ han sobrevivido en el tiempo t, y suponiendo que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, podemos escribir

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_{xy} + {}_tp_x(1-{}_tp_y) + {}_tp_y(1-{}_tp_x) $$

Sustituyendo esta expresión en la primera integral da

$$ E[Z] = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{xy} \; dt + \frac{2}{3}\int_0^\infty v^t \; {}_tp_x(1-{}_tp_y)dt $$
$$ + \frac{2}{3}\int_0^\infty v^t \, {}_tp_y(1-{}_tp_x) \; dt $$

Esta expresión para $E[Z]$ puede obtenerse directamente al considerar los tres casos. El primer término es el valor presente de los pagos a la tasa de una unidad monetaria por año mientras que ambas (x) y (y) sobrevivan. El segundo término es el valor presente de los pagos a la tasa de 2/3 por año en los tiempos t cuando (x) esta vivo [con probabilidad ${}_tp_x$] y (y) está muerto [con probabilidad $(1-{}_tp_y)$]. El tercero tiene una interpretación similar.

c.

$$ Var[Z] = Var\left[\frac{2}{3}\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \frac{1}{3}\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right] $$
$$ = \frac{4}{9}Var\left[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}\right] + \frac{1}{9}Var\left[\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right] + \frac{4}{9}Cov\left[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right] $$

Pero, por ejercicio 8.14,

$$ Cov\left[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right] = \frac{Cov\left[v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}\right]}{\delta^2} $$
$$ = \frac{\left(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy}\right)\left(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}\right)}{\delta^2} $$

Por tanto

$$ Var[Z] = \frac{(4/9)({}^2\bar{A}_{\overline{xy}} - \bar{A}^2_{\overline{xy}}) + (1/9)({}^2\bar{A}_{xy} - \bar{A}^2_{xy}) + (4/9)(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})}{\delta^2} \cdot \nabla $$

Ejemplo 8.4:

Calcule el valor presente actuarial de una anualidad que se paga en forma continua a la tasa de

1. 1 por año con certeza hasta el tiempo n,
2. 1 por año después del tiempo n si ambos (x) y (y) están vivos,
3. 3/4 por año después del tiempo n si (x) está vivo y (y) está muerto, y
4. 1/2 por año después del tiempo n si (y) está vivo y (x) está muerto.

Solución:
En este ejemplo, el valor presente de la variable aleatoria es difícil de calcular. Pero, si sólo se desea el valor presente actuarial, puede obtenerse fácilmente mediante el uso de la técnica de pago corriente. De este modo, obtenemos una expresión para la esperanza de Y, el valor presente de los pagos de la anualidad, cubiertas en cada caso mediante la anualidad.

Caso 1:
$$\int_0^n v^t \, dt = \bar{a}_{\overline{n}|}$$

Caso 2:
$$\int_n^\infty v^t \, {}_tp_{xy} \, dt = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{xy} dt - \int_0^n v^t \, {}_tp_{xy} dt$$
$$= \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}$$

Caso 3:
$$\frac{3}{4}\int_n^\infty v^t \, {}_tp_x(1 - {}_tp_y)dt$$
$$= \frac{3}{4}(\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}) - \frac{3}{4}(\bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|})$$

Caso 4:
$$\frac{1}{2}\int_n^\infty v^t(1 - {}_tp_x) \, {}_tp_y \, dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\bar{a}_y - \bar{a}_{y:\overline{n}|}\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}\right)$$

Sumando, obtenemos el valor presente requerido,

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \frac{3}{4}\bar{a}_x + \frac{1}{2}\bar{a}_y - \frac{1}{4}\bar{a}_{xy} - \frac{3}{4}\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}\bar{a}_{y:\overline{n}|} + \frac{1}{4}\bar{a}_{xy:\overline{n}|}$$

En esta sección hemos examinado una variedad de indemnizaciones que involucran expresiones integrales. En las siguientes dos estudiaremos varios supuestos acerca de la *f.d.p.* de T que simplificarán la evaluación de las integrales que involucran vidas múltiples.

8.6 Evaluación - Leyes Especiales de Mortalidad

Aquí examinaremos el supuesto de que la mortalidad sigue la ley de Makeham, o la ley de Gompertz en su caso especial y las implicaciones para la determinación de las primas netas únicas y los valores presentes actuariales con respecto a los estatus de vidas múltiples.

Empezaremos con el supuesto de que la mortalidad para cada vida sigue la ley de Gompertz, $\mu_x = Bc^x$. Buscamos sustituir un estatus de vida única (ω) para el de vida conjunta (xy), y consideramos

$$\mu_{xy}(s) = \mu_{\omega+s} \quad s \geq 0 \tag{8.6.1}$$

Esto es,

$$Bc^{x+s} + Bc^{y+s} = Bc^{\omega+s}$$

o

$$c^x + c^y = c^\omega \tag{8.6.2}$$

que define la ω deseada. Se sigue que para $t > 0$,

$$\begin{aligned} {}_tP_\omega &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{\omega+s}\,ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{xy}(s)\,ds\right) \\ &= {}_tP_{xy} \end{aligned} \tag{8.6.3}$$

Por tanto para ω definida en (8.6.2), todas las probabilidades, valores esperados y varianzas para el estatus de vida conjunta (xy) son iguales a aquellos para la vida única(ω). Para valores tabulados, la necesidad de un arreglo bidimensional ha sido reemplazada por la necesidad de uno unidimensional, pero típicamente ω será no-entero y por lo tanto la determinación de sus valores requerir de interpolar en el arreglo simple.

El supuesto de que la mortalidad para cada vida sigue la ley de Makeham (véase el cuadro 3.6) hace que el procedimiento sea más complejo. La fuerza de mortalidad para el estatus de vida conjunta es

$$\mu_{xy}(s) = \mu_{x+s} + \mu_{y+s} = 2A + Bc^s(c^x + c^y) \tag{8.6.4}$$

No podemos sustituir una vida única por las dos vidas debido al término $2A$. En cambio, reemplazamos (xy) con otro estatus de vida conjunta $(\omega\omega)$. Luego

$$\mu_{\omega\omega}(s) = 2\mu_{\omega+s} = 2(A + Bc^s c^\omega) \tag{8.6.5}$$

y seleccionamos ω tal que

$$2c^\omega = c^x + c^y \tag{8.6.6}$$

A diferencia del caso Gompertz en el que el arreglo unidimensional está basado en funciones de una tabla de mortalidad única, este arreglo se basa en las funciones para un estatus de vida conjunta$(\omega\omega)$ que involucran vidas de la misma edad.

Ejemplo 8.5:

Utilice (3.7.1) y los valores de $\ddot{a}_{x\,x}$ basados en la Tabla de mortalidad Ilustrativa con interés al 6% para calcular el valor de $\ddot{a}_{60\,:\,70}$. Compare su resultados con los valores de $\ddot{a}_{60\,:\,70}$ en la tabla de $\ddot{a}_{x\,:\,x+10}$.

Solución:

De $c = 10^{0.04}$ y $c^{60} + c^{70} = 2c^\omega$, obtenemos $\omega = 66.11276$. Luego $\ddot{a}_{60:70} = 0.88724\,\ddot{a}_{66:66} + 0.11276\,\ddot{a}_{67:67} = 7.55637$. El valor de la tabla $\ddot{a}_{x:x+10}$ es 7.55633.

8.7 Evaluación-Distribución Uniforme de los Fallecimientos

Consideraremos ahora el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos para cada año de edad para cada individuo en el estatus de vida conjunta. Con este supuesto adicional, podemos evaluar las primas netas únicas de las indemnizaciones de seguros pagaderas al momento de la muerte y el valor presente actuarial de anualidades pagaderas con mayor frecuencia que una vez al año.

Recordemos de la Tabla 3.5 que, bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos para cada año de edad, ${}_tp_x = 1 - t\,q_x$ y

$$ {}_tp_x \;\; \mu_{x+t} = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = q_x \tag{8.7.1}$$

Cuando aplicamos este supuesto a un estatus de vida conjunta (xy), con $T(x)$ y $T(y)$ independientes, obtenemos, para $0 \le t \le 1$,

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy}\;\mu_{xy}(t) &= {}_tp_x\;{}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \\ &= {}_tp_y({}_tp_x\;\mu_{x+t}) + {}_tp_x({}_tp_y\;\mu_{y+t}) \\ &= (1 - t\,q_y)\,q_x + (1 - t\,q_x)\,q_y \\ &= q_x + q_y - q_x q_y + (1-2t)q_x q_y \\ &= q_{xy} + (1-2t)q_x q_y \end{aligned} \tag{8.7.2}$$

Con base en (4.4.1), la prima neta única para una indemnización de un seguro vida entera, con respecto a un estatus general (u), puede expresarse como

$$\bar{A}_u = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\;{}_kp_u \int_0^1 (1+i)^{1-s}\,\frac{{}_{k+s}p_u}{{}_kp_u}\,\mu_u(k+s)\,ds$$

Usando (8.7.2), podemos rescribir éste para el estatus de vida conjunta, (xy), como

$$\begin{aligned}\overline{A}_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kP_{xy}\ \left[q_{x+k:y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s}\, ds \right. \\ &\quad \left. + q_{x+k}\ q_{y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s}(1-2s)ds \right] \\ &= \frac{i}{\delta} A_{xy} + \frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kP_{xy}\ q_{x+k}\ q_{y+k}\end{aligned} \tag{8.7.3}$$

Para interpretar el lado derecho de (8.7.3), observamos de (4.4.2) que el primer término es igual a $\overline{A}_{xy}$. si $T(xy)$, el tiempo transcurrido hasta la interrupción de (xy), está uniformemente distribuido para cada año del tiempo de vida futuro. Ese no es el caso para $T(xy) = [\min(T(x), T(y))]$ cuando $T(x)$ y $T(y)$ están distribuidas independiente y uniformemente en tales años. Bajo este último supuesto, la distribución condicional de $T(xy)$, dado que $T(x)$ y $T(y)$ tienen diferentes intervalos anuales, también es uniforme en cada año del tiempo de vida futuro. Sin embargo, dado que $T(x)$ y $T(y)$ están dentro del mismo intervalo, la distribución de sus mínimos se moverán hacia el principio del intervalo (véase el Ejercicio 8.27), una consecuencia de este cambio, requiere un segundo término en (8.7.3), que representa los costos esperados adicionales de los siguientes años, en este segundo término, el producto de tasas de interés se aproxima a $i/6$ (vea el ejercicio 8.28), por lo tanto la prima neta única para un seguro que se paga si ambos individuos fallecen dentro del mismo año futuro es tan ínfimo su valor que la expresión (8.7.3) la aproximamos como

$$\overline{A}_{xy} \cong \frac{i}{\delta}\ A_{xy} \tag{8.7.4}$$

que es exacto, como se indicó previamente, si $T(xy)$ está distribuido uniformemente en cada año del tiempo de vida futuro.

Para evaluar $\bar{a}_{xy}$ tenemos de (5.3.6), con estatus (x) reemplazado por (xy),

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}(1 - \overline{A}_{xy})$$

y, al sustituir de (8.7.3), obtenemos

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left\{1 - \frac{i}{\delta}\left[A_{xy} + \left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_{xy}\ q_{x+k}\ q_{y+k}\right]\right\}$$

Ahora, con base en (5.4.6) para el estatus (xy), sustituimos $1 - d\,\ddot{a}_{xy}$ por A_{xy} y usamos (5.6.11), (5.6.12) para escribir

$$\bar{a}_{xy} = \alpha(\infty)\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty) - \frac{i}{\delta^2}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_k p_{xy}\ q_{x+k}\ q_{y+k} \tag{8.7.5}$$

La fórmula (8.7.5) se sigue del supuesto de que $T(x)$ y $T(y)$ están distribuidos uniforme e independientemente en los años futuros. Si suponemos que $T(xy)$ en sí misma esta distribuida uniformemente para cada año futuro, entonces por el caso continuo, $m = \infty$, de (5.5.9), obtendríamos

$$\bar{a}_{xy} = \alpha(\infty)\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty) \tag{8.7.6}$$

La fórmula (8.7.6) difiere de (8.7.5) por una pequeña cantidad, que se aproxima al producto de $i/(6\,\delta)$ y la prima neta única para una seguro pagadero si ambos individuos mueren en el mismo año futuro.

Para utilizar el mismo enfoque para evaluar el valor presente actuarial de una anualidad vencida pagadera m veces, necesitamos una expresión para $A_{xy}^{(m)}$ bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos para cada uno de los individuos en cada año de edad. En analogía con el caso continuo, empezamos con

$$A_{xy}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_{xy} \sum_{j=1}^{m} v^{j/m}\left({}_{(j-1)/m}p_{x+k:y+k} - {}_{j/m}p_{x+k:y+k}\right) \tag{8.7.7}$$

En el Ejercicio 8.29 esta expresión, bajo el supuesto de que $T(x)$ y $T(y)$ están independiente y uniformemente distribuidas en cada año de edad, se reduce a

$$A_{xy}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_{xy} + \frac{i}{i^{(m)}}\left(1 + \frac{1}{m} - \frac{2}{d^{(m)}} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_{xy}\ q_{x+k}\ q_{y+k} \tag{8.7.8}$$

Como $m \to \infty$, las expresiones de (8.7.8) se aproximan a sus contrapartes de (8.7.3). Para interpretar el lado derecho de (8.7.8), observamos por analogía con (8.7.4) que el primer término es la aproximación usual para $A_{xy}^{(m)}$ y es exacta si $T(xy)$ esta distribuida uniformemente en cada año. Luego

$$\frac{i}{i^{(m)}}\left(1+\frac{1}{m}-\frac{2}{d^{(m)}}+\frac{2}{i}\right) \cong \frac{m^2-1}{6m^2}\, i$$

que es menor que $i/6$.

Mediante la sustitución de (8.7.8) en (5.5.2) reformulada para (xy), y reemplazando A_{xy} por $1-d\,\ddot{a}_{xy}$ obtenemos la fórmula para $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ que es la análoga de (8.7.5). Si se ignora el segundo término de (8.7.8), la fórmula para $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ se reduce a

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{xy} - \beta(m) \tag{8.7.9}$$

Otra vez por (5.5.9), esta es exacta bajo el supuesto de que la distribución de $T(xy)$ es uniforme en cada año del tiempo de vida futuro.

8.8 Funciones Contingentes Simples

En esta sección estudiaremos seguros que, además de depender del tiempo de interrupción del estatus, dependen del orden de los fallecimientos de los individuos que integran el grupo.

Empezaremos con la evaluación de la probabilidad de que (x) muera antes de (y) y antes de n años a partir de ahora. Esta probabilidad se representa por ${}_nq_{xy}^{1}$, en donde 1 sobre x indica que la probabilidad es para un evento en el que (x) muere antes de (y), y la n indica que el evento ocurre dentro de los n años. Luego ${}_nq_{xy}^{1}$ es igual a la doble integral de la *f.d.p* conjunta de $T(x)$ y $T(y)$ sobre el conjunto de resultados tales que $T(x) \le T(y)$ y $T(x) \le n$. Con el supuesto de que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, el integrando es el producto de la *p.d.f.* de una sola vida y tenemos

$${}_nq_{xy}^{1} = \int_0^n \int_t^\infty {}_sp_y\, \mu_{y+s}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, ds\, dt \tag{8.8.1}$$

Desplazando ${}_tp_x\,\mu_{x+t}$ hacia afuera de la segunda integral observamos que, esta es ${}_tp_y$, por tanto (8.8.1) puede escribirse

$$ {}_nq^1_{xy} = \int_0^n {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt \tag{8.8.2} $$

La interpretación de esta expresión contiene tres elementos. Primero, debido a que t es el tiempo del fallecimiento de (x), la probabilidad ${}_tp_{xy}$ indica que ambos (x) y (y) sobreviven en el tiempo t. Segundo, $\mu_{x+t}\,dt$ es la probabilidad de que (x), ahora de edad $x+t$, muera en el intervalo dt (en un ínfimo de tiempo) y finalmente las probabilidades se suman para todos los tiempos t entre 0 y n.

También podemos evaluar la probabilidad de que (y) muera después de (x) y antes de n años a partir de ahora. Esta probabilidad esta representada por ${}_nq^2_{xy}$, el 2 arriba de la y indica que (y) muere en segundo término, la n requiere que esto ocurra dentro de los n años. Para evaluar ${}_nq^2_{xy}$, integramos la *f.d.p.* conjunta de $T(x)$ y $T(y)$ sobre el evento $[0 \le T(x) \le T(y) \le n]$ usando $T(y)$ como la variable de la integral externa,

$$ \begin{aligned} {}_nq^2_{xy} &= \int_0^n \int_0^t {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,{}_tp_y\,\mu_{y+t}\,ds\,dt \\ &= \int_0^n (1-{}_tp_x)\,{}_tp_y\,\mu_{y+t}\,dt \\ &= {}_nq_y - {}_nq^1_{xy} \end{aligned} \tag{8.8.3} $$

En la segunda expresión el integrando es el producto

$$ \Pr[(x) \text{ muera antes que } (y) \,|\, (y) \text{ muere en } t]\,\Pr[(y) \text{ muera en } t] $$

Se pueden escribir integrales similares para las primas netas únicas para seguros contingentes.

También podemos usar $T(x)$ como la variable para la primera integral. Esto da

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{xy}^{2} &= \int_0^n \int_s^n {}_sp_x\ \mu_{x+s}\ {}_tp_y\ \mu_{y+t}\ dt\ ds \\
&= \int_0^n ({}_sp_y - {}_np_y)\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\ ds \qquad (8.8.4) \\
&= {}_nq_{xy}^{1} - {}_np_y\ {}_nq_x
\end{aligned}
$$

La segunda expresión se interpreta como que (x) muere en el tiempo s con $0<s<n$, y que (y) sobrevive al tiempo s pero no al tiempo n. Mas aún, ahora tenemos que

$${}_nq_{xy}^{1} = {}_nq_{xy}^{2} + {}_np_y\ {}_nq_x$$

Esto implica

$${}_nq_{xy}^{1} \geq {}_nq_{xy}^{2}$$

Se pueden escribir integrales similares para las primas netas únicas para seguros contingentes, pero el análogo de la doble integral de (8.8.4) no se simplifica en la misma medida. Los siguientes ejemplos ilustran primas netas únicas para seguros contingentes.

Ejemplo 8.6:

Determine la prima neta única para un seguro de una unidad monetaria pagadero al momento de la muerte de (x) tomando en cuenta que (y) aún vive.

Solución:

La prima neta única, representada por $\overline{A}_{xy}^{1}$ es $E[Z]$ donde

$$Z = \begin{cases} v^{T(x)} & T(x) \leq T(y) \\ 0 & T(x) > T(y) \end{cases}$$

Como Z es una función de $T(x)$ y $T(y)$, podemos escribir una integral para la esperanza de Z usando la distribución conjunta de $T(x)$ y $T(y)$,

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_{xy}^{1} &= \int_0^\infty \int_t^\infty v^t\ {}_sp_y\ \mu_{y+s}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ ds\ dt \\
&= \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{xy}\ \mu_{x+t}\ dt
\end{aligned}
$$

La expresión final puede interpretarse en la siguiente forma: si (x) muere en cualquier tiempo futuro t y (y) aún sobrevive, entonces se hará un pago de una unidad monetaria con valor presente v^t.

Ejemplo 8.7:

Determine la prima neta única para un seguro de una unidad monetaria pagadero al momento de la muerte de (y), si ésta es posterior a la muerte de (x).

Solución:
La prima neta única, representada por $\overline{A}_{xy}^{\,2}$ es $E[Z]$ donde

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)} & T(x) \le T(y) \\ 0 & T(x) > T(y) \end{cases}$$

Otra vez, Z es un función de $T(x)$ y $T(y)$, así que podemos utilizar su *f.d.p.* conjunta para obtener $E[Z]$,

$$\begin{aligned} \overline{A}_{xy}^{\,2} &= \int_0^\infty \int_0^t v^t \, {}_sp_x \, \mu_{x+s} \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} \, ds \, dt \\ &= \int_0^\infty v^t (1 - {}_tp_x) \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} \, dt \\ &= \overline{A}_y - \overline{A}_{xy}^{\,1} \end{aligned}$$

Notemos aquí que podemos expresar la prima neta única para un seguro contingente simple, pagadera a la muerte de otro diferente de la primera muerte, en términos de primas netas únicas para seguros pagaderos a la primera muerte. Este es el paso inicial en la evaluación numérica de los seguros contingentes simples.

Puede obtenerse otra expresión al revertir el orden de la integración en la doble integral, es decir, al proceder como en (8.8.4). Tenemos

$$\overline{A}_{xy}^{\,2} = \int_0^\infty \int_s^\infty v^t \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} \, {}_sp_x \, \mu_{x+s} dt \, ds$$

Ahora reemplacemos t por $r+s$ en la segunda integral y rescribamos la expresión.

$$\begin{aligned}\overline{A}_{xy}^{\,2} &= \int_0^\infty \int_0^\infty v^{r+s}\ {}_{r+s}p_y\ \mu_{y+r+s}\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\ dr\,ds \\ &= \int_0^\infty v^s\ {}_sp_y\ {}_sp_x\ \mu_{x+s} \left(\int_0^\infty v^r\ {}_rp_{y+s}\ \mu_{y+s+r}\ dr \right) ds \\ &= \int_0^\infty v^s\ \overline{A}_{y+s}\ {}_sp_y\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\ ds\end{aligned}$$

Esta última integral es una aplicación del resultado general dado en (2.2.10), $E[W] = E\big[E[W|V]\big]$. Aquí $V = T(x)$, $W = Z$ y observamos que la esperanza condicional de Z dado $T(x) = s$, es $v^s\ {}_sp_y\ \overline{A}_{y+s}$, la cual corresponde a la prima neta única de un dotal puro de la cantidad $\overline{A}_{y+s}$, la cual es suficiente para hacer un fondo de una unidad de seguro sobre $(y+s)$.

En esta sección hemos discutido sólo los seguros contingentes. Las anualidades contingentes, llamadas ***anualidades reversibles***, se estudiarán en el Capítulo 17. Estas inician los pagos a la interrupción de un estatus dado si existe un segundo estatus, y continúa pagando hasta la interrupción del segundo estatus. (Véanse los ejemplos 8.3 y 8.4 como ilustraciones preliminares.)

8.9 Funciones Contingentes Simples - Evaluación

Nos dedicaremos ahora a la evaluación de probabilidades contingentes simples y primas netas únicas, señalando los efectos de suponer la ley Gompertz - Makeham y una distribución uniforme de los fallecimientos.

Ejemplo 8.8:

Asumiendo la ley de Gompertz para las fuerzas de mortalidad, calcule

a. la prima neta única para un seguro contingente temporal a n años que paga una unidad monetaria al momento de la muerte de (x) sólo si (x) muere antes de (y)
b. la probabilidad de que (x) muera dentro de los n años y fallezca antes que (y).

Solución:

$$\text{a. } \bar{A}^{1}_{x\,y\,:\,\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\;\mu_{x+t}\,dt$$

Según la ley de Gompertz,

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{x\,y\,:\,\overline{n}|} &= \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\;Bc^x\,c^t\,dt \\ &= \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\;B(c^x+c^y)\,c^t\,dt \\ &= \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\;\mu_{x+t:y+t}dt \\ &= \frac{c^x}{c^x+c^y}\,\bar{A}^{\,1}_{\widetilde{xy}:\overline{n}|}\end{aligned} \tag{8.9.1}$$

Más aún, si (8.6.2) es válida, entonces

$$\bar{A}^{\,1}_{\widetilde{xy}:\overline{n}|} = A^{1}_{\omega:\overline{n}|} \tag{8.9.2}$$

y

$$\bar{A}^{1}_{x\,y\,:\,\overline{n}|} = \frac{c^x}{c^\omega}\,\bar{A}^{1}_{\omega:\overline{n}|} \tag{8.9.3}$$

b. Con referencia a (8.8.2) observamos que ${}_nq^{1}_{x\,y}$ es $\bar{A}^{1}_{x\,y\,:\,\overline{n}|}$ con $v=1$. Por tanto, se sigue de (8.9.2) que, según la ley de Gompertz,

$${}_nq^{1}_{x\,y} = \frac{c^x}{c^\omega}\,{}_nq_\omega \tag{8.9.4}$$

en donde $c^\omega = c^x + c^y$ ∇

Ejemplo 8.9:

Asumiendo la ley de Makeham para las fuerzas de mortalidad, repita el ejemplo 8.8.

Solución:

a.

$$\begin{aligned}
\bar{A}^1_{xy:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t \, {}_tp_{xy} \ (A + Bc^x c^t) \ dt \\
&= A\int_0^n v^t \, {}_tp_{xy} dt + \frac{c^x}{c^x + c^y} \int_0^n v^t \, {}_tp_{xy} B(c^x + c^y) c^t \ dt \\
&= A\left(1 - \frac{2c^x}{c^x + c^y}\right)\int_0^n v^t \, {}_tp_{xy} dt + \frac{c^x}{c^x + c^y}\int_0^n v^t \, {}_tp_{xy}\left[2A + B(c^x + c^y)c^t\right] dt \\
&= A\left(1 - \frac{2c^x}{c^x + c^y}\right)\bar{a}_{xy:\overline{n}|} + \frac{c^x}{c^x + c^y}\bar{A}^1_{xy:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

después utilizando (8.6.6) Obtenemos

$$\bar{A}^1_{xy:\overline{n}|} = A\left(1 - \frac{c^x}{c^\omega}\right)\bar{a}_{\omega:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^\omega}\bar{A}^1_{\omega:\overline{n}|}$$

b. Establecemos otra vez $v = 1$ en el resultado de la parte (a) para tener

$${}_nq^1_{xy} = A\left(1 - \frac{c^x}{c^\omega}\right)\mathring{e}_{\omega:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^\omega}\,{}_nq_{\omega\omega} \tag{8.9.5}$$

∇

La prima neta única para un seguro contingente pagando al final del año de la muerte es

$$A^1_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_{xy} \, q^{\ 1}_{\overline{x+k:y+k}} \tag{8.9.6}$$

Con el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos para cada individuo, tenemos

$$\begin{aligned}
q^{\ 1}_{\overline{x+k:y+k}} &= \int_0^1 {}_sp_{x+k:y+k}\mu_{x+k+s} ds \\
&= \int_0^1 q_{x+k}(1 - s\, q_{y+k}) ds \\
&= q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2}q_{y+k}\right)
\end{aligned} \tag{8.9.7}$$

Podemos ahora rescribir ${}_sp_{x+k:y+k}\ \mu_{x+k+s}$ en términos de $q^{\overline{1}}_{x+k:y+k}$,

$$
\begin{aligned}
{}_sp_{x+k:y+k}\ \mu_{x+k+s} &= q_{x+k}(1-s\ q_{y+k}) \\
&= q_{x+k}\left(1-\frac{1}{2}q_{y+k}\right)+\left(\frac{1}{2}-s\right)q_{x+k}q_{y+k} \\
&= q^{\overline{1}}_{x+k:y+k}+\left(\frac{1}{2}-s\right)q_{x+k}q_{y+k}
\end{aligned}
\tag{8.9.8}
$$

Para el pago inmediato de las reclamaciones, la prima neta única es

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{\overline{1}}_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_{xy}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+k:y+k}\ \mu_{x+k+s}ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_{xy}\left[q^{\overline{1}}_{x+k:y+k}\int_0^1(1+i)^{1-s}ds\right. \\
&\left.+q_{x+k}q_{y+k}\int_0^1(1+i)^{1-s}\left(\frac{1}{2}-s\right)ds\right] \\
&= \frac{i}{\delta}A^{\overline{1}}_{xy}+\frac{1}{2}\frac{i}{\delta}\left(1-\frac{2}{\delta}+\frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_{xy}\ q_{x+k}q_{y+k}
\end{aligned}
\tag{8.9.9}
$$

El segundo término de la expresión (8.9.9) es relativamente tan pequeño del total de la prima. Es este un 1/2 del segundo término en (8.7.3).

8.10 Notas y referencias

El concepto de la variable aleatoria para el tiempo de vida futuro, desarrollado para una sola vida en capítulos anteriores, ha sido extendido a un estatus general, en base al cual se definieron casos particulares como el de varias vidas. Mediante la adaptación de la teoría de una sola vida se obtuvieron distribuciones de probabilidad, valores presentes actuariales, primas netas únicas, varianzas y covarianzas basadas en estas nuevas variables aleatorias para estatus definidos para dos vidas. Estos conceptos se desarrollarán para más de dos vidas en el Capítulo 17.

Se podrán encontrar discusiones sobre las ideas expuestas en este capítulo sin la utilización de variables aleatorias en los capítulos del 9 al 13 de Jordan (1967) y del 7 al 8 de Neill (1977). Un análisis general de las leyes de mortalidad, que simplifica las fórmulas para las funciones actuariales basadas en más de una vida, podrá encontrarse en Greville (1956).

8.11 Ejercicios

A menos que se indique lo contrario, todas las vidas se sujetan a la misma tabla de tasa de mortalidad y sus tiempos de vida transcurridos hasta la muerte son variables aleatorias independientes.

Sección 8.2

8.1 En términos de probabilidades para una sola vida ${}_np_x$ y ${}_np_y$, expresar

a. la probabilidad de que (xy) sobrevivan n años
b. la probabilidad de que exactamente una de las vidas (x) y (y) sobrevivan n años
c. la probabilidad de que al menos una de las vidas (x) y (y) sobreviva n años
d. la probabilidad de que (xy) se interrumpa dentro de los n años
e. la probabilidad de que al menos una de las vidas muera dentro de n años
f. la probabilidad de que ambas vidas mueran dentro de n años.

8.2 Demuestre que la probabilidad de que (x) sobreviva n años y (y) sobreviva $n-1$ años puede expresarse ya sea como

$$\frac{{}_nP_{x\overline{y-1}}}{p_{y-1}}$$

o como

$$p_x \cdot {}_{n-1}p_{x+1\overline{y}}$$

8.3 Evalúe

$$\int_0^n {}_tp_{\overline{xx}}\mu_{\overline{xx}}(t)\ dt$$

Sección 8.3

8.4 Demuestre

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_{xy} + {}_tp_x(1-{}_tp_y) + {}_tp_y(1-{}_tp_x)$$

Algebraicamente y por razonamiento general.

8.5 Encuentre la probabilidad de que al menos una de dos vidas (x), (y) muera en el año $(n+1)$. ¿Es lo mismo que ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$? Explique.

Sección 8.4

8.6 Dado que ${}_{25}p_{25:50} = 0.2$ y ${}_{15}p_{25} = 0.9$, calcule la probabilidad de que una persona de 40 años de edad sobreviva a la edad de 75.

8.7 Si $\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ para $0 \le x < 100$, calcule

a. ${}_{10}p_{40:50}$

b. ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$

c. $\overset{\circ}{e}_{40:50}$

d. $\overset{\circ}{e}_{\overline{40:50}}$

e. $Var[T(40:50)]$

f. $Var[T(\overline{40:50})]$

g. $Cov\left[T(40:50), T(\overline{40:50})\right]$

h. la correlación entre $T(40:50)$ y $T(\overline{40:50})$.

8.8 Evalúe $\dfrac{d\overset{\circ}{e}_{\overline{xx}}}{dx}$.

8.9 Demuestre que la probabilidad de dos vidas (30) y (40) que mueren en el mismo año puede expresarse como

$$1 + e_{30:40} - p_{30}(1 + e_{31:40}) - p_{40}(1 + e_{30:41}) + p_{30:40}(1 + e_{31:41})$$

8.10 Demuestre que la probabilidad de dos vidas (30) y (40) que mueren a la misma edad en el último aniversario puede expresarse como

$${}_{10}p_{30}(1 + e_{40:40}) - 2 \cdot {}_{11}p_{30}(1 + e_{40:41}) + p_{40} \cdot {}_{11}p_{30}(1 + e_{41:41})$$

8.11 Suponga que las fuerzas de mortalidad que se aplican a los individuos I y II son

$$\mu_x^{I} = \log\frac{10}{9}, \ \forall \ x$$

y

$$\mu_x^{II} = (10-x)^{-1}, \ 0 \le x < 10$$

Evalúe la probabilidad que, si ambos individuos son de un año exacto de edad, la primera muerte ocurra entre las edades exactas 3 y 5.

Sección 8.5

8.12 Demuestre que

$$a_{\overline{xy:n|}} = a_{\overline{n|}} + {}_{n|}a_{xy}$$

Describa la indemnización implícita.

8.13 $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$, describe la prima neta única de una indemnización, bajo el concepto del último sobreviviente; cómo si n fuera otra variable aleatoria, independiente de x. Demuestre que es igual a $\overline{A}_x - \overline{A}_{x:\overline{n|}} + v^n$.

8.14 Para tiempos de vida independientes $T(x)$ y $T(y)$, demuestre que

$$Cov\left[v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}\right] = (\overline{A}_x - \overline{A}_{xy})(\overline{A}_y - \overline{A}_{xy})$$

8.15 Exprese, en términos de valores de anualidad de vida única y vidas conjuntas, el valor presente actuarial de una anualidad pagadera continuamente a una tasa de una unidad monetaria por año, bajo la consideración de que dos individuos de edades (25) y (30), sobrevivan y estén limitadas a los 50 años de edad.

8.16 Exprese, en términos de valores de anualidad de vida única y conjunta, el valor presente actuarial de una anualidad diferida a cualquier año, de una unidad monetaria pagadera al final de cada año, siempre que el individuo de edad (25) y el otro de edad (30) estén con vida, limitando los pagos a los 50 años de edad, en el caso de vidas conjuntas al aniversario más próximo en temporalidad.

8.17 Calcule el valor presente actuarial de una anualidad vencida temporal a n años, pagadera con respecto a $(\overline{xy})$ proporcionando pagos anuales de una unidad monetaria mientras ambas vidas sobrevivan, reduciéndose a 1/2 a la muerte de (x) y a 1/3 a la muerte de (y).

8.18 Una anualidad inmediata de una unidad monetaria es pagadera a (x) durante el tiempo que viva conjuntamente con (y) y por n años después de la muerte de (y), excepto que en ningún caso los pagos se harán después de m años a partir del tiempo presente, $m > n$. Demuestre que el valor presente actuarial es $a_{x:\overline{n|}} + {}_nE_x a_{x+n\,:\,y\,:\,\overline{m-n|}}$

8.19 Obtenga una expresión para el valor presente actuarial de una anualidad continua de una unidad monetaria por año, pagadera mientras al menos una de las dos vidas (40) y (55) exista y tenga más de 60 años, pero no si (40) está viva y tiene menos de 55 años.

8.20 Una anualidad de sobrevivencia conjunta de (x) y (y) es pagadera a una tasa inicial por año mientras (x) viva, y si (y) sobrevive a (x), se continua a la fracción p, $1/2 \le p \le 1$, de la tasa inicial por año durante el tiempo de vida de (y) después de la muerte de (x).

a. Exprese el valor presente actuarial de tal anualidad vencida con una tasa inicial de una unidad monetaria por año, pagadera en plazos mensuales, en términos de los valores presentes actuariales de anualidades de una sola vida y vida conjunta.

b. Se dice que una anualidad conjunta y de sobrevivencia de (x) y (y); y una anualidad vitalicia de (x) son actuarialmente equivalentes sobre la base de los supuestos establecidos si tienen valores presentes actuariales iguales. Derive una expresión para la relación del pago inicial de la anualidad conjunta y de sobrevivencia y la tasa de pago de la anualidad vitalicia actuarialmente equivalente.

Sección 8.6

8.21 Demuestre que cuando el estatus (xy), bajo la ley de Makeham es reemplazado por el estatus $(\omega\omega)$, de obtiene.

$$\omega - y = \frac{\log(c^{\Delta}+1) - \log 2}{\log c}$$

donde $\Delta = x - y \ge 0$ (Esto indica que ω puede obtenerse de la edad más joven de y mediante la suma de una cantidad que es una función de $\Delta = x - y$. A tal propiedad se le conoce ***ley de envejecimiento uniforme***.

8.22 Con base en la Tabla de mortalidad Ilustrativa con interés de 6%, calcule $\ddot{a}_{50\,:\,60\,:\,\overline{10}|}$. En su solución utilice

a. valores interpolados en la tabla $\ddot{a}_{x\,x}$

b. valores de la tabla $\ddot{a}_{x\,x+10}$

8.23 Dada una tabla de mortalidad que sigue la ley de Makeham y las edades (x) y (y) para las que $(\omega\omega)$ es el estatus para edad equivalente, demuestre que

a. ${}_tp_{\omega}$ es la media geométrica de ${}_tp_x$ y ${}_tp_y$

b. ${}_tp_x + {}_tp_y > 2\,{}_tp_{\omega}$, $\forall\ x \neq y$

c. $a_{\overline{xy}} > a_{\overline{\omega\omega}}$ $\forall\ x \neq y$.

8.24 Dada una tabla de mortalidad la cual sigue la ley de Makeham, demuestre que $\bar{a}_{xy}$ es igual al valor presente actuarial de una anualidad con una sola vida (ω) donde $c^{\omega} = c^x + c^y$ y la fuerza de interés $\delta' = \delta + A$. Además, demuestre que

$$\bar{A}_{xy} = \bar{A}^{1}_{\omega} + A\,\bar{a}'_{\omega}$$

en donde las funciones primas son evaluadas a la fuerza de interés δ'.

8.25 Considere dos tablas de mortalidad, una para hombres (M) y una para mujeres (F) con

$$\mu^{M}_{z} = 3a + \frac{3bz}{2} \quad \text{y} \quad \mu^{F}_{z} = a + bz$$

Deseamos usar una tabla de valores presentes actuariales para dos vidas, una para hombres y la otra para mujeres, cada uno de edad ω, para evaluar el valor presente actuarial de una anualidad de vida conjunta para un hombre de edad x y una mujer de edad y. Exprese ω en términos de x y y.

Sección 8.7

8.26 Considere dos edades,(x) y (y), determine $\overset{\circ}{e}_{xy}$, considerando que $q_x = q_y = 1$ y que los fallecimientos se distribuyen uniformemente en cada año de edad.

8.27 Sean $T(x)$ y $T(y)$ variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidos en el siguiente año de edad. Dado que ambos, (x) y (y) mueren dentro del siguiente año, demuestre que el tiempo de la interrupción de (xy) no esta distribuida uniformemente en el año. [Sugerencia: demuestre que $\Pr\left[T(xy) \le t \mid (T(x) \le 1) \cap (T(y) \le 1)\right] = 2t - t^2$].

8.28 Demuestre

$$\frac{\bar{s}}{\delta} = \frac{1}{i\left[1-(i/2-i^2/3+i^3/4-i^4/5+\ldots)\right]}$$
$$= \frac{1}{i}\left(1+\frac{i}{2}-\frac{i^2}{12}+\frac{i^3}{24}-\frac{19\,i^4}{720}+\ldots\right)$$

Por lo tanto, demuestre

$$\frac{i}{\delta}\left(1-\frac{2}{\delta}+\frac{2}{i}\right) \cong \frac{i}{6}-\frac{i^3}{360}+\ldots$$

8.29 Demuestre que si los fallecimientos están distribuidos uniformemente para cada año de edad, entonces

$${}_{(j-1)/m}p_{xy} - {}_{j/m}p_{xy} = \frac{1}{m}q_{xy} + \frac{m+1-2j}{m^2}\,q_x\,q_y$$

Por tanto, para cualquier x, y y $j = 1,2,3,\ldots,m$, se puede verificar la expresión (8.7.8).

Sección 8.8

8.30 Demuestre mediante un razonamiento general que

$${}_nq^1_{xy} = {}_nq_{xy}{}^2 + {}_nq_x\;{}_np_y$$

Cuando $n \to \infty$, ¿en qué se transforma esa ecuación?

8.31 Demuestre que la prima neta única para un seguro de una unidad monetaria pagadera al final del año de la muerte de (x), con tal de que (y) sobreviva al tiempo de pago, puede expresarse como $v\,p_y\,\ddot{a}_{x:y+1} - a_{xy}$.

8.32 Demuestre que $A^1_{xy} - A^2_{xy} = A_{xy} - A_y$

8.33 Exprese, en términos de primas netas únicas para una sola vida y seguros contingentes de la primera muerte, la prima neta única para un seguro de una unidad monetaria que se paga al momento de la muerte de una persona de edad de 50 años, con tal de que una persona de edad de 20 años, en ese tiempo, haya muerto o alcanzado la edad de 40 años.

8.34 Exprese, en términos de primas netas para vidas simples y seguros contingentes al primer fallecimiento, la prima neta única para un seguro de una unidad monetaria, que se paga a la muerte de (x), después de (y), es decir, con tal de que (y) muera durante los n años anteriores a la muerte de (x).

8.35 Si $\mu_x = 1/(100-x)\ \forall\ 0 \le x < 100$, calcule ${}_{25}q^{\ 2}_{25:\overline{50}|}$

Sección 8.9

8.36 En una tabla de mortalidad que se sabe que sigue la ley de Makeham, se proporcionan los siguientes datos $A = 0.003$ y $c^{10} = 3$.

a. Si $\mathring{e}_{40:\overline{50}|} = 17$, calcule ${}_{\infty}q^1_{40:\overline{50}|}$

b. Exprese $\overline{A}^1_{40:\overline{50}|}$ en términos de $\overline{A}_{40:\overline{50}|}$ y $\bar{a}_{40:\overline{50}|}$.

8.37 Consideremos que la mortalidad sigue la ley de Gompertz con $\mu_x = 10^{-4}\cdot 2^{x/8}$ para $x > 35$ y considerando (8.9.2), podemos escribir

$$\overline{A}^1_{40:\overline{48}|\overline{10}|} = f\cdot \overline{A}^1_{\omega:\overline{10}|}$$

Calcule f y ω.

Misceláneos

8.38 El estatus $(\overline{n|})$, representa la existencia de exactamente n años. Si ha sido utilizado conjuntamente con estatus de vida, por ejemplo, en $\overline{A}_{x\overline{n|}}, \overline{A}^{1}_{x\overline{n|}}, \overline{A}^{\frac{1}{}}_{x\overline{n|}}, \ddot{a}_{x,\overline{n|}}, A_{xy:\overline{n|}}$. Simplifique e interprete lo siguiente:

a. $\overline{a}_{x\overline{n|}}$

b. $\overline{A}^{2}_{x\overline{n|}}$

8.39 Use la regla de probabilidad $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$ para obtener (8.3.5D).

8.40 Evalúe $\frac{\partial}{\partial x} \mathring{e}_{xy}$

MODELOS DE DECREMENTO MÚLTIPLE

9.1 Introducción

En el Capítulo 8 extendimos para el caso de vidas múltiples, la teoría para una vida individual sujeta a una contingencia única de fallecimiento; explicada desde el Capítulo 3 hasta el 7. Ahora regresaremos al caso de una sola vida, pero sujeta aquí a múltiples contingencias. Como una aplicación de esta extensión observamos que el número de trabajadores de un patrón se reducirán cuando un empleado sale del grupo (en forma voluntaria: rotación), se incapacita, muere o se retira (por condiciones particulares una vez cumplido un cierto numero de años de servicio en la empresa). En la planeación de la fuerza de trabajo, podría ser necesario estimar sólo el número de aquellos empleados que actualmente permanecerán activos durante varios años en el futuro. Para esta tarea, el modelo de sobrevivencia desarrollado en el Capítulo 3 sería adecuado si interpretamos la variable aleatoria básica como el tiempo que transcurre hasta que se presenta la terminación del empleo en lugar del tiempo que transcurre hasta el fallecimiento. Sin embargo, los actuarios requieren modelos para los planes de indemnización de los empleados en los que las indemnizaciones pagadas a la terminación del empleo puedan depender de la causa de la terminación. Por ejemplo, las indemnizaciones al retiro frecuentemente diferirán de aquellas pagaderas por fallecimiento o incapacidad. Por lo tanto, los modelos de sobrevivencia para los sistemas de indemnización de los empleados incluirán variables aleatorias tanto para el tiempo de terminación como para la causa de la terminación. También la estructura de la indemnización depende frecuentemente de las ganancias, las cuales obedecen a otro tipo diferente de incertidumbre que se discutirá en el Capítulo 10.

En otra aplicación, la mayoría de los seguros de vida individual estipulan el pago de una indemnización sin pérdida de derechos, si se interrumpe el pago de las primas antes del final del plazo especificado para el pago de las primas. Un modelo completo para tales seguros incorporará como variables aleatorias el tiempo que transcurre hasta que tiene lugar la terminación, así como la causa de dicha terminación.

El seguro de ingresos por incapacidad estipula pagos periódicos a los asegurados que satisfacen la definición de incapacidad contenida en la póliza. En algunos casos, la cantidad de los pagos periódicos pueden depender de si la incapacidad fue causada por enfermedad o accidente. Una persona puede dejar de ser un asegurado activo por morir, salirse, incapacitarse o por alcanzar el final del periodo de cobertura. Un modelo completo del seguro de incapacidad incorporará una variable aleatoria para el tiempo que transcurre hasta que tiene lugar la terminación, cuando el asegurado cesa de ser miembro de los asegurados activos así como una variable aleatoria para la causa de la terminación.

En la planeación de la salud pública, existe interés en el análisis de la mortalidad y la sobrevivencia en términos de la causa de la muerte. Las metas de salud pública pueden establecerse mediante un estudio de la distribución conjunta del tiempo transcurrido hasta que tiene lugar la defunción y la causa de la misma. Las prioridades de investigación cardiovascular y sobre el cáncer se establecieron mediante este tipo de análisis.

El principal propósito de este capítulo es construir una teoría para estudiar la distribución de dos variables aleatorias con respecto a una sola vida: el tiempo transcurrido hasta que tiene lugar la terminación de un estatus dado y la causa de la terminación. El modelo resultante se utiliza en cada una de las aplicaciones descritas en esta sección. Dentro de la ciencia actuarial, la terminación de un estatus determinado se denomina ***decremento*** y la materia de este capítulo se llama ***teoría de decremento múltiple***. Dentro de la bioestadística se le conoce como la ***teoría de la competencia entre riesgos***.

También es posible desarrollar la teoría de decremento múltiple en términos de tasas determinísticas y funciones de tasas. Habrá alguna recapitulación de la teoría desde este punto de vista en la Sección 9.4.

9.2 Dos Variables Aleatorias

El Capítulo 3 se dedicó en parte a los métodos para especificar y usar la distribución de la variable aleatoria continua $T(x)$, el tiempo transcurrido hasta que sobreviene la muerte de (x). Los mismos métodos pueden utilizarse para estudiar el tiempo transcurrido hasta que tiene lugar la terminación de un estatus, tal como el empleo con un determinado empleador, con sólo pequeños cambios de vocabulario. De hecho, utilizaremos la misma notación $T(x)$, o más brevemente T, para representar la variable aleatoria tiempo en este nuevo escenario.

En esta sección, ampliaremos el modelo básico al introducir una segunda variable aleatoria, causa del decremento, que se representará mediante $J(x) = J$. Supondremos que J es una variable aleatoria discreta.

Las aplicaciones de la Sección 9.1 proporcionan ejemplos de estas variables aleatorias. Para las aplicaciones de planes de indemnizaciones para empleados, se pueden asignar a la variable aleatoria J los valores 1, 2, 3 o 4 dependiendo de si la terminación se debe a salida voluntaria (rotación), incapacidad, muerte o retiro, respectivamente. En la aplicación del seguro de vida, se puede asignar a J los valores 1 o 2, dependiendo de si el asegurado muere o escoge terminar el pago de las primas. Para la aplicación del seguro de incapacidad, el asegurado muere, sale voluntariamente, se incapacita o alcanza el final del periodo de cobertura. Finalmente, en la aplicación a la salud pública, existen muchas posibles causas de decremento. Por ejemplo, en un estudio determinado, se le pueden asignar a J los valores 1, 2, 3 y 4 dependiendo de si la muerte fue causada por enfermedad cardiovascular, cáncer, accidente o todas las demás causas.

Nuestro propósito ahora es describir la distribución conjunta de T, J y las distribuciones condicionales y marginales relacionadas. Representaremos la *f.d.p.* conjunta de T y J mediante $f(t, j)$, la *f.p.* marginal de J con $h(j)$, y la *f.p.* marginal de T con $g(t)$. La Figura 9.1 ilustra estas distribuciones. Al principio pueden parecer extrañas porque, J es una variable aleatoria discreta y T es continua.

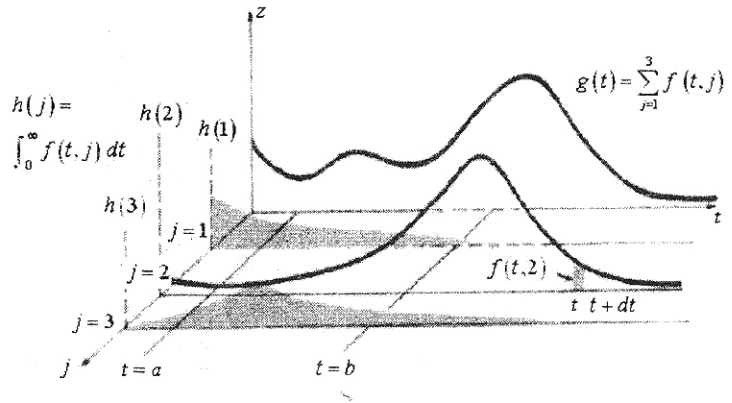


Figura 9.1 de $f(t,j)$

La *f.d.p.* conjunta de T y J, $f(t,j)$ puede dibujarse como si cayera en m sabanas paralelas, como se muestra en la Figura 9.1 para 3 causas de decremento $(m=3)$. Hay una hoja para cada una de estas m causas de decremento reconocibles en el modelo. En la Figura 9.1 son válidas las siguientes relaciones

$$\sum_{j=1}^{3} h(j)=1$$

y

$$\int_0^\infty g(t)dt=1$$

La *f.d.p.* conjunta $f(t,j)$ puede utilizarse en la forma acostumbrada para calcular las probabilidades de los eventos definidos por T y J. Por ejemplo,

$$f(t,j)dt=\Pr[t<T\le t+dt, J=j]$$
$$\Pr(a<T\le b)=\sum_{j=1}^{m}\int_a^b f(t,j)dt \qquad (9.2.1)$$

y

$$\Pr(0 < T \le t, J = j) = \int_0^t f(s,j)ds \tag{9.2.2}$$

La probabilidad de decremento antes del tiempo t debido a la causa j dada en (9.2.2) tiene el símbolo especial

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f(s,j)ds \qquad t \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,m. \tag{9.2.3}$$

El superíndice representa la causa del decremento en la teoría del decremento múltiple.

Por la definición de la distribución marginal de J, que aparece como $h(j)$ en el plano (j,z) de la Figura 9.1, tenemos

$$h(j) = \int_0^\infty f(s,j)ds = {}_\infty q_x^{(j)} \qquad j = 1,2,\ldots,m. \tag{9.2.4}$$

Esto es nuevo y no tiene contraparte en el Capítulo 3, a diferencia de la *f.d.p.* marginal de T, $g(t)$ en el plano (t,z) de la Figura 9.1. Para $g(t)$, y la *f.d.*, $G(t)$, tenemos para $t \ge 0$

$$g(t) = \sum_{j=1}^{m} f(t,j) \tag{9.2.5}$$

y

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds$$

Las notaciones introducidas en el Capítulo 3 pueden extenderse para ser adaptada a la variable aleatoria T. Utilizando el índice (τ) para indicar que una función se refiere a todas las causas, o fuerza total, del decremento, obteniendo

$${}_tq_x^{(\tau)} = \Pr(T \le t) = G(t) = \int_0^t g(s)ds \tag{9.2.6}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = \Pr(T > t) = 1 - {}_tq_x^{(\tau)} \tag{9.2.7}$$

y

$$\begin{aligned}\mu_{x+t}^{(\tau)} &= \frac{g(t)}{1-G(t)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}{}_tq_x^{(\tau)} \\ &= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}{}_tp_x^{(\tau)} \\ &= -\frac{d}{dt}\log {}_tp_x^{(\tau)}\end{aligned} \tag{9.2.8}$$

Matemáticamente, estas funciones para la variable aleatoria T de este capítulo son idénticas a aquellas para T del Capítulo 3; la diferencia está en la interpretación que se les da en las aplicaciones.

Al igual que con las aplicaciones en los capítulos precedentes, la proposición en (9.2.1) puede analizarse condicionando la sobrevivencia en el estatus dado al tiempo t. De esta forma, tenemos

$$f(t,j)dt = \Pr[T>t]\Pr[(t<T\le t+dt)\cap(J=j)|T>t] \tag{9.2.9}$$

Por analogía con (3.2.12) esto sugiere la definición de la fuerza de decremento debido a la causa j como

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f(t,j)}{1-G(t)} = \frac{f(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} \tag{9.2.10}$$

La fuerza del decremento a la edad $x+t$ debido a la causa j tiene una interpretación de probabilidad condicional. Es el valor de la *f.d.p.* condicional conjunta de T y J a $x+t$, dado la sobrevivencia a $x+t$. Entonces (9.2.9) puede reexpresarse como

$$f(t,j)dt = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt \qquad j=1,2,...,m,\ t\ge 0 \qquad \text{(9.2.9)reformulada}$$

En palabras,

(La probabilidad conjunta de decremento entre t y $t+dt$ debido a la causa j) = (la probabilidad, ${}_tp_x^{(\tau)}$ de que (x) permanezca en el estatus dado hasta el tiempo t)
×
(la probabilidad condicional, $\mu_{x+t}^{(j)}\,dt$ de que el decremento ocurra entre t y $t+dt$ debido a la causa j, dado que el decremento no ha ocurrido antes del tiempo t.

Se sigue, al diferenciar (9.2.3) y usando (9.2.10), que

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} {}_tq_x^{(j)} \tag{9.2.11}$$

Ahora, de (9.2.6), (9.2.5) y (9.2.3)

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(\tau)} &= \int_0^t g(s)ds = \int_0^t \sum_{j=1}^{m} f(s,j)ds \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_0^t f(s,j)ds = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} \end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Se puede interpretar de inmediato que el primero y el último miembro de (9.2.12) son iguales. Combinando (9.2.8), (9.2.12) y (9.2.11), tenemos

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)} \tag{9.2.13}$$

Es decir, la fuerza total de decremento es la suma de las fuerzas de decremento debido a las m causas.

Podemos resumir las definiciones presentadas hasta aquí expresando las *f.d.p.*, conjuntas marginales y condicionales en notación actuarial y repitiendo el número de la ecuación definida:

$$f(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)} \qquad \text{(9.2.10)reformulada}$$

$$h(j) = {}_{\infty}q_x^{(j)} \qquad \text{(9.2.4)reformulada}$$

$$g(t) = {}_{t}p_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)} \qquad \text{(9.2.8)reformulada}$$

La *f.p.* condicional de J, dado el decremento al tiempo t, es

$$h(j|T=t) = \frac{f(t,j)}{g(t)} = \frac{{}_{t}p_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}}{{}_{t}p_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}}$$
$$= \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} \qquad (9.2.14)$$

Finalmente, se nota que la probabilidad de (9.2.3) puede expresarse como

$${}_{t}q_x^{(j)} = \int_0^t {}_{s}p_x^{(\tau)}\mu_{x+s}^{(j)}ds \qquad \text{(9.3)reformulada}$$

Ejemplo 9.1:

Considere un modelo de decremento múltiple con 2 causas de decremento, las fuerzas de decremento están dadas por

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{100} \qquad t \geq 0$$

$$\mu_{x+t}^{(2)} = \frac{1}{100} \qquad t \geq 0$$

Para este modelo, calcule la *f.p.* (o *f.d.p.*) para las distribuciones conjunta, marginal y condicional.

Solución:

Como

$$\mu_{x+s}^{(\tau)} = \mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} = \frac{s+1}{100}$$

La probabilidad de sobrevivencia ${}_t p_x^{(\tau)}$ es:

$$\begin{aligned} {}_t p_x^{(\tau)} &= \exp[-\int_0^t [(s+1)/100]ds] \\ &= \exp[-(t^2+2t)/200] \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

La *f.p.d.* conjunta de T y J es

$$f(t,j) = \begin{cases} \frac{t}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] & t \geq 0, j=1 \\ \frac{1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] & t \geq 0, j=2 \end{cases}$$

La *f.p.d.* marginal de T es:

$$g(t) = \sum_{j=1}^{2} f(t,j) = \frac{t+1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] \qquad t \geq 0$$

y la *f.p.d.* marginal de J es

$$h(j) = \begin{cases} \int_0^\infty f(t,1)dt & j=1 \\ \int_0^\infty f(t,2)dt & j=2 \end{cases}$$

Es bastante fácil evaluar $h(2)$. En el siguiente desarrollo, $\Phi(x)$ es la *f.d.* para la distribución normal estándar $N(0,1)$. Realizando la aplicación correspondiente tenemos:

$$h(2) = \frac{1}{100} e^{0.005} \int_0^\infty \exp[-(t+1)^2/200]dt$$
$$= \frac{1}{100} e^{0.005} \sqrt{2\pi} \cdot 10 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10} \exp[-(t+1)^2/200]dt$$

Realizando ahora un cambio de variable, $z = (t+1)/10$, obtenemos

$$h(2) = \frac{1}{10} e^{0.005} \sqrt{2\pi} \int_{0.1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)dz$$

$$= \frac{1}{10} e^{0.005} \sqrt{2\pi} [1 - \Phi(0.1)]$$
$$= 0.1159$$

Por lo tanto $h(1) = 0.8841$. Finalmente la *f.p.* condicional de J, dado el decremento en t, se deriva de (9.2.14) como

$$h(1 \mid t) = \frac{t}{t+1}$$

$$h(2 \mid t) = \frac{1}{t+1}$$

Ejemplo 9.2:

Para la distribución conjunta de T y J especificada en el Ejemplo 9.1, determine $E[T]$ y $E[T|J=2]$.

Solución:
Usando la *f.d.p.* marginal $g(t)$, tenemos

$$E[T]=\int_0^\infty t\left\{\frac{t+1}{100}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]\right\}dt$$

La integración por partes, como en el Teorema 3.1, produce

$$\begin{aligned}E[T]&=-t\cdot\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]_0^\infty+\int_0^\infty\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]dt\\&=0+100\cdot h(2)\end{aligned}$$

Por tanto

$$E[T]=11.59$$

Utilizando la *f.d.p.* condicional $f(t,2)/h(2)$, tenemos

$$E[T|J=2]=\int_0^\infty t\left\{100^{-1}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]\right\}(0.1159)^{-1}dt$$

Esta integral puede evaluarse como sigue:

$$\begin{aligned}E[T|J=2]&=E[(T+1)-1|J=2]\\&=(0.1159)^{-1}\int_0^\infty\frac{t+1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200]\,dt-1\\&=-(0.1159)^{-1}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]_0^\infty-1\\&=7.63\end{aligned}$$

El detalle de los Ejemplos 9.1 y 9.2 es que una vez que la distribución conjunta de T y J se especifica, los momentos de estas distribuciones, las distribuciones marginales y condicionales pueden ser determinadas

∇

En algunos casos, una aplicación particular puede requerir una modificación del modelo anterior. Una distribución conjunta para T, el tiempo transcurrido hasta la terminación, es inadecuada en su aplicación, en virtud de que hay un tiempo en el que no hay una probabilidad positiva de decremento.

Un ejemplo de ello es el plan de pensiones con una edad de retiro obligatoria, es decir, edad a la que todos los empleados activos restantes deben separase o retirarse de su función activa laboral. Un segundo ejemplo es el seguro de vida temporal en el que típicamente no hay pago de indemnización al salirse. Por tanto, después de que se paga una prima, ninguno de los asegurados restantes se retirará hasta que la siguiente fecha de vencimiento de la prima, en virtud de que la prima esta vigente. No intentaremos aquí extender la notación para cubrir situaciones de ese tipo. Sin embargo, en la Sección 9.7 describiremos los modelos empleados para cada uno de estos ejemplos.

La variable aleatoria K, que denota los años futuros truncados antes del decremento de (x), se define como en el Capítulo 3, el entero mayor de la variable T. La $f.p.$ conjunta de K y J esta dada por

$$\begin{aligned}\Pr[K=k,J=j] &= \Pr[k<T\le k+1,J=j]\\ &= \int_k^{k+1} {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt\\ &= {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds\\ &= {}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)} \qquad (9.2.15)\end{aligned}$$

Donde

$$q_{x+k}^{(j)} = \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds \qquad (9.2.16)$$

(Compare con (9.2.3) reformulada). La probabilidad de decremento de todas las causas entre las edades $x+k$ y $x+k+1$, dada la sobrevivencia a la edad $x+k$, se representa, con $q_{x+k}^{(\tau)}$, y se sigue que

$$\begin{aligned}q_{x+k}^{(\tau)} &= \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(\tau)}ds\\ &= \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\sum_{j=1}^{m}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds\\ &= \sum_{j=1}^{m} q_{x+k}^{(j)} \qquad (9.2.17)\end{aligned}$$

Un examen de (9.2.16) y (9.2.17) revela por qué a la teoría del decremento múltiple se le denomina también como la ***teoría de competencia entre riesgos***. La probabilidad de decremento entre las edades $x+k$ y $x+k+1$ debido a la causa j depende de ${}_sp_{x+k}^{(\tau)}$, $0 \le s \le 1$, y por tanto en todas las fuerzas componentes. Cuando se incrementan las fuerzas para otros decrementos, ${}_sp_{x+k}^{(\tau)}$ se reduce, y entonces $q_{x+k}^{(j)}$ también se disminuye.

9.3 Grupo Aleatorio de Sobrevivencia

Consideremos un grupo de $l_a^{(\tau)}$ vidas de edades a. Cada vida se supone que tiene una distribución del tiempo hasta que tiene lugar el decremento y causa del decremento especificado por la $f.d.p.$

$$f(t,j) = {}_tp_a^{(\tau)}\mu_{a+t}^{(j)} \qquad t \ge 0, j = 1,2,...,m$$

Denotemos con ${}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$, la variable aleatoria que representa al número de vidas que dejarán el grupo entre las edades x y $x+n$, $x \ge a$, de la causa j. Representaremos $E\left[{}_n\mathcal{D}_x^{(j)}\right]$ con ${}_nd_x^{(j)}$ (a semejanzas del capitulo 3), para obtener

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(j)} &= E[{}_n\mathcal{D}_x^{(j)}] \\ &= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)}\mu_{a+t}^{(j)}dt \end{aligned} \qquad (9.3.1A)$$

Como se acostumbra, si $n=1$, suprimimos los prefijos en ${}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$ y ${}_nd_x^{(j)}$. Notamos que

$${}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$$

y definimos

$${}_nd_x^{(\tau)} = E\left[{}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)}\right] = \sum_{j=1}^{m} {}_nd_x^{(j)} \qquad (9.3.1B)$$

Luego, utilizando (9.3.1A), tenemos

$$
\begin{aligned}
{}_nd_x^{(\tau)} &= l_a^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_o^{(\tau)} \mu_{a+t}^{(j)} dt \\
&= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_{a+t}^{(\tau)} dt
\end{aligned}
\tag{9.3.2}
$$

Si $\mathscr{L}^{(\tau)}(x)$ está definida como la variable aleatoria igual al número de sobrevivientes a la edad x fuera de las $l_a^{(\tau)}$ vidas del grupo original a la edad a, luego por analogía con (3.3.1) podemos escribir

$$
\begin{aligned}
l_x^{(\tau)} &= E[\mathscr{L}^{(\tau)}(x)] \\
&= l_a^{(\tau)} \cdot {}_{x-a}p_a^{(\tau)}
\end{aligned}
\tag{9.3.3}
$$

Podemos reexpresar (9.3.1) para el caso $n=1$ y con $s=t-(x-a)$, como

$$
d_x^{(j)} = l_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_{s+x-a}p_a^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds
$$

Luego, mediante el uso de (9.3.3) y (9.2.16),

$$
\begin{aligned}
d_x^{(j)} &= l_a^{(\tau)} \, {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds \\
&= l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}
\end{aligned}
\tag{9.3.4}
$$

Este resultado nos permite desplegar una tabla de los valores de $p_x^{(\tau)}$ y $q_x^{(j)}$ en una tabla con valores iniciales de $l_x^{(\tau)}$ y $d_x^{(j)}$. Cualquiera de ellas se denomina ***tabla de decremento múltiple***.

Ejemplo 9.3:

Construya una tabla de valores de $l_x^{(\tau)}$ y $d_x^{(j)}$ correspondiente a las probabilidades de decremento que se dan abajo.

x	$q^{(1)}$	$q^{(2)}$
65	0.02	0.05
66	0.03	0.06
67	0.04	0.07
68	0.05	0.08
69	0.06	0.09
70	0.00	1.00

A pesar de que está diseñada para facilidad de cómputo, podría sugerir una situación de doble decremento con la causa 1 relacionada con la muerte y la 2 con el retiro. Parece ser que, en este caso, 70 es la edad obligatoria de retiro.

Solución:

Suponemos el valor arbitrario de $l_{65}^{(\tau)} = 1{,}000$ y usamos (9.3.4) como se indica abajo.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)} p_{x-1}^{(\tau)}$	$d_x^{(1)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(1)}$	$d_x^{(2)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05	0.07	0.93	1,000.00	20.00	50.00
66	0.03	0.06	0.09	0.91	930.00	27.90	55.80
67	0.04	0.07	0.11	0.89	846.30	33.85	59.24
68	0.05	0.08	0.13	0.87	753.21	37.66	60.26
69	0.06	0.09	0.15	0.85	655.29	39.32	58.98
70	0.00	1.00	1.00	0.00	557.00	0.00	557.00

Nótese, como verificación de los cálculos, que $l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$, excepto por errores de redondeo. Continuamos este ejemplo con la evaluación, de los primeros principios, de varias probabilidades:

$$ {}_2p_{65}^{(\tau)} = p_{65}^{(\tau)} p_{66}^{(\tau)} = (0.93)(0.91) = 0.8463 $$

$$ {}_2/q_{66}^{(1)} = p_{66}^{(\tau)} p_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(1)} = (0.91)(0.89)(0.05) = 0.0405 $$

$$ {}_2q_{67}^{(2)} = q_{67}^{(2)} + p_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(2)} = 0.07 + (0.89)(0.08) = 0.1412 $$

Las últimas tres columnas de la tabla anterior pueden usarse para obtener las mismas probabilidades. Las respuestas concuerdan a cuatro decimales:

$$ {}_2p_{65}^{(\tau)} = \frac{l_{67}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}} = \frac{846.30}{1000.00} = 0.8463 $$

$$ {}_{2/}q_{66}^{(1)} = \frac{d_{68}^{(1)}}{l_{66}^{(\tau)}} = \frac{37.66}{930.00} = 0.0405 $$

$$ {}_2q_{67}^{(2)} = \frac{d_{67}^{(2)} + d_{68}^{(2)}}{l_{67}^{(\tau)}} = \frac{59.24 + 60.26}{846.30} = 0.1412 $$

∇

9.4 Grupo Determinístico de Sobrevivencia

La fuerza total de decremento puede también verse como una tasa total de decremento (anual nominal) en lugar de como una probabilidad de densidad condicional. Con este enfoque, en donde suponemos un modelo continuo, un grupo de vidas $l_a^{(\tau)}$, avanza su edad sujeta a fuerzas determinísticas de decremento $\mu_y^{(\tau)}$, $y \geq a$, así el número de sobrevivientes a la edad x del grupo original de $l_a^{(\tau)}$ vidas a la edad a está dado por

$$ l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} \exp\left[-\int_a^x \mu_y^{(\tau)} dy \right] \tag{9.4.1} $$

y el decremento total entre las edades x y $x+1$ es

$$ \begin{aligned} d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} \\ &= l_x^{(\tau)} \left[1 - \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \right] \\ &= l_x^{(\tau)} \left\{ 1 - \exp\left[-\int_x^{x+1} \mu_y^{(\tau)} dy \right] \right\} \\ &= l_x^{(\tau)} [1 - p_x^{(\tau)}] \\ &= l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{9.4.2} $$

Más aún, por definición o de la diferenciación de (9.4.1), tenemos

$$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{dl_x^{(\tau)}}{dx} \tag{9.4.3}$$

Estas fórmulas son análogas a aquéllas para las tablas de vida de la Sección 3.4. Aquí $q_x^{(\tau)}$ es la tasa efectiva anual total de decremento para el año de edad x a $x+1$ equivalente a las fuerzas $\mu_y^{(\tau)}, x \le y \le x+1$.

Considérense ahora m causas de decremento y suponga que los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes a la edad x, en edades futuras estarán totalmente vacíos por estas m formas de decremento. Entonces los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes pueden verse como si cayesen dentro de subgrupos distintos $l_x^{(j)}$, $j = 1,2,...,m$; donde $l_x^{(j)}$ representa el número de los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes que terminarán a edades futuras debido a la causa j, así que

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)} \tag{9.4.4}$$

Podemos ahora definir la fuerza de decremento a la edad x debido a la causa j mediante

$$\mu_x^{(j)} = \lim_{h \to 0} \frac{l_x^{(j)} - l_{x+h}^{(j)}}{h\, l_x^{(\tau)}}$$

Donde $l_x^{(\tau)}$, no $l_x^{(j)}$ aparece en el denominador. Esto produce

$$\mu_x^{(j)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{dl_x^{(j)}}{dx} \tag{9.4.5}$$

De (9.4.3) a (9.4.5) se sigue que

$$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)} \tag{9.4.6}$$

Con un cambio de variable, la fórmula (9.4.5), puede escribirse como

$$-dl_y^{(j)} = l_y^{(\tau)} \mu_y^{(j)} dy$$

e integrando de $y = x$ a $y = x+1$ se obtiene

$$l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = d_x^{(j)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)} \mu_y^{(j)} dy \tag{9.4.7}$$

La suma sobre $j = 1, 2, \ldots, m$, produce

$$l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = d_x^{(\tau)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)} \mu_y^{(\tau)} dy \tag{9.4.8}$$

Además, al dividir la fórmula (9.4.7) por $l_x^{(\tau)}$, se tiene

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_x^{x+1} {}_{y-x}p_x^{(\tau)} \mu_y^{(j)} dy = q_x^{(j)} \tag{9.4.9}$$

Donde $q_x^{(j)}$ es la proporción de los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes a la edad x que terminan debido a la causa j antes de la edad $x+1$ cuando todas las m causas de decremento están operando.

Como fue el caso para las tablas de vida el modelo determinístico proporciona un lenguaje alternativo y marco de referencia conceptual para la teoría de decremento múltiple.

9.5 Tablas Asociadas de Decremento Simple

Para cada una de las causas de decremento reconocidas en un modelo de decremento múltiple, es posible definir un modelo de decremento simple que dependa sólo de la causa particular de decremento. Definimos las funciones asociadas del modelo de decremento simple como sigue:

$${}_t p'^{(j)}_x = \exp[-\int_0^t \mu^{(j)}_{x+s} ds\ ]$$

$${}_t q'^{(j)}_x = 1 - {}_t p'^{(j)}_x \tag{9.5.1}$$

Las cantidades tales como ${}_tq'^{(j)}_x$ se denominan ***probabilidades netas de decremento*** en bioestadística ya que son netas de otras causas de decremento. Sin embargo, se le han dado muchas otros nombres a la misma cantidad. Uno de ellos es ***tasa independiente de decremento***, escogida porque la causa j no compite con otras causas al determinar ${}_tq'^{(j)}_x$. El término que emplearemos para ${}_tq'^{(j)}_x$ es ***tasa absoluta de decremento***. El uso de la palabra tasa al describir ${}_tq'^{(j)}_x$ surge de un deseo de evitar la palabra probabilidad. El símbolo ${}_tq^{(j)}_x$ representa una probabilidad de decremento por la causa j entre las edades x y $x+t$ y demostraremos que difiere de ${}_tq'^{(j)}_x$. Además, ${}_tp'^{(j)}_x$ a diferencia de ${}_tp^{(j)}_x$, no es necesariamente una función de sobrevivencia por que no se requiere que el $\lim_{t\to\infty} {}_tp'^{(j)}_x = 0$.

Mientras

$$\int_0^\infty \mu^{(\tau)}_{x+t} dt = \infty$$

Podemos concluir de (9.2.13) sólo que

$$\int_0^\infty \mu^{(j)}_{x+t} dt = \infty$$

Para al menos una j. Pueden existir causas de decremento para las que esta integral sea finita.

Pocas veces tiene uno la oportunidad de observar la operación de un sistema de sobrevivencia aleatorio en el que opera una causa simple de decremento. En un plan de indemnizaciones de empleados, el retiro, incapacidad y terminación voluntaria hace imposible observar directamente la operación de un modelo de decremento simple para la mortalidad durante el servicio activo. En las aplicaciones de bioestadística las salidas aleatorias de observación y terminación arbitraria el periodo de estudio puede impedirnos la observación individualizada de la mortalidad operando sobre un grupo de vidas.

Como veremos en la Sección 9.6, un primer paso acostumbrado al construir un modelo de decremento múltiple es seleccionar tasas absolutas de decremento y hacer supuestos concernientes a la incidencia de los decrementos dentro de

cualquier año simple de edad para obtener probabilidades $q_x^{(j)}$. El problema opuesto de obtener tasas absolutas de las probabilidades es difícil. Involucra supuestos acerca de la incidencia de los decrementos. Estos supuestos están implícitos en el problema estadístico de estimar tasas absolutas.

En las siguientes cuatro subsecciones examinaremos un número de relaciones entre una tabla de decremento múltiple y sus tablas asociadas de decremento simple. Después veremos un número de supuestos especiales acerca de la incidencia del decremento sobre el año de edad y destacaremos algunas relaciones implícitas.

9.5.1 Relaciones Básicas

Primero, notamos que ya que

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left\{-\int_0^t [\mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} + \ldots + \mu_{x+s}^{(m)}]ds \right. $$

tenemos

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_tp'^{(i)}_x \qquad (9.5.2) $$

Este resultado no involucra alguna aproximación y requeriremos que sea válido para cualquier método utilizado para construir una tabla de decremento múltiple de un conjunto de tasas absolutas de decremento.

Comparemos ahora el tamaño de las tasas absolutas y de las probabilidades. De (9.5.2) observamos, que si alguna causa diferente de j está operando, que

$$ {}_tp'^{(j)}_x \geq {}_tp_x^{(\tau)} $$

Ello implica que

$$ {}_tp'^{(j)}_x \mu_{x+t}^{(j)} \geq {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} $$

y si estas funciones se integran con respecto a t sobre el intervalo (0,1), obtenemos

$$q'^{(j)}_x = \int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x \mu^{(j)}_{x+t} dt \geq \int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(j)}_{x+t} dt = q^{(j)}_x \tag{9.5.3}$$

La magnitud de otras fuerzas de decremento pueden causar que ${}_tp'^{(j)}_x$ sea considerablemente mayor que ${}_tp^{(\tau)}_x$ y por tanto pueden existir las correspondientes diferencias para un modelo de decremento simple asociado.

9.5.2 Tasas Centrales de Decrementos Múltiples

Para introducir esta función retornamos a la tabla de mortalidad y recordamos que la tasa central de mortalidad, o tasa central de fallecimiento a la edad x, representada por m_x, y definida en la fórmula (3.5.9) por

$$m_x = \frac{\int_0^1 {}_tp_x \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_tp_x dt} = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{d_x}{L_x} \tag{9.5.4}$$

Esta, m_x es un promedio ponderado de la fuerza de mortalidad entre las edades x y $x+1$, esto justifica la tasa central. Dichas tasas centrales pueden definirse en un contexto de decremento múltiple. La ***tasa central de decremento de todas las causas*** se define mediante

$$m^{(\tau)}_x = \frac{\int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(\tau)}_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x dt} \tag{9.5.5}$$

y es un promedio ponderado de $\mu_{x+t}^{(\tau)}$, $0 \le t < 1$. En forma similar, la ***tasa central de decremento de la causa*** j es

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} dt} \tag{9.5.6}$$

y es una promedio ponderado de $\mu_{x+t}^{(j)}$, $0 \le t < 1$. Claramente

$$m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} m_x^{(j)}$$

La tabla de decremento simple asociado a la tasa central correspondiente, esta dada por

$$m'^{(j)}_x = \frac{\int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x dt} \tag{9.5.7}$$

Esta es también un promedio ponderado de $\mu_{x+t}^{(j)}$ sobre el mismo rango de edad, siendo ahora las ponderaciones ${}_tp'^{(j)}_x$ en lugar de ${}_tp_x^{(\tau)}$. Si la fuerza $\mu_{x+t}^{(j)}$ es constante para $0 \le t < 1$, tenemos $m_x^{(j)} = m'^{(j)}_x = \mu_{x+t}^{(j)}$. Si $\mu_{x+t}^{(j)}$ es una función creciente de t, entonces ${}_tp'^{(j)}_x$ da mayor ponderación a valores más altos que los que hace ${}_tp_x^{(\tau)}$, y $m'^{(j)}_x > m_x^{(j)}$. Si $\mu_{x+t}^{(j)}$ es una función decreciente de t, entonces $m'^{(j)}_x < m_x^{(j)}$ .Véase el Ejercicio 9.31 para un tratamiento más formal de estas proposiciones.

Las tasas centrales proporcionan un medio conveniente pero aproximado de proceder de $q'^{(j)}_x$ a la $q_x^{(j)}$, $j = 1,2,...,m$, y viceversa. Ello se ilustra en el Ejercicio 9.17.

9.5.3 Supuesto: Fuerza Constante

Examinemos los supuestos específicos respecto a la incidencia de los decrementos. Primero, usemos un supuesto de fuerza constante para cada decremento sobre cada año de edad. Ello implica

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$$

y

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_x^{(\tau)} \qquad 0 \le t < 1$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} q_x^{(j)} &= \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)} dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)} dt = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{9.5.8}$$

Pero también, bajo el supuesto de la fuerza constante,

$$\mu_x^{(\tau)} = -\log p_x^{(\tau)}$$

y

$$\mu_x^{(j)} = -\log p'^{(j)}_x$$

así que de (9.5.8)

$$q_x^{(j)} = \frac{\log p'^{(j)}_x}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} \tag{9.5.9}$$

Esta fórmula, junto con (9.5.2), puede utilizarse para calcular $q_x^{(j)}$ de los valores dados de $q'^{(j)}_x$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

La ecuación (9.5.9) puede resolverse para $q'^{(j)}_x$ para dar

$$q'^{(j)}_x = 1 - [1 - q_x^{(\tau)}]^{(q_x^{(j)} / q_x^{(\tau)})} \tag{9.5.10}$$

Este resultado es útil para obtener tasas absolutas para un conjunto dado de probabilidades de decremento. Nótese que para (9.5.9) y (9.5.10) se requiere un tratamiento especial si $p'^{(j)}_x$ o $p^{(\tau)}_x$ son igual a 0.

9.5.4 Supuesto de Distribución Uniforme para Decrementos Múltiples

La fórmula (9.5.10) es válida bajo un supuesto alternativo, es decir, que cada uno de los decrementos en un contexto de decrementos múltiples tiene una distribución uniforme en cada año de edad. Por lo tanto suponemos que

$$ {}_tq^{(j)}_x = tq^{(j)}_x \qquad j = 1,2,...,m \qquad 0 \le t \le 1 $$

y asumiendo que

$$ {}_tq^{(\tau)}_x = 1 - {}_tp^{(\tau)}_x = t \cdot q^{(\tau)}_x $$

También, bajo el supuesto dado, observamos de (9.2.11)

$$ {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(j)}_{x+t} = q^{(j)}_x \tag{9.5.11} $$

y

$$ \mu^{(j)}_{x+t} = \frac{q^{(j)}_x}{{}_tp^{(\tau)}_x} = \frac{q^{(j)}_x}{1 - t\, q^{(\tau)}_x} $$

Entonces

$$ \begin{aligned} q'^{(j)}_x &= 1 - \exp\left[-\int_0^1 \mu^{(j)}_{x+t} dt \right] \\ &= 1 - \exp\left[-\int_0^1 \frac{q^{(j)}_x}{1 - t q^{(\tau)}_x} dt \right] \\ &= 1 - \exp\left[\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x} \log(1 - q^{(\tau)}_x) \right] \end{aligned} $$

La cual es la fórmula (9.5.10). De la fórmula (9.5.9), ahora se resuelve $q_x^{(j)}$. El Ejercicio 9.21 proporciona conocimientos adicionales sobre la vinculación entre los desarrollos de las secciones 9.5.3 y 9.5.4.

Ejemplo 9.4:

Continúe el Ejemplo 9.3 evaluando $q'^{(1)}_x$ y $q'^{(2)}_x$ mediante (9.5.10).

Solución:

Mediante (9.5.10), se obtienen los siguientes resultados

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$
65	0.02	0.05	0.02052	0.05052
66	0.03	0.06	0.03095	0.06094
67	0.04	0.07	0.04149	0.07147
68	0.05	0.08	0.05215	0.08213
69	0.06	0.09	0.06294	0.09291
70	0.00	1.00		

A la edad de 70, las tasas dependen del retiro obligatorio y no existe ninguna necesidad especial para $q'^{(1)}_{70}$, $q'^{(2)}_{70}$ a pesar de que podrían identificarse, respectivamente, usando $q_{70}^{(1)}$ y $q_{70}^{(2)}$.

9.6 Construcción de una Tabla de Decremento Múltiple

Al construir un modelo de decremento múltiple es mejor que los datos, incluyendo los de la edad y causa del decremento para la población bajo estudio, puedan utilizarse para estimar directamente las probabilidades $q_x^{(j)}$. Los planes de beneficios establecidos para empleados a largo plazo, pueden contener tal tipo de datos. Por lo que se refiere a otros planes, esos datos, con frecuencia, no están disponibles. La alternativa es construir el modelo a partir de las tasas de decremento simple asociada, que se supongan apropiadas para la población bajo estudio. La adecuación del modelo tendría entonces que probarse mediante la revisión de los datos a medida que ellos estén disponibles.

Una vez que se hayan seleccionado tablas asociadas de decremento simple, pueden utilizarse los resultados de la Sección 9.5 para completar la construcción de la tabla de decremento múltiple. La disponibilidad de un conjunto de $p'^{(j)}_x$, para $j=1,2,...,m$ y para todos los valores de x, permitirá el cómputo de $p^{(\tau)}_x$ mediante (9.5.2) y de $q^{(\tau)}_x$ mediante $q^{(\tau)}_x = 1 - p^{(\tau)}_x$.

El paso restante es partir $q^{(\tau)}_x$ en sus componentes $q^{(j)}_x$ para $j=1,2,...,m$. Ya sea que se adopte para el modelo el supuesto de la fuerza constante o el de la distribución uniforme, puede usarse (9.5.9) para el cálculo de las $q^{(j)}_x$.

Ejemplo 9.5:

Utilice (9.5.2) y (9.5.9) para obtener la tabla de decremento múltiple correspondiente a las tasas absolutas de decremento que se dan abajo. Se supone que el actuario ha examinado las características del grupo participante y ha decidido que las tablas asociadas de decremento simple que dan como resultado estas tasas son apropiabas para el grupo bajo estudio. También se supone que la causa 3 es el retiro, que puede ocurrir entre las edades de 65 y 70, y que este es obligatorio a los 70.

x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
65	0.020	0.02	0.04
66	0.025	0.02	0.06
67	0.030	0.02	0.08
68	0.035	0.02	0.10
69	0.040	0.02	0.12

Solución:
La siguiente tabla contiene los resultados del cálculo de las probabilidades de decremento. La fórmula (9.5.2) puede reescribirse como

$$q^{(\tau)}_x = 1 - \prod_{j=1}^{3} (1 - q'^{(j)}_x)$$

mientras que (9.5.9) y la condición de retiro obligatorio, proporcionan las probabilidades. La tabla de decremento múltiple se construye como en el Ejemplo 9.3

x	$q_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
65	0.07802	0.01940	0.01940	0.03921	1000.00	19.40	19.40	39.21
66	0.10183	0.02401	0.01916	0.05867	921.99	22.14	17.67	54.09
67	0.12545	0.02851	0.01891	0.07803	828.09	23.61	15.66	64.62
68	0.14887	0.03290	0.01866	0.09731	724.20	23.83	13.51	70.47
69	0.17210	0.03720	0.01841	0.11649	616.39	22.93	11.35	71.80
70	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000	510.31	0.00	0.00	510.31

∇

Ya se indicó que (9.5.9) y (9.5.10) no se utilizarían si $p'^{(j)}_x$ o $p^{(\tau)}_x = 0$. En este caso será necesario emplear un recurso alternativo. Un método, que maneje esta indeterminación y por sí mismo conduzca a ajustes especiales, basado en distribuciones de decremento asumidas en las tablas asociadas de decremento simple, más que en supuestos acerca de probabilidades de decremento múltiple como las de la Sección 9.5.4. Primero examinaremos un supuesto de distribución uniforme del decremento (en cada año de edad) para cada una de estas tablas. Restringiremos nuestra atención a situaciones con 3 decrementos, pero el método y las fórmulas pueden extenderse fácilmente para $m > 3$. Bajo el supuesto establecido,

$$ {}_tp'^{(j)}_x = 1 - tq'^{(j)}_x \qquad j = 1,2,3; \quad 0 \le t \le 1 \tag{9.6.1} $$

y

$$ {}_tp'^{(j)}_x \, \mu^{(j)}_{x+t} = \frac{d}{dt}(-{}_tp'^{(j)}_x) = q'^{(j)}_x \tag{9.6.2} $$

Se sigue que

$$ \begin{aligned} q^{(1)}_x &= \int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(1)}_{x+t} dt \\ &= \int_0^1 {}_tp'^{(1)}_x \mu^{(1)}_{x+t} \, {}_tp'^{(2)}_x \, {}_tp'^{(3)}_x \, dt \\ &= q'^{(1)}_x \int_0^1 (1 - tq'^{(2)}_x)(1 - tq'^{(3)}_x) dt \\ &= q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2}[q'^{(2)}_x + q'^{(3)}_x] + \frac{1}{3} q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x \right] \end{aligned} \tag{9.6.3} $$

Fórmulas similares son válidas para $q^{(2)}_x$, $q^{(3)}_x$ y puede verificarse que

$$ \begin{aligned} & q^{(1)}_x + q^{(2)}_x + q^{(3)}_x = q'^{(1)}_x + q'^{(2)}_x + q'^{(3)}_x \\ & -[q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(3)}_x + q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x] + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x \\ & = 1 - [1 - q'^{(1)}_x][1 - q'^{(2)}_x][1 - q'^{(3)}_x] = q^{(\tau)}_x \end{aligned} \tag{9.6.4} $$

Ejemplo 9.6:
Obtenga las probabilidades de decremento para las edades 65 a 69 a partir de los datos del Ejemplo 9.5, bajo el supuesto de una distribución uniforme del decremento en cada año de edad, para cada una de las tablas asociadas de decremento simple.

Solución:
Esta es una aplicación de (9.6.3).

x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$	$q^{(1)}_x$	$q^{(2)}_x$	$q^{(3)}_x$
65	0.020	0.02	0.04	0.01941	0.01941	0.03921
66	0.025	0.02	0.06	0.02401	0.01916	0.05866
67	0.030	0.02	0.08	0.02852	0.01892	0.07802
68	0.035	0.02	0.10	0.03292	0.01867	0.09727
69	0.040	0.02	0.12	0.03723	0.01843	0.11643

Estas probabilidades son muy parecidas a las que se obtuvieron mediante (9.5.9) y que se muestran en el Ejemplo 9.5.

∇

Concluimos esta sección con otro ejemplo que ilustra el uso de una distribución especial para uno de los decrementos. En ocasiones se requiere de distribuciones especiales debido a las características de la situación que se representa en el modelo.

Ejemplo 9.7:

Considere una situación con 3 causas de decremento: mortalidad, incapacidad y rotación. Suponga que la mortalidad y la incapacidad están distribuidas uniformemente para cada año de edad en las tablas asociadas de decremento simple con tasas absolutas de $q'^{(1)}_x$ y $q'^{(2)}_x$, respectivamente. Aún más, suponga que las salidas ocurren sólo al final del año con una tasa absoluta de $q'^{(3)}_x$.

a) Proporcione fórmulas para las probabilidades de decremento para la edad x a $x+1$ para las 3 causas.

b) Reformule las probabilidades bajo los supuestos de que en el modelo de decremento simple asociado, las salidas ocurren sólo a la mitad o al final del año de edad en proporciones iguales, esto es $(1/2)q'^{(3)}_x$ de los que empiezan el año salen a la mitad y al final del año.

Advertencia:
Hasta ahora nuestro modelo de decremento múltiple ha sido totalmente continuo, excepto posiblemente para reconocer una edad obligatoria de retiro. Mas aún, nuestra teoría empezó con un modelo de decremento múltiple y después de definir las fuerzas $\mu_{x+t}^{(j)}$, $j=1,2,...,m$ se procedió a construir tablas asociadas de decremento simple. En este ejemplo estamos iniciando con las tablas de decremento simple, y en una de estas tablas el decremento se da en forma discreta al final de los intervalos establecidos. No debemos intentar definir una fuerza de decremento para este caso discreto, sino que procederemos mediante métodos directos a construir, a partir de las tablas de decremento simple, un modelo de decremento múltiple que posee las relaciones (9.2.17) y (9.5.2) establecidas en nuestra teoría anterior.

Solución:
a) En la Figura 9.2A se exhiben los factores de sobrevivencia para las tablas de decremento simple dadas y para una tabla de decremento múltiple en donde

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp'^{(1)}_x \, {}_tp'^{(2)}_x \, {}_tp'^{(3)}_x $$

para $t \geq 0$ no enteros. Para $t=1$, ${}_tp'^{(3)}_x$ y ${}_tp_x^{(\tau)}$ son discontinuos, así que consideramos

$$ \lim_{t \to 1^-} {}_tp_x^{(\tau)} = p'^{(1)}_x \; p'^{(2)}_x 1 $$

y

$$ p_x^{(\tau)} = p'^{(1)}_x \; p'^{(2)}_x (1 - q'^{(3)}_x) $$

También requeriremos, para nuestra tabla de decremento múltiple, establecer

$$ q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 1 - p'^{(1)}_x \; p'^{(2)}_x [1 - q'^{(3)}_x] $$

Establecer

$$ q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt = \int_0^1 {}_tp'^{(1)}_x \, {}_tp'^{(2)}_x (1) \mu_{x+t}^{(1)} dt $$

$$ = q'^{(1)}_x \int_0^1 [1 - t q'^{(2)}_x] dt $$

$$ = q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(2)}_x \right] $$

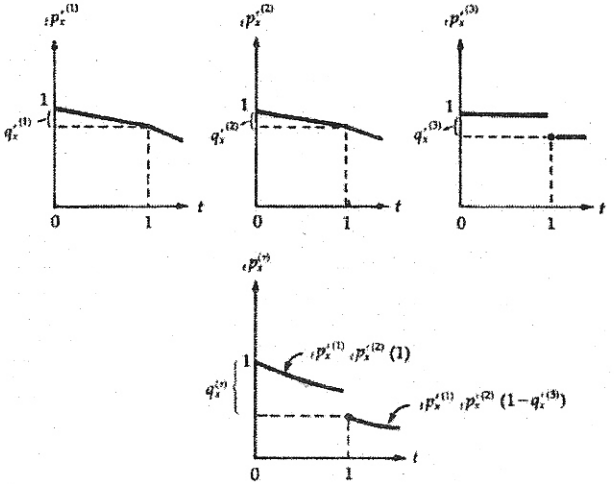


Figura 9.2 Factores de Sobrevivencia ${}_tp'^{(j)}_x \; j=1,2,3$ y ${}_tp^{(\tau)}_x$

Igualmente, establecemos que

$$q^{(2)}_x = q'^{(2)}_x \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(1)}_x\right]$$

Luego

$$q^{(3)}_x = q^{(\tau)}_x - [q^{(1)}_x + q^{(2)}_x]$$

$$= 1 - p'^{(1)}_x \, p'^{(2)}_x [1 - q'^{(3)}_x] - q'^{(1)}_x - q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x \, q'^{(2)}_x$$

y como

$$1 - q'^{(1)}_x - q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x = p'^{(1)}_x \; p'^{(2)}_x$$

$$q^{(3)}_x = p'^{(1)}_x \, p'^{(2)}_x \, q'^{(3)}_x$$

Nótese que

$$\lim_{t\to 1^-} {}_tp_x^{(\tau)} - \lim_{t\to 1^+} {}_tp_x^{(\tau)} = p'^{(1)}_x\, p'^{(2)}_x\, p'^{(3)}_x = q_x^{(3)}$$

Es decir, la discontinuidad en t = 1 es igual a $q_x^{(3)}$

b) Aquí ${}_tp'^{(1)}_x$ y ${}_tp'^{(2)}_x$ son iguales a la Figura 9.2.A, pero ${}_tp'^{(3)}_x$ y ${}_tp_x^{(\tau)}$ tienen ahora discontinuidades en $t = 1/2$ y $t = 1$, como se muestra en la Figura 9.2B.

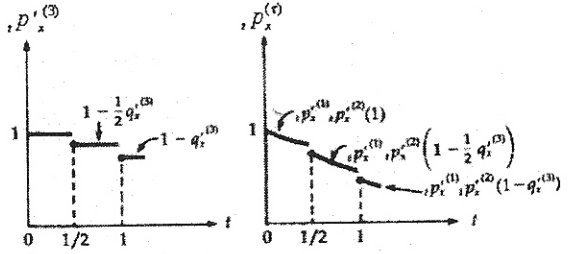


Figura 9.2B Factores de Sobrevivencia ${}_tp'^{(3)}_x$ y ${}_tp_x^{(\tau)}$

Procediendo como en (a), pero tomando en cuenta los intervalos [0,1/2) y [1/2,1), establecemos

$$q_x^{(1)} = q'^{(1)}_x \int_0^{1/2}\left[1-tq'^{(2)}_x\right]dt + q'^{(1)}_x\left[1-\frac{1}{2}q'^{(3)}_x\right] \int_{1/2}^{1}\left[1-tq'^{(2)}_x\right]dt$$

$$= q'^{(1)}_x\left[1-\frac{1}{2}q'^{(2)}_x-\frac{1}{4}q'^{(3)}_x+\frac{3}{16}q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x\right]$$

Igualmente, establecemos

$$q_x^{(2)} = q'^{(2)}_x\left[1-\frac{1}{2}q'^{(1)}_x-\frac{1}{4}q'^{(3)}_x+\frac{3}{16}q'^{(1)}_x q'^{(3)}_x\right]$$

Luego

$$q_x^{(3)} = 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)}$$

$$= 1 - p'^{(1)}_x \, p'^{(2)}_x [1 - q'^{(3)}_x] - q_x^{(1)} - q_x^{(2)}$$

Que se reduce a

$$q_x^{(3)} = q'^{(3)}_x \left[1 - \frac{3}{4} q'^{(1)}_x - \frac{3}{4} q'^{(2)}_x + \frac{5}{8} q'^{(1)}_x \, q'^{(2)}_x \right]$$

∇

Los Ejemplos 9.5 al 9.7 ilustran cómo puede el actuario construir a la medida un modelo de decremento múltiple a partir de tablas asociadas de decremento simple para ajustarlos a los propósitos que está manejando.

9.7 Primas Netas Únicas y su Evaluación Numérica

Las aplicaciones actuariales de los modelos de decremento múltiple surgen cuando el monto del pago de la indemnización depende del modo de la salida del grupo de los asegurados activos. Sea $B_{x+t}^{(j)}$ el valor de la indemnización a la edad $x+t$ para un decremento en esa edad por la causa j. Luego una prima neta única, representada con $\bar{A}$ en general, se definirá como

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \qquad (9.7.1)$$

Si $m = 1$ y $B_{x+t}^{(j)} = 1$, $\bar{A}$ se reduce a $\bar{A}_x$, que representa la prima neta única para el seguro de vida entera con pago inmediato de las reclamaciones. Para este capítulo es más apropiado el ejemplo de una estipulación de ***doble indemnización*** cuando se prevé la indemnización por fallecimiento derivada por una causa accidental. Sea $J = 1$ para el fallecimiento por causa accidental y $J = 2$ para el fallecimiento debido a otras causas, y considerando $B_{x+t}^{(1)} = 2$, $B_{x+t}^{(2)} = 1$. La prima neta única para un seguro a n - años está dada por

$$\bar{A} = 2 \int_0^n v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt + \int_0^n v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(2)} dt \qquad (9.7.2)$$

El hecho de escribir la prima neta única en forma de integral no completa la tarea de la evaluación numérica. El primer paso es partir la expresión en integrales separadas para cada uno de los años involucrados. Restringiéndonos a la primera integral, obtenemos

$$\int_0^n v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 v^s {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k+s}^{(1)} ds$$

Si ahora suponemos, como en el caso (9.5.1), que cada decremento en el contexto del decremento múltiple, tiene una distribución uniforme para cada año de edad, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^n v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (1+i)^{1-s} ds \\ &= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)}\end{aligned}$$

Aplicando un argumento similar a la segunda integral y combinándola, obtenemos

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \frac{i}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} \left(2q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(2)}\right)\right] \\ &= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)} \\ &= \overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1\,(1)} + \overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1}\end{aligned} \qquad (9.7.3)$$

Donde $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1\,(1)}$ es la prima neta única para un seguro temporal de una unidad monetaria que ampara la muerte por causas accidentales (muerte accidental) y $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$ es la prima neta única para un seguro temporal de una unidad monetaria que ampara la muerte por todas las demás causas. Aquí ${}_kp_x^{(\tau)}$ podría tomarse como la función de sobrevivencia de una tabla de mortalidad, y si los valores de $q_{x+k}^{(1)}$ estuviesen disponibles, sería innecesario desarrollar la tabla completa de doble decremento para poder calcular (9.7.3).

Este ejemplo es particularmente simple porque el monto de la indemnización no cambia en función de la edad al decremento y, en particular, no cambia en el año de edad. Para estudiar esta situación más compleja, examinemos un modelo de decremento múltiple con 2 decrementos. Para simplificar, tomamos $B_{x+t}^{(1)} = t$ y $B_{x+t}^{(2)} = 0$ para $t > 0$. En este caso,

$$\overline{A} = \int_0^\infty t\, v^t\, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 (k+s) v^s\, {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k+s}^{(1)} ds$$

Otra vez hacemos el supuesto de que cada decremento en el contexto del decremento múltiple tiene una distribución uniforme para cada año de edad, y obtenemos

$$\overline{A} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s} ds$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta} (k + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}) \qquad (9.7.4)$$

La equivalencia

$$k + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i} \cong k + \frac{1}{2}$$

puede verse como la cantidad de indemnización efectiva promedio para el año $k+1$, mientras que el término familiar t puede verse como la corrección necesaria para proporcionar el pago inmediato de las reclamaciones. El valor de (9.7.4) se logra aproximando bastante bien, mediante

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2}\, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \left(k + \frac{1}{2} \right) \qquad (9.7.5)$$

el que puede obtenerse usando la regla del punto medio para evaluar

$$\int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s}\,ds$$

En la práctica, las fórmulas tales como (9.7.5) son utilizadas ampliamente en casos donde $B_{x+t}^{(j)}$ es una función complicada, que posiblemente requiera algún grado de aproximación. Por ejemplo, si aplicamos el supuesto de distribución uniforme a la $j-esima$ integral de (9.7.1) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \int_0^1 B_{x+k+s}^{(j)} (1+i)^{1-s}\,ds$$

Usando luego la regla del punto medio, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2}\,{}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} B_{x+k+1/2}^{(j)} \tag{9.7.6}$$

Como una fórmula práctica para la evaluación de la integral.

En la Sección 9.6 hemos discutido situaciones en las que el supuesto de la distribución uniforme del decremento no era apropiado. Para tales situaciones, debieron realizarse ajustes especiales a las primas netas únicas. Reexaminaremos el Ejemplo 9.7 en el que en el modelo de decremento simple asociado para las salidas, en proporciones iguales, es decir $(1/2)q'^{(3)}_x$, de los que empiezan el año, salen a la mitad y al final del año. La prima neta única para una indemnización por salida de monto $B_{x+t}^{(3)}$ pagadera para la salida a la edad $x+t$, $t>0$, está dada por

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_x^{(\tau)} \left\{ \frac{1}{2} q'^{(3)}_{x+k} v^{1/2} B_{x+k+1/2}^{(3)} \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(1)}_{x+k}\right]\left[1 - \frac{1}{2} q'^{(2)}_{x+k}\right] \right\}$$
$$+ \frac{1}{2} q'^{(3)}_{x+k} v B_{x+k+1}^{(3)} [1 - q'^{(1)(1)}_{x+k}][1 - q'^{(2)}_{x+k}]$$

Aquí estamos tratando con la distribución del decremento en el contexto de las tablas asociadas de decremento simple, más que en el contexto de decremento múltiple. Una posible aproximación sería tomar un valor promedio del factor

de interés, tal como $v^{3/4}$, y un valor promedio de la indemnización por salida, tal como

$$\widehat{B}_{x+k} = \frac{1}{2}[B^{(3)}_{x+k+1/2} + B^{(3)}_{x+k+1}]$$

Si reemplazamos los términos del interés y del monto de la indemnización por sus promedios aritmético y geométrico, respectivamente, y después los factorizamos, la expresión para $q^{(3)}_{x+k}$ obtenida en el Ejemplo 9.7 permanece dentro del paréntesis. Por tanto,

$$\overline{A} \cong \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+3/4}\, {}_kp_x^{(\tau)} q^{(3)}_{x+k} \widehat{B}_{x+k}$$

$$= (1+i)^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x^{(\tau)} q^{(3)}_{x+k} \widehat{B}_{x+k}$$

La última expresión puede interpretarse como que proporciona una indemnización $\widehat{B}_{x+k}$ por salida de al final del año y después ajustando por $(1+i)^{1/4}$, para reconocer que, en el promedio las indemnizaciones por salida se pagan con $1/4$ de año de anticipación.

Hasta aquí sólo hemos señalado brevemente algunas de las aplicaciones actuariales de los modelos de decremento múltiple. Ejemplos adicionales, más detallados y prácticos, conforman el tema del siguiente capítulo.

Advertencia:
En este capítulo no utilizamos el formato empleado en el Capítulo 6 para establecer los problemas de determinación de las primas. Lo hicimos por brevedad. Los problemas de las primas de esta sección podrían haberse enfocado formulando una función de pérdida e invocando el principio de equivalencia.

Por ejemplo, suponga que la prima neta única $\overline{A}$ de un seguro de vida a edad (x), considera dos casos: si el fallecimiento ocurre antes de la edad r por muerte accidental se pagará pagará $2B$ y B por cualquier otra causa. Si la muerte ocurre después de la edad r, cualquiera que sea la causa, se pagará la cantidad B.

Se reconocen dos causas de decremento, $j=1$ la causa accidental y $j=2$ la causa no accidental. La función de pérdida es

$$L=\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 2Bv^T-\overline{A} & J=1 \\ Bv^T-\overline{A} & J=2 \end{array}\right\} & 0<T\le r-x \\ \\ Bv^T-\overline{A} & J=1,2 \quad T>r-x \end{cases}$$

El principio de equivalencia produce $E[L]=0$, o

$$\overline{A}=B\int_0^{r-x}v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt+B\int_0^{\infty}v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt$$

Una medida de la dispersión debida a la naturaleza aleatoria del tiempo y la causa del fallecimiento es proporciona mediante $Var[L]=E[L^2]$. Que puede verificarse para este caso,

$$Var[L]=B^2\left[3\int_0^{r-x}v^{2t}\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt+\int_0^{\infty}v^{2t}\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt\right]-\overline{A}^2$$

Para el caso general, con prima neta única dada por (9.7.1), tenemos

$$Var[L]=E[L^2]=\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\infty}\left[B_{x+t}^{(j)}\,v^t-\overline{A}\right]^2\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt$$

puede ser simplificada a

$$Var[L]=\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\infty}\left[B_{x+t}^{(j)}v^t\right]^2\,{}_tp_{x+t}^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt-\overline{A}^2 \qquad (9.7.7)$$

9.8 Notas y Referencias

Seal (1977) realizó una revisión de la historia de la teoría del decremento múltiple. Chiang (1968) desarrolló la teoría usando el lenguaje de los riesgos en competencia. La estructuración de la teoría actuarial para los modelos de decremento múltiple fue establecida por Makeham (1874). Menge (1932) y

Nesbitt y Van Eenain (1948) proporcionaron conocimientos acerca de la interpretación determinística de las fuerzas del decremento y del incremento. Bicknell y Nesbitt (1956) desarrollaron una teoría muy general para seguros individuales utilizando un modelo determinístico de decremento múltiple. Hickrnan (1964) redesarrolló esta teoría usando el lenguaje del modelo estocástico y éste proporcionó las bases para la mayor parte del presente capítulo. El análisis de las tablas de vida por causa de fallecimiento es el tema de las ponencias de Greville (1948) y Preston, Keyfiz y Schoen (1973).

9.9 Ejercicios

Sección 9.2

9.1 Sea $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$, $j = 1,2,...,m$, $t \geq 0$. Obtenga expresiones para

a. $f(t,j)$ b. $h(j)$ c. $g(t)$.

Las funciones necesarias para (a) y (c) son *f.d.p.* y la función de (b) es *f.p.* Demuestre que T y J son variables aleatorias independientes aquí.

9.2 Un modelo de decremento múltiple con 2 causas de decremento tiene fuerzas de decremento dadas por

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{1}{100-(x+t)}$$

y

$$\mu_{x+t}^{(2)} = \frac{2}{100-(x+t)} \qquad t < 100-x$$

Si $x = 50$, obtenga expresiones para

a. $f(t,j)$ b. $g(t)$ c. $h(j)$ d. $h(j|t)$.

Sección 9.3

9.3 Usando las probabilidades de decremento múltiple dadas en el ejemplo 9.3, evalúe lo siguiente:

a. ${}_3p_{65}^{(\tau)}$ b. ${}_3q_{65}^{(1)}$ c. ${}_3q_{65}^{(2)}$

9.4 Las siguientes probabilidades de decremento múltiple se aplican a estudiantes que entran al cuarto año de preparatoria.

Duración Truncada al Inicio	Probabilidad de		
	Fracaso académico $j=1$	Salida por todas las demás razones, $j=2$	Sobrevivencia durante el año académico
0	0.15	0.25	0.60
1	0.10	0.20	0.70
2	0.05	0.15	0.80
3	0.00	0.10	0.90

La generación que entra tiene 1000 miembros.

a. ¿Cuál es la esperanza del número de graduados?, ¿Cuál la varianza?

b. ¿Cuál es el número esperado de los que fracasarán en algún momento durante el programa del cuarto año?, ¿Cuál es la varianza del número de alumnos que fracasarán?

9.5 Construya una tabla de decremento múltiple sobre la base de los datos del Ejercicio 9.4 y úsela para mostrar

a. La distribución marginal de la variable aleatoria J (modo de salida), que toma diferentes valores para: el fracaso académico, salida y graduación

b. la distribución condicional del modo de terminación dado que un estudiante ha terminado en el tercer año

Sección 9.4

9.6 Dado que $\mu_x^{(1)} = 1/(a-x)$, $0 \le x < a$ y $\mu_x^{(2)} = 1$, obtenga expresiones para

a. $l_x^{(\tau)}$ b. $d_x^{(1)}$ c. $d_x^{(2)}$

Suponga que $l_0^{(\tau)} = a$

9.7 Dado $\mu_x^{(1)} = 2x/(a-x^2)$, $0 \le x < \sqrt{a}$, y $\mu_x^{(2)} = c$, $c > 0$, y $l_0^{(\tau)} = 1000$, obtenga una expresión para $l_x^{(\tau)}$.

9.8 Obtenga expresiones para las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(\tau)}$ b. $\frac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(j)}$ c. $\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)}$

Sección 9.5

9.9 Utilizando los datos del Ejercicio 9.4, y suponiendo una distribución uniforme de decrementos en el modelo de decremento múltiple, calcule una tabla de $q'^{(j)}_k \quad j=1,2 \quad k=0,1,2,3$ (en donde k es la duración truncada).

9.10 Si $\mu^{(1)}_{x+t}$ es una constante c para $o<t<1$, obtenga expresiones en términos de c y ${}_tp_x^{(\tau)}$ para

a. $q'^{(1)}_x$ b. $m_x^{(1)}$ c. $q_x^{(1)}$

9.11 Bajo el supuestos de una distribución uniforme de los decrementos, demuestre

a. $m_x^{(\tau)} = \dfrac{q_x^{(\tau)}}{1-(1/2)q_x^{(\tau)}}$ b. $m_x^{(j)} = \dfrac{q_x^{(j)}}{1-(1/2)q_x^{(\tau)}}$

c. $m'^{(j)}_x = \dfrac{q'^{(j)}_x}{1-(1/2)q'^{(j)}_x}$

y recíprocamente,

d. $q_x^{(\tau)} = \dfrac{m_x^{(\tau)}}{1+(1/2)m_x^{(\tau)}}$ e. $q_x^{(j)} = \dfrac{m_x^{(j)}}{1+(1/2)m_x^{(\tau)}}$

f. $q'^{(j)}_x = \dfrac{m'^{(j)}_x}{1+(1/2)m'^{(j)}_x}$

9.12 Ordene en términos de magnitud. Enuncie sus razones.

$$q'^{(j)}_x,\ q_x^{(j)},\ m'^{(j)}_x$$

9.13 Dado que, para una tabla de doble decremento, $q'^{(1)}_{40}=0.02$ y $q'^{(2)}_{40}=0.04$, calcule $q_{40}^{(\tau)}$ hasta cuatro decimales.

9.14 Para una tabla de doble decremento, dado que $m_{40}^{(\tau)} = 0.2$ y $q'^{(1)}_{40} = 0.1$. Calcule $q'^{(2)}_{40}$ hasta cuatro decimales suponiendo

a. una distribución uniforme de los decrementos en el modelo de decremento múltiple

b. una distribución uniforme de los decrementos en las tablas asociadas de decremento simple.

9.15 Usando los datos del Ejercicio 9.4 y suponiendo una distribución uniforme de los decrementos en el modelo de decremento múltiple, construya una tabla de $m_k^{(j)}$, $j = 1,2$ $k = 0,1,2,3$ (en donde k es la duración truncada). Calcule cada resultado hasta cinco decimales.

9.16 Dado que el decremento puede deberse a muerte (causa:1), incapacidad (causa:2) o retiro (causa:3), use (9.5.9) para construir una tabla de decremento múltiple con base en las siguientes tasas absolutas:

Edad x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
62	0.020	0.030	0.200
63	0.022	0.034	0.100
64	0.028	0.040	0.120

9.17 Recalcule la tabla de decremento múltiple a partir de las tasas absolutas de decremento del ejercicio anterior mediante el ***puente de la tasa central***. [Sugerencia: para usar el puente de la tasa central calcule primero $m'^{(j)}_x$ mediante la fórmula

$$m'^{(j)}_x \cong \frac{q'^{(j)}_x}{1-(1/2)q'^{(j)}_x} \qquad j = 1,2,3$$

que es válida si existe una distribución uniforme del decremento en las tablas asociadas de decremento simple. En seguida, suponga $m_x^{(j)} \cong m'^{(j)}_x$ $j = 1,2,3$, y proceda obtener $q_x^{(j)}$ mediante

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)} - (1/2)d_x^{(\tau)} + (1/2)d_x^{(\tau)}} = \frac{m_x^{(j)}}{1+(1/2)m_x^{(\tau)}}$$

Esta segunda relación es válida si existe una distribución uniforme del decremento total en la tabla de decremento múltiple. Pero entonces

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{(\tau)} &= 1 - tq_x^{(\tau)} \neq {}_tp'^{(1)}_x \, {}_tp'^{(2)}_x \, {}_tp'^{(3)}_x \\
&= [1 - tq'^{(1)}_x][1 - tq'^{(2)}_x][1 - tq'^{(3)}_x]
\end{aligned}
$$

Bajo la condición de una distribución uniforme de las tablas de decremento simple. Notamos la inconsistencia, de los estados de condición, para calcular la ocurrencia que tenemos en propósito]

9.18 Indique argumentos para las siguientes relaciones:

a. $m'^{(j)}_x \cong m_x^{(j)}$

b. $\dfrac{q'^{(j)}_x}{1-(1/2)q'^{(j)}_x} \cong \dfrac{q_x^{(j)}}{1-(1/2)q'^{(\tau)}_x}$

Demuestre que estas conducen a

c. $q_x^{(j)} \cong \dfrac{q'^{(j)}_x[1-(1/2)q_x^{(\tau)}]}{1-(1/2)q'^{(j)}_x}$

d. $q'^{(j)}_x \cong \dfrac{q_x^{(j)}}{1-(1/2)(q_x^{(\tau)} - q_x^{(j)})}$

Compare (c) y (d) con (9.5.9) y (9.5.10).

9.19 Utilice los valores de $q_x^{(j)}, q'^{(j)}_x$ del Ejemplo 9.4 para calcular valores de $m_x^{(j)}, m'^{(j)}_x$, $j = 1,2$, $x = 65,\ldots,69$, bajo supuestos apropiados de distribución uniforme de los decrementos (véase el Ejercicio 9.11).

9.20 ¿Cuál de las siguientes proposiciones aceptaría usted?

a. $q_x^{(j)} \cong \dfrac{m_x^{(j)}}{1+(1/2)m_x^{(j)}}$

b. $\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt \cong \dfrac{l_x^{(\tau)}}{1+(1/2)m_x^{(\tau)}}$

c. si $q_x^{(1)} \cong q'^{(1)}_x(1-(1/2)q'^{(2)}_x)$ es una tabla de decremento doble en donde existe una distribución uniforme del decremento para la edad x a $x+1$ para cada una de las tablas asociadas de decremento simple.

9.21 a. Para una cierta edad, la causa particular del decremento j y K_j constante, demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) ${}_tq_x^{(j)} = k_j\,{}_tq_x^{(\tau)} \qquad 0 \le t \le 1$

(ii) $\mu_{x+t}^{(j)} = K_j \mu_{x+t}^{(\tau)} \qquad 0 \le t \le 1$

(iii) $1 - {}_tq'^{(j)}_x = [1 - {}_tq_x^{(\tau)}]^{K_j} \qquad 0 \le t \le 1$

[Sugerencia: Demuestre (i) => (ii) => (iii) => (i)]

b. Verifique que, en una tabla de decremento múltiple, en donde, ya sea

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)} \qquad 0 \le t \le 1,\ j = 1,2,...,m$$

(el supuesto de la fuerza constante para cada causa de decremento) o

$${}_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)} \qquad 0 < t < 1 \quad j = 1,2,...,m$$

(la distribución uniforme para cada causa de decremento), entonces

$${}_tq_x^{(j)} = K_j\,{}_tq_x^{(\tau)} \qquad 0 < t < 1 \quad j = 1,2,...,m$$

Sección 9.6

9.22 Vuelva a realizar el Ejercicio 9.9 mediante el uso de la fórmula para $q'^{(j)}_x$ del Ejercicio 9.18.

9.23 Demuestre que $\mu_{x+1/2}^{(j)} = m_x^{(j)}$ bajo el supuesto de una distribución uniforme de cada decremento para cada año de edad en un contexto de decremento múltiple.

9.24 ¿Cómo procedería para construir una tabla de decremento múltiple si las tasas dadas fuesen

a. $q'^{(1)}_x, q'^{(2)}_x, q_x^{(3)}$

b. $q'^{(1)}_x, q_x^{(2)}, q_x^{(3)}$

9.25 En el Ejemplo 9.6 suponga que el decremento 3 a la edad 69 no está distribuido uniformemente sino que sigue el patrón.

$${}_tp_{69}^{\prime(3)} = \begin{cases} 1 - 0.12t & 0 < t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

En palabras, la tasa absoluta de la causa 3 es 0.12 durante el año. Después, justo antes de la edad 70, todos los sobrevivientes restantes terminan debido

a la causa 3. Esto es consistente con el supuesto de que $q'^{(3)}_{69} = 1$. ¿Entonces cuál es el valor de $q^{(3)}_{69}$?

9.26 En una tabla de doble decremento en la que la causa 1 es la muerte y la 2 es la salida, supongamos que los

- Fallecimientos en el año de la edad h a la $h+1$ están distribuidos uniformemente,
- Las salidas en el año de la edad h a la $h+1$ ocurren inmediatamente después de alcanzar la edad h. En esta tabla se nota que a la edad 50, $l^{(r)}_{50} = 1000$, $q^{(2)}_{50} = 0.2$ y $d^{(1)}_{50} = 0.06 d^{(2)}_{50}$. Determine $q'^{(1)}_{50}$.

Sección 9.7

9.27 Unos empleados toman un plan de indemnización a la edad de 20 años. Si un empleado permanece en servicio hasta la edad de retiro obligatorio, 70 años, el miembro recibe una pensión anual equivalentes a 300 veces los años de servicio. Si el empleado muere en servicio antes del retiro obligatorio, se le paga al beneficiario 20,000 inmediatamente. Si el empleado se sale antes del retiro obligatorio por cualquier razón excepto por fallecimiento, el miembro recibe una anualidad vitalicia diferida, que empieza a la edad de 70 años, con un ingreso anual equivalente a 300 veces los años de servicio. Establezca una expresión, en términos de integrales y anualidades continuas, para el valor presente actuarial de estas indemnizaciones para un empleado de 30 años de edad

Misceláneos

9.28 Con base en una tabla de decremento triple, ¿Cuál es la probabilidad de que (20) no termine antes de los (65) años de edad debido a la causa 2?

9.29 a. Se le proporcionan $q'^{(1)}_x, q'^{(2)}_x, m^{(3)}_x, m^{(4)}_x$. ¿Cómo procedería usted a construir una tabla de decremento múltiple en la que el servicio activo de un grupo de empleados está sujeto a decremento por muerte (causa:1), por salida (causa:2), incapacidad (causa:3), y retiro (Causa:4)?

b. Con base en la tabla de (a), proporcione una expresión para la probabilidad de que en el futuro, un miembro activo de edad (y) no se retirará sino que terminará sus servicios por cualquier otra causa.

9.30 Pruebe e interprete la relación

$$q_x^{(j)} = q'^{(j)}_x - \sum_{k \neq j} \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(k)} {}_{1-t} q'^{(j)}_{x+t} \, dt$$

9.31 Sea

$$\omega^{(\tau)}(t) = \frac{{}_t p_x^{(\tau)}}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt}$$

y

$$\omega^{(j)}(t) = \frac{{}_t p'^{(j)}_x}{\int_0^1 {}_t p'^{(j)}_x \, dt}$$

Suponga que j y al menos alguna otra causa tienen fuerzas positivas de decremento sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$

a. Demuestre que

(i) $\omega^{(\tau)}(0) > \omega^{(j)}(0)$

(ii) $\omega^{(\tau)}(1) < \omega^{(j)}(1)$

(iii)existe un número único r, $0 < r < 1$, tal que $\omega^{(\tau)}(r) < \omega^{(j)}(r)$

B. Sea

$$-I = \int_0^r [\omega^{(j)}(t) - \omega^{(\tau)}(t)] dt$$

Demuestre que

$$I = \int_r^1 [\omega^{(j)}(t) - \omega^{(\tau)}(t)] dt$$

c. Suponga que $\mu_{x+t}^{(j)}$ es una función creciente en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Utilice el teorema del valor medio para integrales para establecer las siguientes desigualdades:

$$m'^{(j)}_x - m_x^{(j)} = \int_0^1 [\omega^{(j)}(t) - \omega^{(\tau)}(t)] \mu_{x+t}^{(j)} dt$$

$$= \int_0^r [\omega^{(j)}(t) - \omega^{(\tau)}(t)] \mu_{x+t}^{(j)} dt$$

$$+\int_r^{t_1}[\omega^{(j)}(t)-\omega^{(r)}(t)]\mu_{x+t}^{(j)}dt$$

$$=-\mu_{x+t_0}^{(j)}I+\mu_{x+t_1}^{(j)}I \qquad 0<t_0<r<t_1<1$$

$$=I(\mu_{x+t_1}^{(j)}-\mu_{x+t_0}^{(j)})>0$$

9.32 La distribución conjunta de T y J se especifica mediante

$$\left.\begin{aligned}\mu_{x+t}^{(1)}&=\frac{\theta t^{\alpha-1}e^{-\beta t}}{\int_t^{\infty}s^{\alpha-1}e^{-\beta s}ds}\\ \mu_{x+t}^{(2)}&=\frac{(1-\theta)t^{\alpha-1}e^{-\beta t}}{\int_t^{\infty}s^{\alpha-1}e^{-\beta s}ds}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&0<\theta<1\\&\alpha>0\\&\beta>0\\&t\geq 0\end{aligned}$$

a. Obtenga expresiones para $f(t,j)$, $h(j)$ y $g(t)$ la *f.d.p.* conjunta de T y J, la *f.p.* de J y la *f.d.p.* de T.

b. Exprese $E[T]$ y $Var[T]$ en términos de α y β.

c. El seguro de (x) estipula una indemnización de 1 si el decremento es debido a la causa 1 y una indemnización de 0 si el decremento es debido a la causa 2. La fuerza de interés es δ.

(i) Muestre la función de pérdida asociada con este seguro si es que el fondo se hace mediante una prima única representada por $\bar{A}$.

(ii) Utilice el principio de equivalencia y obtenga una expresión para $\bar{A}$.

(iii) Obtenga una fórmula para la varianza de la función de pérdida de (i).

TEORIA DE VALUACIÓN PARA PLANES DE PENSIONES

10.1 Introducción

Dentro del trabajo actuarial el uso de los modelos de decremento múltiple en los planes de pensión es una de sus importantes aplicaciones. En este capítulo consideraremos los métodos básicos utilizados para calcular los valores presentes actuariales de los beneficios del participante en un plan de pensión así como de sus contribuciones al mismo. Los participantes en el plan citado pueden ser los empleados de un sólo patrón, o de un grupo de patrones con actividades similares. Un plan de retiro, proporciona típicamente pensiones por edad y servicio o por incapacidad. Para el caso en que hay separación del empleo puede haber ya sea, un reembolso de las contribuciones acumuladas por el empleado, o bien, una pensión diferida. Cuando el fallecimiento ocurre antes de las otras contingencias, puede pagarse al beneficiario un ingreso o suma global única. A los pagos que se realizan para cubrir los costos de los beneficios se les denomina contribuciones, no primas como en el seguro, y son pagaderas en diversas proporciones por los participantes y el patrocinador del plan.

Un plan de pensión puede ser visto como un sistema para comprar anualidades vitalicias diferidas (pagaderas durante el retiro) y ciertos beneficios subsidiarios mediante alguna forma de anualidad temporal de contribuciones durante el servicio activo. El balance entre los valores presentes actuariales de los beneficios y los de las contribuciones puede hacerse sobre una base individual, pero con más frecuencia se realiza sobre alguna base agregada para todo el grupo de participantes. Los métodos para lograr este balance constituyen el contenido de la teoría de los fondos de pensión. Con respecto a un participante típico, en este apartado estaremos preocupados sólo con la valuación por separado de los valores presentes actuariales de los beneficios y de las contribuciones del plan de pensión. Los valores agregados podrán obtenerse posteriormente mediante la suma sobre el total de participantes. También se presentarán aquí las herramientas básicas para la valuación de los

beneficios de un plan de pensión y de las contribuciones al mismo, pero su aplicación a los posibles métodos de suministro de fondos para un plan será diferida hasta el Capítulo 19.

10.2 Funciones básicas

Un punto de partida es una tabla de decremento múltiple (servicio) construida para representar a un grupo sobreviviente de participantes sujetos, durante los años de servicio activo, a probabilidades dadas de

- Separación del servicio,
- Muerte durante el servicio,
- Retiro por incapacidad,
- Retiro por años de servicio.

Las notaciones para estas probabilidades para el año de edad x a $x+1$ son $q_x^{(\omega)}$, $q_x^{(d)}$, $q_x^{(i)}$ y $q_x^{(r)}$, respectivamente. Estas son consistentes con las notaciones desarrolladas en el Capítulo 9. También emplearemos la función de sobrevivencia $l_x^{(\tau)}$ del Capítulo 9. Si a es la edad inicial y se le asigna a $l_a^{(\tau)}$ un valor arbitrario, tenemos

$$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}\left[1 - (q_x^{(\omega)} + q_x^{(d)} + q_x^{(i)} + q_x^{(r)})\right] = l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)}$$

Esta función puede utilizarse para evaluar expresiones tales como ${}_k p_x^{(\tau)}$, por tanto

$${}_k p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+k}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}.$$

Puede también procederse mediante un método recursivo directo, es decir,

$${}_k p_x^{(\tau)} = {}_{k-1} p_x^{(\tau)} p_{x+k-1}^{(\tau)}$$

Las fuerzas de decremento relacionadas con una tabla de servicio serán continuas para la mayoría de las edades. Se representarán mediante $\mu_x^{(\omega)}$, $\mu_x^{(d)}$, $\mu_x^{(i)}$ y $\mu_x^{(r)}$. En algunas edades pueden ocurrir discontinuidades, principalmente para la edad α, la primera edad elegible para el retiro, o en la edad límite ω después de la que ya no hay miembros activos. Generalmente supondremos que $l_\omega^{(\tau)} = 0$, pero en la que ω representa una edad de retiro obligatoria, sería apropiado suponer que $l_\omega^{(\tau)} \neq 0$ y que todos los retiros de los miembros que alcanzan la edad ω ocurren en esa edad. De lo contrario,

generalmente supondremos que los decrementos están dispersos durante cada año de edad.

Durante los primeros años de servicio, las tasas de separación tienden a ser altas y la indemnización por ese concepto puede reducirse a las contribuciones acumuladas del participante, si es que existen, considerando un interés. Después de un tiempo, por ejemplo, 5 años, las tasas de separación serán algo más bajas y el participante que se separa puede ser elegible para una pensión diferida. Si estas condiciones son válidas, podría ser necesario utilizar tasas selectas de separación para un número apropiado de años. Las condiciones para el retiro por incapacidad pueden también indicar la necesidad de una base selecta. Las modificaciones matemáticas para una base selecta son relativamente fáciles de hacer, y la teoría es más adaptable se utilizan funciones selectas. En este capítulo representaremos la edad de ingreso mediante x, pero no indicaremos en las restantes consideraciones si se aplica una tabla agregada, una selecta, o una selecta y extrema (última).

La Tabla de Servicio Ilustrativa del Anexo 2B ejemplifica una tabla de servicio para una edad de ingreso 30, la edad mínima para el retiro $\alpha = 60$, y la edad límite para servicio activo $\omega = 71$. Aquí $l_{71}^{(\tau)} = 0$.

Como se indicó anteriormente, los principales beneficios de un plan de pensión son las anualidades para los beneficiarios elegibles. Para la valuación de dicha indemnización anual, es necesario adoptar tablas de mortalidad apropiadas que diferirán si el retiro es por incapacidad o por años de servicio. Los valores de la anualidad correspondiente se indicarán por índices fijos, $\bar{a}_{x+t}^{i}$ si el retiro es por incapacidad y $\bar{a}_{x+t}^{r}$ si el retiro es debido a los años de servicio. El valor de la anualidad continua se utiliza como un medio de aproximación conveniente a la forma real del pago de pensión que normalmente será mensual, pero que puede tener condiciones particulares como pagos iniciales y finales.

Algunos planes de pensión, especialmente aquellos diseñados para los trabajadores por hora, definen las indemnizaciones como cantidades netas de ingreso por año de servicio. Otros planes definen a los beneficios como porcentajes de un salario final medio. Dichas fórmulas son utilizadas frecuentemente en los planes que involucran empleados asalariados. En estos casos, es preciso proyectar los salarios futuros para poder evaluar las indemnizaciones. Las contribuciones de patrocinador se expresan con

frecuencia como un porcentaje del salario, por lo que aquí también es importante la proyección de los salarios futuros. Para dicha proyección, definimos las siguientes funciones de salario:

$(AS)_{x+h}$ es la tasa (o valor)real de salario anual en la edad $x+h$, para un participante que ingresó en la edad x y ha alcanzado ahora la edad $x+h$;

$(ES)_{x+h+t}$ es la tasa (o valor) proyectada del salario anual para la edad $x+h+t$.

Adicionalmente, supondremos que tenemos una función de escala de salarios S_y, para usarla con estas proyecciones, tal que

$$(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h} \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}. \qquad (10.2.1)$$

Aquí la función del salario S_y no sólo refleja los incrementos al salario debido a méritos y antigüedad, sino también los incrementos causados por la inflación. Por ejemplo, en la Tabla de Servicio Ilustrativa, $S_y = s_y (1.06)^{y-30}$ en donde el factor s_y representa la progresión del salario debido a méritos individuales e incrementos en la experiencia, y el factor de acumulación de 6% es para considerar los efectos de largo plazo de la inflación y los incrementos en la productividad de todos los miembros del plan. Al igual que sucedió en el caso de la función $l_x^{(\tau)}$ puede seleccionarse arbitrariamente uno de los valores de S_y, por ejemplo, en la tabla de servicio ilustrativa, S_{30} se toma como unidad. Se supone generalmente que la función S_y es una función por etapas, con nivel constante durante cualquier año de edad dado.

Los factores requeridos para determinar los valores presentes actuariales de las indemnizaciones de los planes de pensión y de las contribuciones requeridas para respaldarlas son, el modelo de decremento múltiple, la escala de salarios, el supuesto respecto al reembolso de la inversión y un valor anual apropiado para los retiros por incapacidad y por años de servicio. En las siguientes secciones, discutiremos las fórmulas básicas para la valuación de las contribuciones de los planes de pensión y diversos tipos de indemnizaciones. A esto seguirá una reformulación en términos de funciones conmutativas de pensión.

10.3 Contribuciones

Existen dos patrones simples de contribuciones: una tasa neta por participante y un porcentaje neto del salario por participante. Para cada uno de éstos patrones evaluaremos el valor presente actuarial de las contribuciones futuras con respecto a un participante que ha alcanzado la edad $x+h$.

El valor presente actuarial de las contribuciones futuras pagadas continuamente a una tasa de c por año puede expresarse como

$$c\int_0^{\omega-x-h} v^t\ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}\,dt = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)}\,ds \tag{10.3.1}$$

El lado derecho de (10.3.1) resulta de reemplazar t por $k+s$ en donde k es un entero y $0\le s\le 1$. Si aproximamos cada integral del lado derecho mediante la fórmula del punto central, obtenemos el valor aproximado

$$c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\ v^{1/2}\ {}_{1/2}p_{x+h+k}^{(\tau)} = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{x+h}^{(\tau)} \tag{10.3.2}$$

Nótese que (10.3.2) puede obtenerse directamente al suponer que los pagos tienen lugar a la mitad de los años de edad.

Si las contribuciones se expresan como una fracción c del salario, entonces el valor presente actuarial de las contribuciones futuras con respecto a un participante que está siendo pagado corrientemente a una tasa anual de $(AS)_{x+h}$ se puede expresar como

$$c\ (AS)_{x+h}\int_0^{\omega-x-h} v^t\ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}\,dt$$

$$=\frac{c\ (AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)}\ S_{x+h+k+s}\,ds \tag{10.3.3}$$

Si se supone que la función S_y es constante para cualquier año de edad, entonces también puede eliminarse de las integrales. En adición, si aproximamos cada una de las integrales mediante la fórmula del punto central, obtenemos como el valor presente actuarial

$$\frac{c\ (AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{x+h}^{(\tau)}\ S_{x+h+k} \qquad (10.3.4)$$

Las Fórmulas (10.3.3) y (10.3.4) para el valor presente actuarial de las contribuciones puede adaptarse a variaciones de estos patrones simples como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 10.1:

Con base en la Tabla de Servicio Ilustrativa y con un interés a una tasa anual efectiva de 6%, proporcione fórmulas para el valor presente actuarial de las contribuciones futuras a un plan de pensión con respecto a un participante que actualmente tiene 50 años si la tasa de contribución:

a. es nivelada considerando 1200 unidades monetarias (u.m.)por año
b. se incrementa anualmente en 100 u.m. a partir de un nivel inicial de 1200 u.m.
c. se incrementa anualmente a una tasa compuesta del 4% a partir de un nivel inicial de 1200 u.m.

Solución:

En la Tabla de Servicio Ilustrativa $\omega = 71$, lo que determina el rango en las siguientes sumatorias.

a. $1200\sum_{k=0}^{20} v^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$

b. $100\sum_{k=0}^{20} (12+k)v^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$

c. $1200\sum_{k=0}^{20} (1.04)^{k}\ v^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$

La última expresión puede reacomodarse como

$$1200(1.04)^{-1/2}\sum_{k=0}^{20} (v')^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$$

Donde $v'=1.04/1.06$, la tasa de interés involucrada es

$$i' = \frac{1.06}{1.04} - 1 = \frac{0.02}{1.04} = 0.019$$

Ejemplo 10.2:

En un ***plan de tipo en exceso***, las indemnizaciones y contribuciones son pagaderas con respecto a los salarios en exceso de una secuencia de niveles de ingresos, es decir, $H_0, H_1, \ldots, H_k, \ldots$ donde H_k se aplica en el año futuro $k+1$. Con base en la Tabla de Servicio Ilustrativo, proporcione una fórmula para el valor presente actuarial de las contribuciones de 5% de los salarios futuros en exceso con respecto a un empleado que en la actualidad tiene 50 años de edad y un salario de 30,000 u.m. Suponga que $30{,}000 > H_0$ y que los salarios futuros permanecerán por encima del nivel de ingresos H_k, $k=1,2\ldots.$

Solución:

El valor presente actuarial requerido es

$$0.05\sum_{k=0}^{20}\left[30{,}000\frac{S_{50+k}}{S_{50}} - H_k\right] v^{k+1/2}\,{}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$$

10.4 Indemnizaciones de retiro por años de servicio

La principal indemnización de un plan de pensión es normalmente la anualidad diferida de retiro por años de servicio. En los ***planes de contribución definida***, el valor presente actuarial es simplemente la acumulación con interés de las contribuciones hechas por el participante, y la indemnización es una anualidad que puede comprarse con dicha acumulación. En dichos planes, la determinación del valor presente actuarial se logra mediante un proceso de acumulación. En otros planes, el ingreso de retiro está definido por una fórmula, y es para tales ***planes de beneficio definido*** para los que buscamos expresar los valores presentes actuariales. Ello lo haremos primero para un caso general y después se hará específicamente para algunos de los patrones más usuales de indemnizaciones definidas.

Con este propósito, introducimos la función $R(x,h,t)$ para representar la tasa de ingreso de indemnización (anual) para un empleado de edad $x+h$ que ingreso

a la edad x y quien en t años a partir de ahora a la edad $x+h+t$ es candidato para recibir indemnizaciones de ingreso inmediato o diferido. Suponemos que el ingreso permanece igual, y que en caso de retiro, por ejemplo, expresamos su valor presente actuarial al tiempo del retiro mediante $R(x,h,t)\,\overline{a}^{r}_{x+h+t}$. Debe notarse que en la Sección 9.7 las indemnizaciones eran sumas globales B_{x+h+t}, y la cantidad correspondiente aquí es el valor de la anualidad, $R(x,h,t)\,\overline{a}^{r}_{x+h+t}$, cuyo cálculo es un paso preliminar en el proceso de valuación. Podemos entonces escribir una expresión integral para el valor presente actuarial de la indemnización de retiro por años de servicio para un empleado actualmente activo en el estatus $x+h<\alpha$,

$$APV=\int_{\alpha-x-h}^{\omega-x-h} v^{t}\ {}_{t}p^{(\tau)}_{x+h}\ \mu^{(r)}_{x+h+t}\ R(x,h,t)\ \overline{a}^{r}_{x+h+t}\ dt \tag{10.4.1}$$

Al igual que en la Sección 9.7, aproximamos la integral para cálculos prácticos del valor presente actuarial. Para hacerlo, escribimos

$$APV=\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h}\int_{0}^{1} v^{s}\ {}_{s}p^{(\tau)}_{x+h+k}\ \mu^{(r)}_{x+h+k+s}\ R(x,h,k+s)\ \overline{a}^{r}_{x+h+k+s}\ ds$$

Suponiendo una distribución uniforme de los retiros para cada año de edad, podemos reescribir esto como

$$APV=\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h}\ q^{(r)}_{x+h+k}\int_{0}^{1} v^{s}\ R(x,h,k+s)\ \overline{a}^{r}_{x+h+k+s}\ ds$$

Utilizando la aproximación del punto central para las integrales restantes nos da

$$APV\cong\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h}\ q^{(r)}_{x+h+k}\ R(x,h,k+1/2)\ \overline{a}^{r}_{x+h+k+1/2} \tag{10.4.2}$$

La Fórmula (10.4.2) es la forma general mediante la cual calcularemos los valores presentes actuariales de las indemnizaciones de retiro por años de servicio.

Procederemos a considerar diversos tipos comunes de funciones de tasas de ingreso por indemnización $R(x,h,t)$. Estas se dividen en tres grupos. Primero, se tienen las funciones que no dependen de los niveles de salarios. Segundo, aquellas que dependen ya sea de la tasa final de salario o de la tasa de salario

medio de los últimos años anteriores al retiro. Y por último, las funciones que dependen del salario medio percibido durante toda la carrera de servicios con el patrocinador del plan.

10.4.1 Funciones de $R(x,h,t)$ independientes de salarios.

Consideremos un ingreso por indemnización de b veces el número total de años de servicio, incluyendo cualquier fracción final. En este caso $R(x,h,t)=b(h+t)$. Si sólo cuentan los años completos de servicio, entonces $R(x,h,t)=b(h+k)$ en donde k es el entero más grande en t. Otra variante será el aplicar una tasa menor por el servicio excedente a un número de años, por ejemplo, 30 años. En este caso, la tasa de ingresos por indemnización será

$$R(x,h,t)=\begin{cases} b_1(h+t) & h+t\le 30 \\ 30\,b_1+b_2(h+t-30) & h+t>30. \end{cases}$$

Ejemplo 10.3:

Un plan de pensión estipula una indemnización básica de 15 u.m. por mes por cada año de servicios más una indemnización suplementaria de 10 por mes de cada año de servicio, que se paga hasta la edad de 65 años. Proporcione una fórmula para el valor presente actuarial de estas indemnizaciones, considerando un participante de 40 años de edad, quien ingreso al servicio a los 30 años, suponiendo que se aplique la Tabla de Servicio Ilustrativa.

Solución:
De (10.4.2), el valor presente actuarial de la indemnización básica es

$$180\sum_{k=20}^{30} v^{k+1/2}\,{}_kp_{40}^{(\tau)}\,q_{40+k}^{(r)}\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\bar{a}_{40+k+1/2}^{r}$$

y de la suplementaria es

$$120\sum_{k=20}^{24} v^{k+1/2}\,{}_kp_{40}^{(\tau)}\,q_{40+k}^{(r)}\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\bar{a}_{40+k+1/2\,:\,\overline{25-k-1/2}|}^{r}$$

∇

Ejemplo 10.4:

Si en el ejemplo 10.3, no pueden contar con más de 35 años de servicio para la indemnización, ¿cómo se modificarán las fórmulas?

Solución:

Para la indemnización básica, la tasa de ingresos por indemnización será

$$R\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}180\left(10+k+\dfrac{1}{2}\right) & k<25\\ 6300 & 25\le k\le 30\end{cases}$$

La fórmula de la indemnización suplementaria permanecerá sin cambio.

∇

10.4.2 Funciones $R(x,h,t)$ dependientes del salario final

Primero consideraremos el caso en el que la tasa de ingresos por indemnización es una fracción fija g de la tasa final del salario, por tanto

$$\begin{aligned}R(x,h,t)&=g\,(ES)_{x+h+t}\\&=g\,(AS)_{x+h}\,\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}.\end{aligned}$$

Más frecuentemente, la tasa de ingresos por indemnización se basa en la tasa del salario promedio de los últimos m años, por ejemplo, de los últimos 5 años. En este caso, si $t>m$,

$$\begin{aligned}R(x,h,t)&=g\,\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}(ES)_{x+h+s}\,ds\\&=g\,\frac{(AS)_{x+h}}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}\,ds\end{aligned}\qquad(10.4.3)$$

Si $t<m$, la expresión exacta de $R(x,h,t)$ involucra algunos salarios conocidos y está dada por

$$g\,\frac{1}{m}\left[\int_{t-m}^{0}(AS)_{x+h+s}\,ds+\int_{0}^{t}(AS)_{x+h}\,\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}\,ds\right]$$

Esta segunda formulación requiere de un manejo especial.

Para la evaluación numérica de (10.4.3), utilizamos intervalos anuales para t; cuando $k \le t < k+1$, utilizamos el valor a la mitad del año. Por tanto

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\int_{k+1/2-m}^{k+1/2} S_{x+h+s}\,ds$$

Bajo el supuesto acostumbrado de que S_y es una función escalonada, constante para cada año de edad, tenemos

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{x+h+k-m} + S_{x+h+k-m+1} + \ldots\ldots + S_{x+h+k-1} + \frac{1}{2}S_{x+h+k}\right).$$

Introduciendo la notación

$${}_mZ_y = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{y-m} + S_{y-m+1} + \ldots + S_{y-1} + \frac{1}{2}S_y\right), \qquad (10.4.4)$$

Podemos reescribir la fórmula como

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = g\,(AS)_{x+h}\,\frac{{}_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}} \qquad (10.4.5)$$

Una forma más común de la indemnización de salario final es basar la tasa de ingreso por indemnización en el producto del salario promedio final y el número de años de servicios al retiro. Una fórmula típica será

$$R(x,h,t) = f\,(h+t)\;(AS)_{x+h}\left[\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}\,ds\right]$$

Donde f es una fracción designada, cada una como 0.02. Para la aproximación numérica, podrá procederse como en (10.4.5) para escribir

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = f\left(h+k+\frac{1}{2}\right)(AS)_{x+h}\,\frac{{}_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}} \qquad (10.4.6)$$

En algunos casos, sólo cuentan los años completos de servicio, y en ése caso

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = f\,(h+k)(AS)_{x+h}\,\frac{{}_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}} \qquad (10.4.7)$$

En los siguientes ejemplos se indican algunas variantes.

Ejemplo 10.5:

En un ***plan de tasa escalonadas***,

(la tasa de ingresos por indemnización para el retiro en el año $k+1$)
= (al número de años de servicios)
×[(1¼% del primer H_k del salario promedio final de los últimos tres años)
+ (1¼% del salario promedio final de los últimos tres años que exceden a H_k)].

Para un participante que está ingresando actualmente a la edad de 30 años con un salario de 20,000 u.m., proporcione una fórmula para la tasa de ingreso por indemnización a la mitad del año, en caso de retiro entre las edades 63 y 64. Suponga que el salario promedio final de los últimos tres años excederá a H_{33}.

Solución:

$$R(30,0,33\tfrac{1}{2}) = 33.5\left[0.0125H_{33} + 0.0175\left(20{,}000\frac{{}_3Z_{63}}{S_{30}} - H_{33}\right)\right]$$

$$= 33.5\left[350\frac{{}_3Z_{63}}{S_{30}} - 0.005H_{33}\right]$$

Ejemplo 10.6:

En un ***plan de compensación***, la tasa de ingresos por indemnización se calcula primero como el 2% del salario promedio final de los últimos tres años multiplicado por el número de años de servicios, y después se resta una compensación que se basa en la indemnización del seguro social del participante. La compensación es igual al 50% del ingreso por retiro inicial del seguro social del participante. Para un participante de 40 años de edad, que ingresará al servicio a la edad de 30 y que actualmente gana un salario de 30,000 u.m., la tasa estimada de ingresos por indemnización del seguro social para el retiro a la edad de 65 es P. Proporcione una fórmula para la tasa de ingresos por indemnización para el plan de compensación si el retiro ocurre a la edad exacta de 65.

Solución:

$$R(30,10,25) = 35\left[0.02(30,000)\frac{{}_3\bar{Z}_{65}}{S_{40}}\right] - 0.5P$$

$$= 21,000\frac{{}_3\bar{Z}_{65}}{S_{40}} - 0.5P$$

Donde

$${}_3\bar{Z}_{65} = \frac{S_{62} + S_{63} + S_{64}}{3}$$

Ejemplo 10.7:

Un ***plan agregado*** estipula una tasa básica de ingresos por indemnización de 1½% de la compensación promedio de los últimos 5 años por cada año de servicio más un suplemento pagadero a la edad de 65 de ½% de la compensación promedio de los últimos 5 años por cada año de servicio en caso de que un participante se retire antes de los 65 años de edad. Para un participante de 40 años, que ingresa al servicio a la edad de 30 y tiene un salario de 30,000 u.m., proporcione una fórmula para el valor presente actuarial de la indemnización del participante si la edad mínima de retiro es de 60 años, si el retiro es obligatorio a los 70 años, y si algunos participantes permanecen en servicio hasta alcanzar la edad de 70 años.

Solución:

Aquí $q^{(r)}_{40+k} = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,19$ y ${}_{30}p^{(r)}_{40} \neq 0$. El valor presente actuarial es

$$\sum_{k=20}^{29} v^{k+1/2}\, {}_kp^{(r)}_{40}\, q^{(r)}_{40+k}\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\, 450\, \bar{a}^{r}_{40+k+1/2}$$

$$+v^{30}\, {}_{30}p^{(r)}_{40}\frac{{}_5\bar{Z}_{70}}{S_{40}}\, 18,000\, \bar{a}^{r}_{70}$$

$$+\sum_{k=20}^{24} v^{k+1/2}\, {}_kp^{(r)}_{40}\, q^{(r)}_{40+k}\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\, 150\, \bar{a}^{r}_{40+k+1/2:\,\overline{25-k-1/2}|}$$

donde

$${}_5\bar{Z}_{70} = \frac{S_{65} + S_{66} + S_{67} + S_{68} + S_{69}}{5}$$

∇

Ejemplo 10.8:

¿Cómo cambia la fórmula del valor presente actuarial de la indemnización para el participante del Ejemplo 10.7 si el servicio que se acreditará en la tasa de ingresos por indemnización se limita a 30 años?

Solución:

Para este participante en particular, que para la edad de 60 años habrá completado 30 años de servicio, la fórmula del valor presente actuarial se simplifica a

$$13{,}500\left\{\sum_{k=20}^{29} v^{k+1/2}\,{}_kp_{40}^{(\tau)}\,q_{40+k}^{(r)}\,\frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\,\bar{a}^{r}_{40+k+1/2}+v^{30}\,{}_{30}p_{40}^{(\tau)}\,\frac{{}_5\tilde{Z}_{70}}{S_{40}}\,\bar{a}^{r}_{70}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\sum_{k=20}^{24} v^{k+1/2}\,{}_kp_{40}^{(\tau)}\,q_{40+k}^{(r)}\,\frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\,\bar{a}^{r}_{40+k+1/2:\overline{25-k-1/2}|}\right\}$$

∇

Ejemplo 10.9:

Proporcione una fórmula del valor presente actuarial de la indemnización por retiro asociada con el servicio entre las edades 30 y 40 del participante del ejemplo 10.7.

Solución:

El participante tiene 10 años de servicio entre las edades 30 y 40 y el valor presente actuarial de la indemnización asociada es de 1/3 del valor presente actuarial del Ejemplo 10.8, el cual se baso en la acreditación de 30 años de servicios. El único cambio requerido es reemplazar 13,500 por 4500.

∇

10.4.3 Función $R(x,h,t)$ determinada por el salario promedio de la carrera de servicios

Otro tipo de tasa de ingresos por indemnización es una fracción f de los ingresos percibidos durante toda la carrera del retirado. Esta tasa de ingresos por indemnización puede verse como f veces el producto del número de años de servicio y el salario promedio durante toda la carrera. Por esta razón, a dicha indemnización se le denomina ***indemnización promedio de la carrera***.

El cálculo de los valores presentes actuariales de la indemnización promedio de la carrera por retiro se divide en forma natural en dos partes, una por el servicio pasado para el que la información salarial es conocida y una para el servicio futuro en la que los salarios deberán estimarse. Aquí, los salarios pasados entran en la valuación de las indemnizaciones de todos los participantes y no sólo para los participantes que están cercanos al retiro. Por lo tanto, a diferencia de la situación mencionada en conexión con (10.4.3), es usual aquí utilizar los salarios pasados reales. Si el total de los salarios pasados para un participante en el estatus $x+h$ se representa mediante $(TPS)_{x+h}$, la tasa de indemnización por los servicios del pasado es $f(TPS)_{x+h}$ y el valor presente actuarial de la indemnización por los servicios del pasado es

$$f(TPS)_{x+h}\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(r)}\,\ddot{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \tag{10.4.8}$$

La tasa de ingresos por indemnización basada en los servicios futuros está dada por

$$f\int_0^t (ES)_{x+h+s}\,ds = f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\int_0^t S_{x+h+s}\,ds$$

Para la evaluación numérica, si S_{x+h+s} es una función escalonada con etapas anuales tenemos

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{x+h+j}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right) \tag{10.4.9}$$

Donde k es el entero más grande en t. El valor presente actuarial de la indemnización por servicios futuros es por tanto

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(\tau)}\,\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{\tau}\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{x+h+j}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)\right] \qquad (10.4.10)$$

Como $q_{x+h+k}^{(\tau)}=0$ para $k<\alpha-x-h$, (10.4.10) puede reescribirse como

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(\tau)}\,\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{\tau}\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{x+h+j}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)\right] \qquad (10.4.11)$$

La figura 10.1 muestra esas combinaciones de los valores de j y k sobre los que se hace la sumatoria. Los puntos de la red en donde el término tiene un coeficiente multiplicativo de ½ están marcados o.
Cambiando el orden de la sumatoria, (10.4.11) se transforma en

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{j=0}^{\omega-x-h-1} S_{x+h+j}\left(\frac{1}{2}v^{j+1/2}\,{}_jp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+j}^{(\tau)}\,\bar{a}_{x+h+j+1/2}^{\tau}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=j+1}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(\tau)}\,\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{\tau}\right)\right] \qquad (10.4.12)$$

Nótese que la suma interior es 0 cuando $j=\omega-x-h-1$.

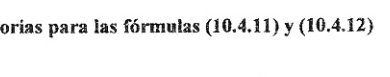


Figura 10.1 Puntos de las sumatorias para las fórmulas (10.4.11) y (10.4.12)

La expresión (10.4.12) puede interpretarse considerando que el servicio en el año $j+1$ proporciona una unidad completa de indemnización,

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}S_{x+h+j}$$

si el retiro ocurre después del año $j+1$ y un promedio de 1/2 unidad de indemnización si el retiro ocurre en el mismo año $j+1$.

En lugar de valuar la indemnización total por los servicios futuros, podrá uno interesarse en determinar el valor presente actuarial de la indemnización acreditada por el servicio en los años que se extienden desde la edad $x+h$ hasta la edad $x+h+1$. Esto es simplemente el primer sumando de la expresión (10.4.12), la cual, después de cancelar S_{x+h}, es

$$f(AS)_{x+h}\left[\frac{1}{2}v^{1/2}q^{(r)}_{x+h}\ \bar{a}^{r}_{x+h+1/2}+\sum_{k=1}^{\omega-x-h-1}v^{k+1/2}\ {}_kp^{(r)}_{x+h}\ q^{(r)}_{x+h+k}\ \bar{a}^{r}_{x+h+k+1/2}\right] \qquad (10.4.13)$$

Este valor presente actuarial puede interpretarse como el costo asignado al servicio actual bajo el plan promedio de carrera para el participante de edad $x+h$.

Ejemplo 10.10:

a. Un plan promedio de carrera estipula un ingreso por retiro de 2% del salario agregado durante los años de servicio de un participante. Para un participante de 40 años de edad que ingreso a la edad de 30, tiene 200,000 u.m. de salarios totales de años pasados, y un salario actual de 25,000 u.m., escriba una expresión para la tasa de ingreso total por indemnización del participante en caso de retiro entre las edades 67 y 68.

b. Proporciones fórmulas alternativas del valor presente actuarial de la indemnización por servicios futuros del participante, suponiendo que se utiliza la Tabla de Servicio Ilustrativa.

c. Exprese el valor presente actuarial de la indemnización acreditada para los servicios de este participante de la edad 40 a la 41, suponiendo otra vez que se usa la Tabla de Servicio Ilustrativa.

Solución:

a. La tasa de ingresos total de mitad del año es

$$R(30,10,27\tfrac{1}{2}) = 0.02\left[200{,}000 + 25{,}000\,\frac{\sum_{j=0}^{26} S_{40+j} + (\tfrac{1}{2})S_{67}}{S_{40}}\right]$$

$$= 4000 + 500\,\frac{\sum_{j=0}^{26} S_{40+j} + (\tfrac{1}{2})S_{67}}{S_{40}}$$

b. Por (10.4.10), el valor presente actuarial es

$$\frac{500}{S_{40}} \sum_{k=20}^{30} v^{k+1/2}\, {}_kp_{40}^{(r)}\, q_{40+k}^{(r)} \left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{40+j} + \frac{1}{2} S_{40+k} \right) \bar{a}_{40+k+1/2}^{r}$$

Alternativamente, la expresión por (10.4.12) es

$$\frac{500}{S_{40}} \left[\sum_{j=0}^{30} S_{40+j} \left(\frac{1}{2} v^{j+1/2}\, {}_jp_{40}^{(r)}\, q_{40+j}^{(r)}\, \bar{a}_{40+j+1/2}^{r} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=j+1}^{30} v^{k+1/2}\, {}_kp_{40}^{(r)}\, q_{40+k}^{(r)}\, \bar{a}_{40+k+1/2}^{r} \right) \right]$$

Como $q_{40+k}^{(r)} = 0$ para $k < 20$, un número de sumandos será 0.

c. Después de que los términos valuados 0 se abandonan, el resultado requerido de (10.4.13) es

$$500 \sum_{k=20}^{30} v^{k+1/2}\, {}_kp_{40}^{(r)}\, q_{40+k}^{(r)}\, \bar{a}_{40+k+1/2}^{r}$$

10.5 Indemnizaciones por incapacidad

Se puede seguir un proceso similar al que se utiliza en la sección precedente para la valuación de las pensiones por incapacidad. Tales pensiones generalmente se basan sobre el salario que se devenga en la fecha de la incapacidad, podrán representar una indemnización mínima y podrán ser pagaderas sólo hasta alguna edad como, por ejemplo, 65, y en ese momento se

cambiará la pensión a una pensión por años de servicio. Ejemplificaremos el proceso mediante una pensión por incapacidad pagadera a la tasa de f veces el salario del año en que ocurre el retiro por incapacidad multiplicado por el número de años de servicios acreditados incluyendo cualquier crédito fraccionario. Se supone que el participante debe haber prestado sus servicios al menos durante 5 años y ser menor de 65 años para ser elegible para el retiro por incapacidad, pero si el retiro por incapacidad ocurre durante este periodo, la indemnización será al menos $10f$ veces el salario anual correspondiente a la fecha de la incapacidad. La función de la tasa de ingresos por indemnización para un integrante nuevo de edad x está á dada por

$$R(x,0,t)=\begin{cases} 0 & 0\le t < 5 \text{ o } t\ge 65-x \\ 10f\,(ES)_{x+t}=10f\,(AS)_x\,\dfrac{S_{x+t}}{S_x} & 5\le t < 10 \\ tf\,(ES)_{x+t}=tf\,(AS)_x\,\dfrac{S_{x+t}}{S_x} & 10\le t < 65-x \end{cases} \qquad (10.5.1)$$

El valor presente actuarial para estas indemnizaciones por incapacidad (que aquí se suponen pagaderas de por vida) están dadas por

$$\int_5^{65-x} v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(i)}R(x,0,t)\;\bar{a}_{x+t}^{t}\;dt \qquad (10.5.2)$$

y se aproxima mediante

$$\sum_{k=5}^{64-x} v^{k+1/2}\,{}_kp_x^{(\tau)}\,q_{x+k}^{(i)}\;R(x,0,k+\tfrac{1}{2})\;\bar{a}_{x+k+1/2}^{t}\;. \qquad (10.5.3)$$

Las diferencias entre estas expresiones y (10.4.1) y (10.4.2) son el uso de la fuerza del decremento de la incapacidad y la probabilidad del retiro por incapacidad, los límites de la integración y de la sumatoria, y el uso de valores de la anualidad por incapacidad.

Ejemplo 10.11:

Un plan de pensión estipula una indemnización de ingreso por incapacidad del 50% del salario final, pero no más del 70% del salario final menos la cantidad inicial del ingreso por incapacidad pagadero por el sistema de seguro social. Para que un participante califique para la indemnización, debe haber prestado sus servicios al menos 3 años y haberse retirado por incapacidad antes de los 65 años de edad. Para un participante que ingresa a edad 30 con un salario de 15,000 u.m., y con un ingreso por incapacidad inicial estimado del seguro social de l_y por retiro de incapacidad en el año de la edad y a $y+1$, $30 \le y < 65$, exprese la tasa de ingreso de indemnización por incapacidad pagadera a través del plan de pensión.

Solución:

Si $k = 0,1,2$, $R(30,0,k+1/2) = 0$. Si $3 \le k \le 34$,

$$R\left(30,0,k+\frac{1}{2}\right) = el\ menor\ de \begin{cases} 7500\dfrac{S_{30+k}}{S_{30}} \\ 10500\dfrac{S_{30+k}}{S_{30}} - l_{30+k} \end{cases}$$

Siempre que esta cantidad sea positiva, de lo contrario $R(30,0,k+1/2) = 0$. ▼

10.6 Indemnización por separación.

En general, existen dos tipos de indemnizaciones por separación. Después de un número de años, por ejemplo, 10 años el participante saliente puede ser candidato a una anualidad diferida. Como ejemplo, consideramos una indemnización por separación de una anualidad diferida que se inicia a la edad de 60 años. La tasa de ingreso es f veces el número de años de servicio hasta el momento de la separación multiplicado por la tasa de salario pagadera en el año de la separación. En este caso tenemos

$$R(x,h,t) = \begin{cases} 0 & h+t < 10 \\ f(h+t)(ES)_{x+h+t} & 10 \le h+t < 60-x \end{cases}$$

El valor presente actuarial de esta indemnización se aproxima mediante

$$\sum_{k=l}^{59-x-h} v^{k+1/2}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\ q_{x+h+k}^{(\omega)}\ R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)\ {}_{60-x-h-k-1/2|}\overline{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \qquad (10.6.1)$$

en donde l es el mayor de $10-h$ o 0. El uso de $\overline{a}^{r}$ en (10.6.1), sí bajo el supuesto de que la tabla de mortalidad de la vida de los retirados es adecuada para calcular los retiros diferidos.

El otro tipo de indemnización por separación se aplica a planes que incluyen contribuciones de los participantes. Estos planes, que generalmente involucran a empleados públicos, usualmente estipulan un reembolso de las contribuciones de los participantes, acumulados con interés, como una suma global si el participante sale antes de ser candidato a una pensión de indemnización. Generalmente, se paga una indemnización similar a la muerte del participante si éste se encontraba en servicio activo, pero en este caso puede existir también una aportación para un ingreso por indemnización al sobreviviente. Aquí nos restringiremos a considerar las indemnizaciones reembolsables pagaderas a la salida. También, únicamente consideraremos reembolsos con respecto a las contribuciones previas y a la contribución del año corriente; las cuales se basan en salarios conocidos. Podríamos considerar las fórmulas del promedio de la carrera de servicios para la valuación de los reembolsos de las contribuciones futuras, pero son complejas y, en la práctica, pueden eliminarse.

Para valuar el reembolso de la indemnización de contribuciones pasadas, representamos a éstas últimas como $(ATPC)_{x+h}$ acumuladas con interés hasta la fecha, con respecto a un participante con edad actual de $x+h$. Con el supuesto de que las contribuciones de los participantes se acumularán en el futuro a la tasa efectiva anual j, el tamaño de la suma global de indemnización pagadera a la edad de salida $x+h+t$ está dada por

$$B(x,h,t) = (ATPC)_{x+h}\,(1+j)^{t}.$$

La suma aproximada de los valores presentes actuariales de indemnización por reembolso con respecto a las contribuciones pasadas, es entonces,

$$(ATPC)_{x+h} \sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} v^{k+1/2}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\ q_{x+h+k}^{(\omega)}\ (1+i)^{k+1/2} \qquad (10.6.2)$$

Donde β es la edad a la que se establece la elegibilidad para la pensión (diferida o inmediata) y $x+h<\beta$. Aquí se supone que no se hacen reembolsos después de que se alcanza la edad β.

El reembolso con respecto a una contribución corriente del participante de c% del salario se aproximará mediante $(1/2)(0.01c)(AS)_{x+h}$ para la separación en el año corriente, y mediante $(0.01c)(AS)_{x+h}(1+j)^k$ para la salida en el año $k+1$. Luego el valor presente actuarial de la indemnización por reembolso respecto a la contribución corriente del participante es

$$0.01\ c\ (AS)_{x+h}\left\{\frac{1}{2}v^{1/2}\ q_{x+h}^{(\omega)} + \sum_{k=1}^{\beta-x-h-1} v^{k+1/2}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\ q_{x+h+k}^{(\omega)}\ (1+i)^k\right\} \qquad (10.6.3)$$

donde $x+h<\beta$.

Ejemplo 10.12:

Para $j=i$, simplifique (10.6.2) y (10.6.3).

Solución:

Cuando $j=i$, (10.6.2) se transforma en

$$(ATPC)_{x+h} \sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\ q_{x+h+k}^{(\omega)}$$

$$= (ATPC)_{x+h} \Pr[\ (x+h) \text{ saldrá antes de su elegibilidad a la pensión }]$$

$$= (ATPC)_{x+h} \frac{l_{x+h}^{(\omega)} - l_{\beta}^{(\omega)}}{l_{x+h}^{(\tau)}}$$

En donde $l_y^{(\omega)}$ es el número de $l_y^{(\tau)}$ activos a la edad y que se espera saldrán en el futuro.

Ahora la fórmula (10.6.3) es

$$(0.01c)(AS)_{x+h}\, v^{1/2}\left[\frac{1}{2}q^{(\omega)}_{x+h} + \sum_{k=1}^{\beta-x-h-1} {}_kp^{(\tau)}_{x+h}\, q^{(\omega)}_{x+h+k}\right]$$

$$= (0.01c)(AS)_{x+h}\, v^{1/2}\,\frac{(1/2)(l^{(\omega)}_{x+h} - l^{(\omega)}_{x+h+1}) + l^{(\omega)}_{x+h+1} - l^{(\omega)}_{\beta}}{l^{(\tau)}_{x+h}}$$

$$= (0.01c)(AS)_{x+h}\, v^{1/2}\,\frac{(1/2)(l^{(\omega)}_{x+h} + l^{(\omega)}_{x+h+1}) - l^{(\omega)}_{\beta}}{l^{(\tau)}_{x+h}}$$

10.7 Funciones conmutativas

Las funciones conmutativas especiales estipulan una notación tradicional y un método de almacenamiento para la evaluación numérica de los valores presentes actuariales para los planes de pensión. Estas funciones pueden ser de utilidad si se tiene que realizar un gran número de valuaciones utilizando el mismo conjunto de supuestos actuariales. Las funciones conmutativas para los cálculos de pensión no están incluidas en la Notación Actuarial Internacional; sin embargo, en la práctica diversas formas han sido ampliamente utilizadas. En esta sección definiremos e indicaremos la aplicación de varias de ésas funciones.

Iniciamos con la definición

$$D^{(\tau)}_x = v^x\, l^{(\tau)}_x \tag{10.7.1}$$

Esta es similar a la función D_x utilizada en los Capítulos 4 y 5. El índice (τ) indica que se construye utilizando la función $l^{(\tau)}_x$ de una tabla de decremento múltiple. Nuestras fórmulas de evaluación numérica frecuentemente involucran factores como ${}_{k+1/2}p^{(\tau)}_x$, y escribimos

$$v^{k+1/2}\,{}_{k+1/2}p^{(\tau)}_x = \frac{\bar{D}^{(\tau)}_{x+k}}{D^{(\tau)}_x}$$

donde

$$\bar{D}^{(\tau)}_y = D^{(\tau)}_{y+1/2} \tag{10.7.2}$$

Las funciones adicionales para la valuación de contribuciones son

$$ {}^{S}\bar{D}_{y}^{(\tau)} = S_y \, \bar{D}_{y}^{(\tau)} \tag{10.7.3} $$

y

$$ \bar{N}_{x}^{(\tau)} = \sum_{y=x}^{\omega-1} \bar{D}_{y}^{(\tau)} $$

$$ {}^{S}\bar{N}_{x}^{(\tau)} = \sum_{y=x}^{\omega-1} {}^{S}\bar{D}_{y}^{(\tau)} \tag{10.7.4} $$

La función básica para la valuación de las indemnizaciones es

$$ \bar{C}_{y}^{h} = D_{y}^{(\tau)} \, v^{1/2} \, q_{y}^{(h)} \tag{10.7.5} $$

la que, como en el Capítulo 4, incluye una función D y la probabilidad de un decremento, $q_{y}^{(h)}$. El decremento involucrado, h, se indica mediante un exponente fijado a la derecha. La barra sobre la C indica que los pagos se hacen al momento del decremento y, consistente con nuestras aproximaciones, requiere del factor $v^{1/2}$. Otras funciones para la valuación de las indemnizaciones son

$$ {}^{a}\bar{C}_{y}^{h} = \bar{C}_{y}^{h} \, \bar{a}_{y+1/2}^{h} \tag{10.7.6} $$

$$ {}^{Sa}\bar{C}_{y}^{h} = S_y \, {}^{a}\bar{C}_{y}^{h} \tag{10.7.7} $$

$$ {}^{Za}\bar{C}_{y}^{h} = {}_{m}Z_y \, {}^{a}\bar{C}_{y}^{h} \tag{10.7.8} $$

Se pueden usar las funciones correspondiente $\bar{M}$ y $\bar{R}$, por ejemplo

$$ {}^{Za}\bar{M}_{x}^{h} = \sum_{y=x}^{\omega-1} {}^{Za}\bar{C}_{y}^{h} \tag{10.7.9} $$

$$ {}^{Za}\bar{R}_{x}^{h} = \sum_{y=x}^{\omega-1} {}^{Za}\bar{M}_{y}^{h} \tag{10.7.10} $$

Si, en estas funciones, el valor de la anualidad es para otra anualidad distinta de la de vida entera, indicaremos esta variación mediante un signo a en el

superíndice. Nótese también que ${}^{Za}\bar{C}^{r}_{y} = 0$ y ${}^{Za}\bar{M}^{r}_{y} = {}^{Za}\bar{M}^{r}_{\alpha}$ para $y < \alpha$, en donde α es la primera edad para el retiro.

Ahora desarrollaremos fórmulas en términos de funciones conmutativas de pensión para los valores presentes actuariales correspondientes a diversas fórmulas de las secciones precedentes. Para el valor presente actuarial de las contribuciones futuras pagaderas continuamente a una tasa de c por año, empezamos con (10.3.2) reacomodada como

$$c \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \frac{v^{x+h+k+1/2}\, l^{(\tau)}_{x+h+k+1/2}}{v^{x+h}\, l^{(\tau)}_{x+h}}$$

Para obtener

$$c \frac{\bar{N}^{(\tau)}_{x+h}}{D^{(\tau)}_{x+h}}. \tag{10.7.11}$$

Estas contribuciones son expresadas como una fracción de salario, empezamos por (10.3.4) dispuesto por

$$c(AS)_{x+h} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \frac{v^{x+h+k+1/2}\, l^{(\tau)}_{x+h+k+1/2}\, S_{x+h+k}}{v^{x+h}\, l^{(\tau)}_{x+h} S_{x+h}} = c(AS)_{x+h} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \frac{{}^{S}\bar{D}^{(\tau)}_{x+h+k}}{{}^{S}\bar{D}^{(\tau)}_{x+h}}$$

y finalizamos con

$$c \frac{(AS)_{x+h}\, {}^{S}\bar{N}^{(\tau)}_{x+h}}{{}^{S}\bar{D}^{(\tau)}_{x+h}} \tag{10.7.12}$$

Por (10.7.5) y (10.7.6), la expresión $v^{k+1/2}\, {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h}\, q^{(\tau)}_{x+h+k}\, \bar{a}^{r}_{x+h+k+1/2}$ puede reescribirse como ${}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k} / D^{(\tau)}_{x+h}$. Luego la fórmula general (10.4.2) para el valor presente actuarial de la indemnización de retiro por años de servicio, en términos de funciones conmutativas, es, para $x+h \le \alpha$,

$$\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} \frac{R(x,h,k+1/2)\, {}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{D^{(\tau)}_{x+h}}. \tag{10.7.13}$$

En particular, cuando $R(x,h,k+1/2)$ está dado por (10.4.5), obtenemos

$$\begin{aligned} g(AS)_{x+h} & \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} \frac{{}_{m}Z_{x+h+k}}{S_{x+h}} \frac{{}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{D^{(r)}_{x+h}} \\ &= g(AS)_{x+h} \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} \frac{{}^{Za}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{s}D^{(r)}_{x+h}} \\ &= g(AS)_{x+h} \frac{{}^{Za}\bar{M}^{r}_{\alpha}}{{}^{s}D^{(r)}_{x+h}} \end{aligned} \tag{10.7.14}$$

Como $0 = q^{(r)}_{y} = \bar{C}^{r}_{y} = {}^{Z\,a}\bar{C}^{r}_{y}$, para $y < \alpha$, podemos expresar el valor presente actuarial como

$$g(AS)_{x+h} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \frac{{}^{Za}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{s}D^{(r)}_{x+h}} = g(AS)_{x+h} \frac{{}^{Za}\bar{M}^{r}_{x+h}}{{}^{s}D^{(r)}_{x+h}} \tag{10.7.15}$$

Esta fórmula alternativa es válida si $x+h \le \alpha$ o si $x+h > \alpha$. Volveremos a ver esta ventaja de la reformulación de la suma cuando $R(x,h,k+1/2)$ depende de los años de servicio.

Un ejemplo de esta se da en (10.4.6) en donde

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = f\left(h+k+\frac{1}{2}\right)(AS)_{x+h} \frac{{}_{m}Z_{x+h+k}}{S_{x+h}}.$$

Entonces el valor presente actuarial de la indemnización por retiro puede expresarse mediante una sumatoria, que empieza en $k=0$, como

$$\begin{aligned} & f(AS)_{x+h} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \frac{(h+k+1/2)\ {}^{Za}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{s}D^{(r)}_{x+h}} \\ &= f(AS)_{x+h} \frac{(h+1/2)\ {}^{Za}\bar{M}^{r}_{x+h} + {}^{Za}\bar{R}^{r}_{x+h+1}}{{}^{s}D^{(r)}_{x+h}} \end{aligned} \tag{10.7.16}$$

Esto es válido para cualquier $x+h$, mientras que una sumatoria que empieza con $k = \alpha - x - h$ produciría la fórmula

$$f(AS)_{x+h} \frac{(\alpha - x + 1/2)\ {}^{Za}\bar{M}_{\alpha} + {}^{Za}\bar{R}^{r}_{\alpha+1}}{{}^{s}D^{(r)}_{x+h}}$$

que tendría que complementarse con (10.7.16) para $x+h>\alpha$.

Si sólo cuentan los años completos de servicio, como en (10.4.7), el valor presente actuarial es

$$f(AS)_{x+h}\frac{h\,{}^{Za}\bar{M}^{r}_{x+h}+{}^{Za}\bar{R}^{r}_{x+h+1}}{{}^{S}D^{(r)}_{x+h}} \tag{10.7.17}$$

que se sigue de (10.7.16) dejando la fracción promedio 1/2 para cualquier año de servicio incompleto.

El valor presente actuarial (10.4.8) para la indemnización por servicios pasados en el caso del salario promedio de la carrera se puede expresar como

$$f(TPS)_{x+h}\left(\frac{{}^{a}\bar{M}^{r}_{x+h}}{D^{(r)}_{x+h}}\right). \tag{10.7.18}$$

Una fórmula que corresponde directamente a (10.4.10) para la indemnización por servicios futuros es

$$f(AS)_{x+h}\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1}\frac{\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{x+h+j}+(1/2)S_{x+h+k}\right){}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(r)}_{x+h}} \tag{10.7.19}$$

para obtener una expresión, en las funciones conmutativas de pensión, correspondiente a la fórmula alternativa (10.4.12), la escribimos como

$$f(AS)_{x+h}\frac{(1/2)\sum_{j=0}^{\omega-x-h-1}{}^{Sa}\bar{C}^{r}_{x+h+j}+\sum_{j=0}^{\omega-x-h-1}S_{x+h+j}\sum_{k=j+1}^{\omega-x-h-1}{}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(r)}_{x+h}}$$

$$=f(AS)_{x+h}\frac{(1/2)\,{}^{Sa}\bar{M}^{r}_{x+h}+\sum_{j=0}^{\omega-x-h-1}S_{x+h+j}\,{}^{a}\bar{M}^{r}_{x+h+j+1}}{{}^{S}D^{(r)}_{x+h}}$$

Definimos ahora

$$^{S'a}\bar{M}_y^r = S_{y-1}\,{}^a\bar{M}_y^r \tag{10.7.20}$$

Lo que nos permite expresar el valor presente actuarial como

$$f(AS)_{x+h}\frac{(1/2)^{Sa}\bar{M}_{x+h}^r + {}^{S'a}\bar{R}_{x+h+1}^r}{{}^sD_{x+h}^{(\tau)}} \tag{10.7.21}$$

Pasos similares a los indicados para las indemnizaciones por retiro se aplican a las indemnizaciones anuales disponibles por incapacidad o la separación. Por tanto (10.5.3), para el valor presente actuarial de una indemnización por incapacidad, puede escribirse en términos de funciones conmutativas como

$$\sum_{k=5}^{64-x}\frac{R(x,0,k+1/2)\ {}^a\bar{C}_{x+k}^{i}}{D_x^{(\tau)}} \tag{10.7.22}$$

en donde $^a\bar{C}_y^i = v^{1/2}D_y^{(\tau)}q_y^{(i)}\bar{a}_{y+1/2}^i$. Igualmente, (10.6.1) puede escribirse en términos de funciones conmutativas como

$$f(AS)_{x+h}\sum_{k=1}^{59-x-h}\frac{(h+k+1/2)^{Sa'}\bar{C}_{x+h+k}^{\omega}}{{}^sD_{x+h}^{(\tau)}} \tag{10.7.23}$$

Donde $^{Sa'}\bar{C}_y^{\omega} = S_y\bar{C}_y^{\omega}\ {}_{60-y-1/2|}\bar{a}_{y+1/2}^r$. Si así se quisiera, podría uno expresar este valor presente actuarial en términos de $^{Sa'}\bar{M}_y^{\omega}$ y $^{Sa'}\bar{R}_y^{\omega}$.

Introduciendo la notación $^j\bar{C}_y^{\omega} = (1+j)^y\bar{C}_y^{\omega}$. Podemos reescribir (10.6.3) como

$$0.01\,c\,(AS)_{x+h}\frac{(1/2)\ {}^j\bar{C}_{x+h}^{\omega} + \sum_{k=1}^{\beta-x-h-1}{}^j\bar{C}_{x+h+k}^{\omega}}{(1+j)^{x+h}\ D_{x+h}^{(\tau)}}$$

$$= 0.01\,c\,(AS)_{x+h}\frac{(1/2)\ {}^j\bar{C}_{x+h}^{\omega} + {}^jM_{x+h+1}^{\omega} - {}^j\bar{M}_{\beta}^{\omega}}{(1+j)^{x+h}\ D_{x+h}^{(\tau)}} \tag{10.7.24}$$

En los ejercicios 10.12 - 10.18 se encontrarán más ilustraciones del método de las funciones conmutativas.

10.8 Notas y referencias

No obstante de que existen muchas ponencias y un buen número de textos que tratan las matemáticas de los fondos de pensión, parece útil para los propósitos de este tratamiento introductorio referirse únicamente a otros textos actuariales con capítulos similares a los aquí tratados. Hooker y Longley-Cook (1957), Jordan (1967) y Neill (1977), son tres referencias de ése tipo. Estos textos enfatizan la formulación de los valores presentes actuariales en términos de las funciones conmutativas de pensión y el uso de tablas de dichas funciones para llevar a cabo la computación.

En contraste, la mayor parte de nuestra presentación se hizo en términos de integrales y aproximación mediante sumas, expresando los integrandos o sumandos en términos de funciones básicas. Estas aproximaciones mediante sumas pueden computarse por medio de varios procesos que pueden o no hacer uso de las funciones conmutativas. Para las indemnizaciones por pensión determinadas por condiciones de ingreso o elegibilidad complejas, podría ser más flexible y eficiente calcularlas mediante procesos que no requieran formulaciones extensas mediante funciones conmutativas. Chamberlain (1982) ofrece un enfoque opuesto, señalando la potencia de las funciones conmutativas para expresar los valores presentes actuariales y el control de su computación.

En este capítulo no hemos definido las pérdidas del asegurador y estudiado sus varianzas. La fórmula (9.7.7) proporciona el medio para hacerlo si se consideran las indemnizaciones totales para todas las causas del decremento. Si se considera una indemnización única, como la indemnización por retiro, existe más de una forma para definir las pérdidas. El concepto acostumbrado es que las primas y reservas, para una indemnización con respecto a una causa particular de decremento, se aplica sólo a ese decremento. Por tanto si ocurre un decremento debido a una segunda causa, entonces, con respecto a la primera causa, hay 0 indemnización y surge una ganancias. La pérdida de un asegurador basada en este concepto conduciría a (10.4.2). Sin embargo, las pérdidas que se definen en esta forma pueden tener covarianzas diferentes a cero, por lo que la varianza de la pérdida para todas las indemnizaciones no es la suma de las varianzas de las pérdidas para las indemnizaciones individuales.

Alternativamente, se puede considerar que cuando ocurre una causa particular de decremento las reservas acumuladas para las indemnizaciones con respecto a todas las demás causas se liberan para compensar la indemnización desembolsada por la causa dada. En este caso, las pérdidas definidas para las indemnizaciones para cada causa de decremento tienen covarianzas valuadas en 0, y la varianza de la pérdida para todas las indemnizaciones es la suma de las varianzas de la pérdida para las indemnizaciones individuales. Sin embargo, las primas y reservas para las indemnizaciones individuales son más difíciles de computar sobre esta segunda base, e individualmente difieren significativamente de aquéllas calculadas sobre la base acostumbrada. Para conocimientos sobre estas materias, véase Hickman (1964).

Ejercicios

Secciones 10.2 y 10.3

10.1 Se supone que, para un nuevo participante que ingresa a la edad de 30, habrá incrementos anuales de salario a una tasa de 5% por año para tomar en cuenta los efectos de la inflación e incrementos en la productividad. Además, se supone que habrá incrementos por promoción de 10% del salario existente, en las edades de 40, 50 y 60.

a. Construya una función de escala salarial, S_{30+k}, para expresar estos supuestos.

b. Escriba una expresión para el valor presente actuarial de las contribuciones de 10% del salario futuro para un nuevo participante que ingresa a los 30 años con un salario inicial de 12,000 u.m., y con incrementos salariales similares a la escala que se construyó para la parte (a).

10.2 Cada año, el patrocinador del plan contribuye con el 10% de la porción del salario de cada participante que excede de cierta cantidad. Esa cantidad es de 10,000 u.m. para este año y se incrementará 5% anualmente. Exprese el valor presente actuarial de la contribución del patrocinador para un participante que ingresa ahora a la edad de 35 años con un salario de 25,000 u.m.

10.3 En el ejemplo 10.3, suponga que todos los retiros se realizan exactamente a la edad 63 (en lugar de seguir la Tabla de Servicio Ilustrativa). ¿A qué se reducen los valores presentes actuariales?

10.4 Un nuevo participante de 25 años tiene un salario corriente de 12,000 u.m. Para este participante, exprese la función de la tasa de ingresos por indemnización para un plan de tasas escalonadas que estipula, para el caso del retiro en el año $k+1$,

(un ingreso)
= (al número de años completos de servicio)
× [(0.01 del salario promedio de los últimos tres años hasta $15{,}000(1.04)^k$)
+ (0.015 del excedente, si existe, del salario promedio de los últimos tres años superior a $15{,}000(1.04)^k$].

10.5 Para un plan de compensación, la compensación se determina como el número de años de servicio multiplicado por 2% del ingreso por el seguro social, pero en ningún caso más del 50% del ingreso del seguro social. La tasa de ingreso por indemnización del plan, antes de que se aplique la compensación, es igual al número de años de servicio multiplicado por 2% del salario promedio final de los últimos 3 años. Proporcione fórmulas para la tasa de ingreso por indemnización después de que se aplique la compensación, para un nuevo participante de 40 años con un salario de 30,000 u.m., si el retiro es

a. a la edad exacta de 65 con un ingreso por el seguro social estimado de I_{65}

b. entre las edades 68 y 69 con un ingreso por seguro social estimado de $I_{68\frac{1}{2}}$.

10.6 Un plan estipula una tasa de ingreso por indemnización de 2% del salario promedio de los 3 últimos años por cada año de servicio, pagadero a la edad de 65. De ahí en adelante la tasa de ingreso por indemnización es $1\frac{1}{3}$% del salario promedio de los últimos 3 años por cada año de servicio.

Exprese el valor presente actuarial de la indemnización del participante, para un participante de 50 años, que ingresó al servicio a la edad de 30 y tiene un salario de 36,000 u.m., si la edad mínima de retiro es de 55 años y todos los retiros se dan en la edad 68.

10.7 En el ejercicio 10.6, suponga que 35 es el máximo de años que se acreditan.
¿Cómo se transforma la fórmula del valor presente actuarial de la indemnización?

10.8 Escriba una fórmula del valor presente actuarial del ingreso por indemnización asociado con el servicio entre las edades 30 y 50 del participante del ejercicio 10.6.

10.9 Un plan de promedio de la carrera estipula un ingreso por retiro de 2% del salario agregado devengado durante los años de servicio del participante. La edad mínima de retiro es 58 y todos los retiros se completan a la edad de 68. Para un participante de 50 años, que ingresó al servicio a la edad de 30, y tiene un total de salarios pasados de 400,000 u.m. con un salario corriente de 36,000 u.m., escriba expresiones para

a. la tasa de ingreso total por indemnización del participante en caso de retiro a la edad exacta de 65

b. la tasa de ingreso total por indemnización del participante a la mitad del año en caso de retiro entre las edades 65 y 66

c. el valor presente actuarial de la indemnización por retiro por los servicios previos de este participante

d. el valor presente actuarial de la indemnización por retiro por los servicios futuros de este participante.

Sección 10.5

10.10 Para la indemnización por incapacidad del ejemplo 10.11, con respecto a un Participante que tiene actualmente 50 años con 20 de servicio y un salario de 25 000 u.m., ¿cuál sería el valor presente actuarial incurrido hasta el tiempo de la incapacidad para la indemnización si el participante se incapacita a la mitad del año corriente y $l_{50} = 8000$?

Sección 10.6

10.11 Un participante de 35 años ha acumulado un total de 5000 u.m. de sus contribuciones pasadas. Este participante tendrá derecho a la posesión completa de su anualidad diferida al alcanzar la edad de 40. Escriba una expresión del valor presente actuarial del reembolso de las contribuciones pasadas totales acumuladas de este participante en caso de salida antes de esa edad, suponiendo que las contribuciones se acumulan a una tasa efectiva de 6% al año.

10.12 a. En el desarrollo de (10.6.3), reescriba el término para la salida en el año corriente,

$$0.01\, c\, (AS)_{x+h}\ \frac{1}{2}\ v^{1/2} q_{x+h}^{(\omega)}$$

como una doble integral con una variable para el tiempo en que se gana un incremento de salario y la otra como el tiempo de separación. Acredite un interés a la tasa j para el tiempo en que se gana un incremento de salario hasta el tiempo de la separación.

b. Bajo el supuesto de una distribución uniforme de separaciones en el contexto del decremento múltiple, evalúe la integral de la parte (a).

c. Usando $i = 0.06$ y $j = 0.04$, evalúe el término como se dio en (10.6.3) y en la integral de la parte (b). Compare los resultados.

Sección 10.7

10.13 Exprese, en términos de funciones conmutativas, las fórmulas del valor presente actuarial en los siguientes ejercicios:

a. 10.1(b)	b.10.2	c. 10.3
d. 10.7	e. 0.9(c)	f. 10.9(d).

10.14 Para un participante con un salario de 12,000 u.m., que ingresa a un plan de pensión a la edad $x < \alpha$, exprese, en términos de las funciones conmutativas para la pensión, el valor presente actuarial de

a. una anualidad por retiro de 1% del salario promedio de los últimos tres años para cada año completo de servicios

b. una anualidad por retiro de 1% del salario promedio de los tres últimos años para cada año de servicios incluyendo cualquier fracción.

10.15 Si, en el ejercicio 10.14 (b), existe una condición adicional de que, para poder calificar para el retiro, el participante debe haber servido por lo menos durante 10 años, ¿cómo se transforma la fórmula?

10.16 Si las contribuciones de un porcentaje c nivelado de los salarios futuros deben ser equivalente a la indemnización por retiro del ejercicio 10.14 (b), obtenga una fórmula para c en términos de funciones conmutativas para pensión.

10.17 Exprese las fórmulas que se dieron en el ejemplo 10.1 en términos de funciones conmutativas para pensión.

10.18 Exprese la fórmula del ejemplo 10.2 en términos de funciones conmutativas para pensión.

10.19 Reescriba las fórmulas que se dieron en

a. Ejemplo 10.7
b. Ejemplo 10.9

en términos de funciones conmutativas para pensión.

Misceláneos

10.20 Exprese el valor presente actuarial de la indemnización acreditada en el año de la edad 62 a la 63 para un participante de 62 años que esta cubierto por el plan del ejemplo 10.10 y tiene un salario de 30,000 u.m.

10.21 Suponiendo una escala salarial creciente, ¿cuál de los siguientes dos valores presentes actuariales, con respecto a un nuevo participante de 25 años de edad con un salario de 20,000 u.m., es el más grande?

A. $400\dfrac{(1/2)\,{}^{Za}\bar{M}^{r}_{25}+{}^{Za}\bar{R}^{r}_{26}}{{}^{s}D^{(r)}_{25}}$

donde $m=5$ para ${}_{m}Z_{y}$.

B. $400\dfrac{(1/2)\,{}^{Sa}\bar{M}^{r}_{25}+{}^{S'a}\bar{R}^{r}_{26}}{{}^{s}D^{(r)}_{25}}$

MODELOS DE RIESGO COLECTIVO PARA UN SOLO PERIODO

11.1 Introducción

En los Capítulos del 3 al 10 consideramos modelos para seguros de largo plazo. La inclusión del interés en estos modelos fue esencial. En este capítulo retornamos a un tópico introducido en el Capítulo 2, denominado, pólizas de seguro a corto plazo. Consecuentemente, ignoraremos el interés. El propósito de este capítulo es presentar una alternativa al modelo de la póliza individual discutido en el Capítulo 2.

El modelo individual de riesgo que se desarrolló en el Capítulo 2 se construyó considerando pólizas individuales y las reclamaciones producidas por cada póliza. Después se obtuvieron las reclamaciones agregadas al sumar sobre todas las pólizas del portafolio.

En el ***modelo de riesgo colectivo*** el concepto básico es el del proceso aleatorio que genera reclamaciones para un portafolio de pólizas. Este proceso se caracteriza en términos del portaflio como un todo en lugar de pólizas individuales que componen en si mismas el portafolio. La formulación matemática es la siguiente: sea N el número de reclamaciones producidas mediante un portafolio de pólizas en un cierto periodo de tiempo. Sea X_1 el monto de la primera reclamación, X_2 el monto de la segunda reclamación y así consecutivamente. Entonces

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \tag{11.1.1}$$

representa las reclamaciones agregadas generadas por el portafolio para el periodo bajo estudio. El número N de reclamaciones, es una variable aleatoria y está asociada con la frecuencia de la reclamación. Además, los montos individuales de las reclamaciones X_1, X_2,... también son variables aleatorias y se dice que miden la severidad de las reclamaciones.

Para poder hacer manejable el modelo, haremos dos supuestos fundamentales:

1. $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas.
2. Las variables aleatorias $N, X_1, X_2, \ldots$ son mutuamente independientes.

La expresión (11.1.1) se denominará suma aleatoria y los supuestos (1) y (2) siempre serán hechos respecto a sus componentes.

Un primer paso al explorar este modelo alternativo será el estudio de la distribución de S en términos de la distribución de N y de la distribución común de las X_i's. El valor esperado, la varianza y la *f.g.m.* para S se expresarán en términos de los grupos correspondientes de las distribuciones básicas. También se dará una fórmula para expresar la *f.d.* de S mediante la distribución de N y de las convoluciones de la distribución del monto de las reclamaciones.

El segundo paso, que se presenta en la Sección 11.3, es la discusión de las selecciones para la distribución de N y la distribución común de las X_i's. Generalmente, se selecciona para N una distribución Poisson o una distribución binomial negativa. Para la distribución del monto de reclamaciones, puede utilizarse una distribución normal, gamma u otras; quizás empíricas. Cuando se elige una distribución Poisson para N, la distribución de S se denomina una ***distribución Poisson compuesta***; cuando se selecciona una distribución binomial negativa para N, la distribución de S se denomina ***distribución binomial compuesta negativa***. Estas dos clases de distribuciones proporcionan un buen número de elecciones para modelar la distribución de las reclamaciones agregadas S.

Las distribuciones Poisson compuestas tienen un número de propiedades útiles que se presentan en dos teoremas en la Sección 11.4. El primer teorema muestra que la combinación de un número de portafolios, en donde cada uno de ellos tiene una distribución Poisson compuesta de las reclamaciones agregadas, también éste tendrá una distribución Poisson compuesta de las reclamaciones agregadas. El segundo teorema establece los fundamentos para el cálculo simplificado de las distribuciones Poisson compuestas.

En la sección final se indica que si S tiene una distribución Poisson compuesta o una binomial compuesta negativa, entonces la variable estandarizada

$$\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}}$$

tiene aproximadamente una distribución normal estándar cuando el número esperado de reclamaciones es grande. Esto puede interpretarse como una versión del teorema de límite central. Por lo tanto la distribución normal proporciona una aproximación de la distribución de S cuando el número esperado de reclamaciones es grande. Una segunda manera de aproximar la distribución de S es mediante una distribución gama trasladada. Esta tiene la ventaja de reconocer el sesgo en la distribución de S y, en realidad, el ajuste se alcanzaría al igualar los primeros tres momentos.

La función generadora de momentos es una herramienta importante para desarrollar la teoría de este capítulo. Estas funciónes proporcionan un medio simple pero poderoso para que el lector aprenda un conocimiento práctico de la teoría del riesgo colectivo. Para los lectores que no hayan trabajado con ellas recientemente, sería recomendable que revisarán las medias y varianzas de la *f.g.m.* de las distribuciones de probabilidad más ampliamente utilizadas y que se resumen en el Anexo 5.

11.2 La distribución de las reclamaciones agregadas

En esta sección veremos cómo la distribución de las reclamaciones agregadas en un periodo fijo pueden obtenerse a partir de la distribución del número de reclamaciones y de la distribución de los montos de las reclamaciones individuales.

Permita que $P(x)$ represente la *f.d.* común de las X_i's, las cuales son independientes e idénticamente distribuidas. Sea X una variable aleatoria con su *f.d.*; donde

$$p_k = E\left[X^k\right] \tag{11.2.1}$$

que representa el momento k respecto al origen y

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \tag{11.2.2}$$

la *f.g.m.* de X. Además, sea

$$M_N(t) = E[e^{tN}] \tag{11.2.3}$$

la cual representa la *f.g.m.* de la distribución del número de reclamaciones, y sea

$$M_S(t) = E[e^{tS}] \tag{11.2.4}$$

que denota la *f.g.m.* de las reclamaciones agregadas. La *f.d.* de las reclamaciones agregadas se representará mediante *F(x)*.

Usando (2.2.10) y (2.2.11), conjuntamente con los supuestos (1) y (2) de la Sección 11.1, obtenemos

$$E[S] = E[E[S|N]] = E[p_1 N] = p_1 E[N] \tag{11.2.5}$$

y

$$\begin{aligned} Var[S] &= E[Var[S|N]] + Var[E[S|N]] \\ &= E[N\ Var[X]] + Var[p_1 N] \\ &= E[N]\ Var[X] + p_1^2\ Var[N] \end{aligned} \tag{11.2.6}$$

donde $Var[X] = p_2 - p_1^2$

El resultado propuesto en (11.2.5), no es sorprendente de que el valor esperado de las reclamaciones agregadas, es el producto de los montos de las reclamaciones individuales esperadas y del número esperado de reclamaciones. La expresión (11.2.6) para la varianza de las reclamaciones agregadas también tiene una interpretación natural. La varianza de las reclamaciones agregadas es la suma de dos componentes, en donde el primero se atribuye a la variabilidad de los montos de las reclamaciones individuales y el segundo a la variabilidad del número de reclamaciones.

De manera similar derivamos una expresión para la *f.g.m.* de S:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E[e^{tS}] = E[E[e^{tS}|N]] \\ &= E[M_X(t)^N] = E[e^{N \log M_X(t)}] \\ &= M_N(\log M_X(t)) \end{aligned} \tag{11.2.7}$$

Ejemplo 11.1:

Suponga que N tiene una distribución geométrica, es decir, la *f.p.* de N está dada por

$$\Pr(N = n) = p\, q^n \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{11.2.8}$$

donde $0<q<1$ y $p=1-q$. Determine $M_S(t)$ en términos de $M_X(t)$.

Solución:
Como

$$M_N(t) = E[e^{t\,N}] = \sum_{n=0}^{\infty} p(q\ e^t)^n = \frac{p}{1-q\ e^t}$$

la fórmula (11.2.7) nos dice

$$M_S(t) = \frac{p}{1-q\ M_X(t)} \tag{11.2.9}$$

Para derivar la *f.d.* de S distinguimos de acuerdo a cuántas reclamaciones ocurren y usamos la ley de la probabilidad total,

$$\begin{aligned} F(x) = \Pr(S \le x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S \le x | N = n) \Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) \Pr(N = n) \end{aligned} \tag{11.2.10}$$

Pero en términos de la operación de convolución definida en la Sección 2.3, podemos escribir

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) &= P * P * P * \cdots * P(x) \\ &= P^{*\,n}(x) \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

llamada la convolución n-ésima de P. Por lo tanto (11.2.10) se transforma

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*\,n}(x) \Pr(N = n) \tag{11.2.12}$$

Si la distribución de los montos de las reclamaciones individuales es discreta con una *f.p.* $p(x) = \Pr(X = x)$, la distribución de las reclamaciones agregadas también es discreta. Por analogía con la deducción anterior, la *f.p.* de S puede obtenerse directamente como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x) \Pr(N = n) \tag{11.2.13}$$

Donde

$$p^{*n}(x) = p * p * \cdots * p(x) = \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x) \tag{11.2.11A}$$

Aquí el signo de desigualdad en el símbolo de probabilidad de (11.2.11) tiene que reemplazarse por el signo de igualdad.

Ejemplo 11.2:

Considere un portafolio de seguros que producirá 0,1,2 o 3 reclamaciones en un periodo de tiempo fijo con probabilidades 0.1, 0.3, 0.4 y 0.2 respectivamente. Una reclamación individual será por la cantidad de 1, 2 o 3 con probabilidades de 0.5, 0.4 y 0.1 respectivamente. Calcule la *f.p.* y la *f.d.* de las reclamaciones agregadas.

Solución:

Los cálculos se resumen abajo. Sólo se muestran las partidas diferentes de cero.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x	$p^{*0}(x)$	$p^{*1}(x) = p(x)$	$p^{*2}(x)$	$p^{*3}(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	1.0	—	—	—	0.1000	0.1000
1	—	0.5	—	—	0.1500	0.2500
2	—	0.4	0.25	—	0.2200	0.4700
3	—	0.1	0.40	0.125	0.2150	0.6850
4	—	—	0.26	0.300	0.1640	0.8490
5	—	—	0.08	0.315	0.0950	0.9440
6	—	—	0.01	0.184	0.0408	0.9848
7	—	—	—	0.063	0.0126	0.9974
8	—	—	—	0.012	0.0024	0.9998
9	—	—	—	0.001	0.0002	1.0000
n	0	1	2	3	—	—
$\Pr(N = n)$	0.1	0.3	0.4	0.2	—	—

Como existen al máximo tres reclamaciones y cada una produce un monto de reclamación, podemos limitar los cálculos a x=0, 1, 2,..., 9.

En la columna (2) se enlistan las *f.p.* de una distribución degenerada con toda la masa de probabilidad en 0. La columna (3) enlista la *f.p.* de la variable aleatoria del monto de las reclamaciones individuales. Las columnas (4) y (5) se obtienen en forma recursiva al aplicar

$$p^{*(n+1)}(x) = \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} = x)$$

$$= \sum_y \Pr(X_{n+1} = y) \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x - y)$$

$$= \sum_y p(y) p^{*n}(x - y) \qquad (11.2.14)$$

Como sólo son posibles tres diferentes montos de reclamaciones, la evaluación de (11.2.14) involucra una suma de 3 o menos términos. En seguida, (11.2.13) se utiliza para calcular la *f.p.* que se exhibe en la columna (6). Para este paso, es conveniente registrar la *f.p.* de N en la última fila de resultados. Finalmente, los elementos de la columna (7) se obtienen como sumas parciales de la columna (6). Un enfoque alternativo, que no se ilustra aquí, habría sido realizar las convoluciones en términos de las *f.d.*, obtener $F(x)$ de (11.2.12), y finalmente calcular $f(x) = F(x) - F(x-1)$.

∇

Si la distribución de los montos de las reclamaciones es continua, no puede concluirse que la distribución de S es continua. Si $\Pr(N = 0) > 0$, la distribución de S será del tipo mixto, es decir, tendrá una masa de probabilidad de 0 y será continua en cualquier otra parte. Esta idea se ilustra a continuación.

Ejemplo 11.3:

En el ejemplo 11.1, da el supuesto de que

$$P(x) = 1 - e^{-x} \qquad x > 0$$

es decir, la distribución de los montos de las reclamaciones individuales es exponencial con media 1. Después demuestre que

$$M_S(t) = p + q\frac{p}{p-t} \tag{11.2.15}$$

e interprete la fórmula.

Solución:
Primero reescribimos (11.2.9) como sigue:

$$M_S(t) = p + q\frac{p\, M_X(t)}{1 - q\, M_X(t)}$$

Después sustituimos

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x} dx = (1-t)^{-1}$$

para obtener (11.2.15).

Como 1 es la *f.g.m.* de la constante 0 y $p/(p-t)$ es la *f.g.m.* de la distribución exponencial con *f.d.* $1 - e^{-px}$, $x > 0$, la fórmula (11.2.15) puede interpretarse como el promedio ponderado (con ponderadores p y q, respectivamente). Se sigue que la *f.d.* de S es el promedio ponderado correspondiente de las distribuciones. Por tanto, para $x > 0$

$$F(x) = p(1) + q\,(1 - e^{-px}) = 1 - qe^{-px} \tag{11.2.16}$$

Esta distribución es de tipo mixto. Su *f.d.* se representa en la figura 11.1.

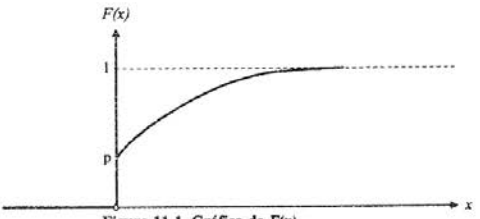


Figura 11.1 Gráfica de *F(x)*

11.3 Selección de distribuciones básicas

En esta sección discutiremos el proceso de seleccionar la distribución del número de reclamaciones N y la distribución común de las X_i's. Como se aplican diferentes consideraciones a estas dos selecciones, se dedicará una subsección para cada una.

11.3.1 La distribución de N

Una elección para la distribución de N es la Poisson con *f.p.* dada por

$$\Pr(N=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{11.3.1}$$

donde $\lambda>0$. Para la distribución Poisson $E[N]=Var[N]=\lambda$. Con esta elección para la distribución de N, la distribución de S es una distribución Poisson compuesta. Usando (11.2.5) y (11.2.6), tenemos que

$$E[S]=\lambda\, p_1 \tag{11.3.2}$$

y

$$Var[S]=\lambda\, p_2 \tag{11.3.3}$$

Sustituyendo la *f.g.m.* de la distribución Poisson

$$M_N(t)=e^{\lambda\,(e^t-1)} \tag{11.3.4}$$

en (11.2.7), obtenemos la *f.g.m.* de la distribución Poisson compuesta

$$M_S(t)=e^{\lambda[M_X(t)-1]} \tag{11.3.5}$$

La distribución Poisson compuesta tiene muchas características atractivas, algunas de ellas se discutirán en la Sección 11.4.

Cuando la varianza del número de reclamaciones excede su media, la distribución Poisson no es apropiada. En esta situación, se sugiere el uso de la distribución binomial negativa. La distribución binomial negativa tiene una *f.p.* dada por

$$\Pr(N=n)=\binom{r+n-1}{n}p^r q^n \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{11.3.6}$$

Esta distribución tiene dos parámetros: $r>0;\ 0<p<1,\ q=1-p$. Para esta distribución, tenemos

$$M_N(t)=\left(\frac{p}{1-q\,e^t}\right)^r \tag{11.3.7}$$

$$E[N]=\frac{r\,q}{p} \tag{11.3.8}$$

y

$$Var[N]=\frac{r\,q}{p^2} \tag{11.3.9}$$

Cuando se elige una distribución binomial negativa para N, la distribución de S es una distribución binomial compuesta negativa. Sustituyendo de (11.3.8) y (11.3.9) en (11.2.5) y (11.2.6), respectivamente, tenemos

$$E[S]=\frac{r\,q}{p}p_1 \tag{11.3.10}$$

y

$$Var[S]=\frac{r\,q}{p}p_2+\frac{r\,q^2}{p^2}p_1^2 \tag{11.3.11}$$

Sustituyendo de (11.3.7) en (11.2.7), obtenemos

$$M_S(t)=\left[\frac{p}{1-q\,M_X(t)}\right]^r \tag{11.3.12}$$

Observamos que la familia de distribuciones geométricas utilizadas en los ejemplos 11.1 y 11.3 es un caso especial $(r=1)$ de la familia de dos parámetros de las distribuciones binomiales negativas.

Se puede generar una familia de distribuciones para el número de reclamaciones al suponer que el parámetro Λ de la Poisson es una variable aleatoria con *f.d.p.* $u(\lambda)$, $\lambda > 0$, y que la distribución condicional de N, dado $\Lambda=\lambda$, es Poisson con parámetro λ. Existen varias situaciones en las que esto podría ser una forma útil de considerar la distribución de N. Por ejemplo, considere una población de asegurados en la que varias clases de asegurados dentro de la población generen números de reclamaciones de acuerdo con las distribuciones Poisson, pero los parámetros Poisson pudirán ser diferentes para las distintas clases. Si la frecuencia relativa de los valores de λ está dada por $u(\lambda)$, podemos adoptar esta idea. Usando la ley de la probabilidad total, tenemos

$$\begin{aligned} \Pr(N=n) &= \int_0^\infty \Pr(N=n|\Lambda=\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} u(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{11.3.13}$$

Aún más, usando (2.2.10) y (2.2.11), tenemos

$$E[N] = E[E[N|\Lambda]] = E[\Lambda] \tag{11.3.14}$$

$$\begin{aligned} Var[N] &= E[Var[N|\Lambda]] + Var[E[N|\Lambda]] \\ &= E[\Lambda] + Var[\Lambda] \end{aligned} \tag{11.1.15}$$

y

$$M_N(t) = E[e^{tN}] = E[E[e^{tN}|\Lambda]] = E[e^{\Lambda(e^t-1)}] = M_\Lambda(e^t-1) \tag{11.3.16}$$

La igualdad,

$$E[e^{tN}|\Lambda] = e^{\Lambda(e^t-1)}$$

sigue de la hipótesis de que la distribución condicional de N, dado Λ, es Poisson con parámetro Λ.

Por tanto, al igual que en el caso de la distribución binomial negativa, $E[N] < Var[N]$. De hecho, la distribución binomial negativa puede obtenerse en esta forma, lo que se demostrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.4:

Suponga que $u(\lambda)$ es la *f.d.p.* gama con parámetros α y β,

$$u(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \qquad \lambda > 0 \tag{11.3.17}$$

donde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

Demuestre que

a. La distribución marginal de N, es una binomial negativa con parámetros

$$r = \alpha, \qquad p = \frac{\beta}{1+\beta} \tag{11.3.18}$$

b. $E[\Lambda] = \alpha/\beta$ y $Var[\Lambda] = \alpha/\beta^2$, y sustituyendo en (11.3.14) y (11.3.15), verifique (11.3.8) y (11.3.9).

Solución:

Recuerde que la *f.g.m.* de la variable aleatoria Λ con *f.d.p.* gama es al igual que en (11.3.17)

$$M_{\Lambda}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha} \tag{11.3.19}$$

a: Usando esta forma en (11.3.16) tenemos

$$M_N(t) = M_{\Lambda}(e^t - 1) = \left[\frac{\beta}{\beta - (e^t - 1)}\right]^{\alpha} = \left[\frac{\beta/(\beta+1)}{1 - [1 - \beta/(\beta+1)]\, e^t}\right]^{\alpha}$$

La comparación de esta última expresión con (11.3.7) confirma que la distribución de N es una binomial negativa con parámetros $r = \alpha$,

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}$$
$$q = 1 - p = \frac{1}{1+\beta} \tag{11.3.20}$$

b: Usando otra vez (11.3.19)

$$E[\Lambda] = \frac{d}{dt} M_{\Lambda}(t)\Big|_{t=0} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{11.3.21}$$

$$Var[\Lambda] = \frac{d^2}{dt^2} M_{\Lambda}(t)\Big|_{t=0} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \tag{11.3.22}$$

La sustitución de éstas en (11.3.14) y (11.3.15) produce

$$E[N] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r\,q}{p}$$

al igual que en (11.3.8) y

$$Var[N] = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{r\,q}{p}\left[1 + \frac{q}{p}\right] = \frac{r\,q}{p^2}$$

al igual que en (11.3.9)

∇

El cuadro 11.1 resume la información pertinente sobre las distribuciones compuestas que resultan de las selecciones para N discutidas aquí.

Cuadro 11.1 Distribuciones compuestas de S

$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ $\qquad P^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$

$N, X_1, X_2, \ldots$, son variables aleatorias independientes.
Cada X_j tiene *f.d* $P(x)$, *f.g.m.* $M_X(t)$ y $p_k = E[X^k]$ $k=1, 2, \ldots$

$$\sum_{j=0}^{x} p(x-j)P^{*(n-1)}(j) \quad \acute{o}$$

$$P^{*n}(x) = \int_0^x p(x-y)P^{*(n-1)}(y)dy$$

Definiciones	Función de distribución $F_S(x)$	Restricciones en los Parámetros	Función Generatriz de momentos	Media	Varianza
General	$\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N=n)P^{*n}(x)$	—	$M_N(Log\ M_X(t))$	$p_1\ E[N]$	$E[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2 Var[N]$
Poisson Compuesta	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} P^{*n}(x)$	$\lambda > 0$	$e^{\lambda[M_X(t)-1]}$	λp_1	λp_2
Bonomial Negativa Compuesta	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} p^r q^n P^{*n}(x)$	$0<p<1$ $q=1-p$ $r>0$	$\left[\frac{p}{1-q\,M_X(t)}\right]^r$ $q\,M_X(t)<1$	$\frac{rqp_1}{p}$	$\frac{r\,q\,p_2}{p} + \frac{r\,q^2 p_1^2}{p^2}$

11.3.2 Distribución del monto de reclamaciones individuales

Con base en (11.2.12) observamos que pueden requerirse las convoluciones de la distribución del monto de las reclamaciones individuales. Por lo tanto, es conveniente seleccionar, cuando sea posible, esa distribución de una familia de distribuciones para la que se puedan calcular fácilmente las convoluciones ya sea mediante fórmula o numéricamente. Por ejemplo, si el monto de reclamaciones tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces su n-ésima convolución es la distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. Para muchos tipos de seguros, la variable aleatoria del monto de las reclamaciones es sólo positiva y su distribución está sesgada a la derecha. Para estos seguros podríamos escoger una distribución gama que también tiene estas propiedades. La n-ésima convolución de una distribución gama con parámetros α y β es, también, una distribución gama pero con parámetros $n\alpha$ y β. Este hecho puede confirmarse notando en (11.3.19) que $M_X(t) = [\beta/(\beta - t)]^{\alpha}$ y por tanto la *f.g.m.* asociada con $P^{*n}(x)$ es

$$M_X(t)^n = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{n\alpha} \qquad t < \beta \tag{11.3.23}$$

Si los montos de las reclamaciones tienen una distribución con parámetro 1, la *f.d.p.* está dada por

$$p(x) = e^{-x} \qquad x > 0$$

esto puede considerarse como una distribución Gama con $\alpha=\beta=1$. Entonces usando (11.3.19), podemos concluir que la n-esima convolución es una distribución Gama con parámetros $\alpha = n$, $\beta = 1$, entonces:

$$p^{*n}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} \qquad x > 0 \tag{11.3.24}$$

Para obtener una expresión para $P^{*n}(x)$, integramos por partes n veces como sigue:

$$1-P^{*n}(x)=\int_x^\infty \frac{y^{n-1}e^{-y}}{(n-1)!}dy$$

$$=-\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y}\Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{y^{n-2}e^{-y}}{(n-2)!}dy$$

$$=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}+[1-P^{*(n-1)}(x)]$$

$$=e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!} \qquad (11.3.25)$$

Después, utilizando la fórmula (11.2.12), tenemos:

$$1-F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(N=n)\,e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!} \qquad x>0 \qquad (11.3.26)$$

Este caso de distribución exponencial demuestra que aun suponiendo distribuciones simples, la distribución de las reclamaciones agregadas pueden no tener una forma simple. Por lo tanto, podría ser más práctico seleccionar una distribución discreta del monto de las reclamaciones y calcular numéricamente las convoluciones requeridas. Para las distribuciones Poisson compuestas se ha establecido que el método de convolución puede abreviarse o, alternativamente, puede derivarse mediante el uso de una fórmula recursiva para calcular directamente la función de distribución de S. Estos algoritmos de cálculo son discutidos en la sección siguiente.

11.4 Propiedades de la distribución de Poisson compuesta

En esta sección discutiremos algunas propiedades matemáticas de la distribución Poisson compuesta. Se presentarán dos teoremas. El primero se refiere a la suma de las variables aleatorias independientes, cada una con una distribución Poisson compuesta. El teorema demuestra que la suma también tiene una distribución Poisson compuesta, y esto representa algunas consecuencias prácticas inmediatas. El segundo teorema conduce a un método de evaluación de la distribución Poisson compuesta que es una alternativa al método básico ilustrado en el Ejemplo 11.2.

Además, veremos que existe una forma alternativa para definir la distribución Poisson compuesta cuando la distribución del monto de las reclamaciones es discreta. En lugar de especificar el parámetro λ y la *f.d.* de $P(x)$, podemos definir la distribución en términos de los valores discretos que toman los montos de las reclamaciones individuales y los parámetros de las variables aleatorias de Poisson independientes asociadas con cada monto de reclamación posible.

Teorema 11.1:

Si $S_1, S_2, \ldots, S_m$ son variables aleatorias mutuamente independientes tales que S_i tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro λ_i, y *f.d.* del monto de reclamaciones $P_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, m$ entonces $S=S_1+S_2+\ldots+S_m$ tiene una distribución Poisson compuesta con

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tag{11.4.1}$$

y

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x) \tag{11.4.2}$$

Demostración:

Dejamos que $M_i(t)$ represente la *f.g.m.* de $P_i(x)$. De acuerdo con (11.3.5), la *f.g.m.* de S_i es

$$M_{S_i}(t) = \exp\{\lambda_i[M_i(t) - 1]\}$$

Debido a la independencia asumida de $S_1,\ldots,S_m$, la *f.g.m.* de su suma es

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{m} M_{S_i}(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i[M_i(t) - 1]\right\}$$

Finalmente, rescribimos el exponente para obtener

$$M_S(t) = \exp\left\{\lambda\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_1}{\lambda} M_i(t) - 1\right]\right\} \tag{11.4.3}$$

donde

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Como este es la *f.g.m.* de la distribución Poisson compuesta, especificada por (11.4.1) y (11.4.2), se infiere el teorema.

Este resultado tiene dos consecuencias importantes para la construcción de modelos de seguros. Primero, si combinamos m portafolios de seguros, en los que las reclamaciones agregadas de los portafolios respectivos tienen distribuciones de Poisson compuestas y son mutuamente independientes, entonces las reclamaciones agregadas del portafolio combinado tendrán otra vez una distribución Poisson compuesta. Segundo, podemos considerar un portafolio de seguros únicos para un periodo de m años. Aquí supondremos que existe independencia entre las m reclamaciones agregadas anuales y que las reclamaciones agregadas para cada año tienen una distribución Poisson compuesta. No es necesario que las distribuciones de reclamaciones agregadas anuales sean idénticas. Después del Teorema 11.1 se infiere que las reclamaciones totales para el periodo de n años tendrán una distribución Poisson compuesta.

Ejemplo 11.5:

Sean $x_1,x_2,\ldots,x_m$, m números diferentes y suponga que $N_1,N_2,\ldots,N_m$ son variables aleatorias mutuamente independientes. Además, suponga que N_i $(i=1,2,\ldots,m)$ tiene una distribución Poisson con parámetro λ_i ¿Cuál es la distribución de

$$x_1N_1 + x_2N_2 + \cdots + x_mN_m ? \tag{11.4.4}$$

Solución:

Al interpretar que x_iN_i tiene una distribución Poisson compuesta con Parámetro de Poisson λ_i y una distribución del monto de reclamaciones degenerada en x_i, podemos aplicar el Teorema 11.1 para establecer que la suma de (11.4.4) tiene una distribución Poisson compuesta con

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

y *f.p.* del monto de reclamaciones $p(x)$ en donde

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} & x = x_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{11.4.5}$$

Verificaremos ahora que cada distribución Poisson compuesta con una distribución discreta del monto de reclamaciones puede representarse como una suma con la forma de (11.4.4). Permitimos que $x_1,x_2,\ldots,x_m$ representen los valores discretos de los montos de reclamaciones individuales y que

$$\pi_i = p(x_i) \qquad i = 1,2,\ldots,m \tag{11.4.6}$$

represente sus probabilidades respectivas. Sea N_i el número de términos de (11.1.1) que son iguales a x_i. Entonces reuniendo los términos observamos que

$$S = x_1N_1 + x_2N_2 + \cdots + x_mN_m \tag{11.4.7}$$

En general, las N_i's de (11.4.7) son variables aleatorias dependientes. Sin embargo, en el caso especial de una distribución de Poisson compuesta de S, son independientes, como se demostrará en el Teorema 11.2.

Antes de enunciar el Teorema 11.2, citaremos algunas propiedades de la ***distribución multinomial*** que se utilizarán en la demostración. Para la multinomial, cada una de las n pruebas independientes resultará en uno de m resultados diferentes. La probabilidad de que una prueba termine en el resultado i se representa con π_i. Representaremos la variable aleatoria que contabiliza el número de resultados i en n pruebas mediante N_i. Entonces

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \pi_i, \quad n = \sum_{i=1}^{m} N_i$$

y la *f.p.* conjunta de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ está dada por

$$\begin{aligned} &\Pr[N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_m = n_m] \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \cdots \pi_m^{n_m}; \end{aligned} \tag{11.4.8}$$

utilizando (11.4.8) obtenemos

$$E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right)\right] = \left[\pi_1 e^{t_1} + \pi_2 e^{t_2} + \cdots + \pi_m e^{t_m}\right]^n \tag{11.4.9}$$

La distribución discreta multivariada con *f.p.* dada por (11.4.8) y *f.g.m.* dada por (11.4.9) se denomina una distribución multinomial con parámetros $n, \pi_1, \ldots, \pi_m$.

Teorema 11.2:

Si S, como se presenta en (11.4.7), tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro λ y *f.p.* de los montos de reclamaciones dados por la *f.p.* discreta mostrada en (11.4.6), entonces

a) $N_1,N_2,...,N_m$ son mutuamente independientes.
b) N_i tiene una distribución Poisson con parámetro $\lambda_i=\lambda\,\pi_i$, $i = 1,2,...,m$.

Demostración:

Empezamos definiendo la *f.g.m.* de la distribución conjunta de $N_1,N_2,...,N_m$ utilizando (2.2.10) para las esperanzas condicionales. Nótese que para un número fijo de reclamaciones independientes (pruebas) en donde cada reclamación resulta en 1 de m montos de reclamación, los números de las reclamaciones de cada monto tiene una distribución multinomial con parámetros n, π_1, π_2,..., π_m. . Por lo tanto, dado

$$N=\sum_{i=1}^{m} N_i = n$$

la distribución condicional de $N_1,N_2,...,N_m$ es distribución multinomial. Para este caso, utilizamos (11.4.9) para obtener

$$E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i\, N_i\right)\;\middle|\; N=n\right]\Pr(N=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\pi_1 e^{t_1}+\cdots+\pi_m e^{t_m})^n\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \qquad (11.4.10)$$

Realizamos ahora la sumatoria requerida reconociendo (11.4.10) como una expansión de series de Taylor de una función exponencial. Obtenemos

$$E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right)\right]=\exp(-\lambda)\exp\left(\lambda\sum_{i=1}^{m}\pi_i\, e^{t_i}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\exp[\lambda\,\pi_i(e^{t_i}-1)] \qquad (11.4.11)$$

Como esta es el producto de m funciones cada una de la variable única t_i, la fórmula (11.4.11) muestra la mutua independencia de las N_is. Además, si establecemos $t_i = t$, y $t_j = 0$ para $j \neq i$ en (11.4.11), obtenemos

$$E[\exp(t\, N_i)] = \exp[\lambda\ \pi_i(e^t - 1)], \tag{11.4.12}$$

que es la *f.g.m.* de la distribución de Poisson con parámetro $\lambda\pi_i$. Esto comprueba el enunciado (b).

La fórmula (11.4.7) y el Teorema 11.2 constituyen un método alternativo para tabular una distribución Poisson compuesta con una distribución discreta del monto de las reclamaciones. Primero, calculamos las *f.p's* de $x_1N_1, x_2N_2,\ldots, x_mN_m$. Como los registros de x_iN_i son multiplos de x_i, diferentes a cero para la *f.p.* y son probabilidades Poisson. Entonces se calcula la convolución de estas m distribuciones para obtener la *f.p.* de S. Este método es particularmente conveniente si el número m, de diferentes montos de reclamación, es pequeño. Aun cuando se haya seleccionado una distribución continua de los montos de reclamaciones individuales, algunas veces, se puede utilizar una aproximación discreta con el método alternativo para producir una aproximación satisfactoria de la distribución de S. En el siguiente ejemplo se comparan los métodos básicos y alternativos para tabular la distribución de S.

Ejemplo 11.6:

Suponga que S tiene una distribución Poisson compuesta con $\lambda = 0.8$ y los montos de reclamación individuales que son *1, 2* o *3* con probabilidades 0.25, 0.375 y 0.375 respectivamente. Calcule $f(x) = Pr[S = x]$ para $x = 0, 1,\ldots, 6$.

Solución:

Para el método básico los cálculos son similares a los del ejemplo 11.2 y se resumen abajo.

Cálculos del método básico

(1) x	(2) $p^{*0}(x)$	(3) $p(x)$	(4) $p^{*2}(x)$	(5) $p^{*3}(x)$	(6) $p^{*4}(x)$	(7) $p^{*5}(x)$	(8) $p^{*6}(x)$	(9) $f(x)$
0	1	—	—	—	—	—	—	0.449329
1	—	0.250	—	—	—	—	—	0.089866
2	—	0.375	0.062500	—	—	—	—	0.143785
3	—	0.375	0.187500	0.015625	—	—	—	0.162357
4	—	—	0.328125	0.070313	0.003906	—	—	0.049905
5	—	—	0.281250	0.175781	0.023438	0.000977	—	0.047360
6	—	—	0.140625	0.263672	0.076172	0.007324	0.000244	0.030923
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
$e^{-0.8}\frac{(0.8)^n}{n!}$	0.449329	0.359463	0.143785	0.038343	0.007669	0.001227	0.000164	

Para el método alternativo delineado en esta sección, se exhiben los cálculos en el siguiente cuadro.

Cálculos del método alternativo

(1) x	(2) $\Pr[N_1 = x]$	(3) $\Pr[2N_2 = x]$	(4) $\Pr[3N_3 = x]$	(5) $\Pr[N_1 + 2N_2 = x]$ $=(2)*(3)$	(6) $\Pr[N_1 + 2N_2 + 3N_3 = x]$ $=(4)*(5)=f(x)$
0	0.818731	0.740818	0.740818	0.606531	0.449329
1	0.163746	—	—	0.121306	0.089866
2	0.016375	0.222245	—	0.194090	0.143785
3	0.001092	—	0.222245	0.037201	0.162358
4	0.000055	0.033337	—	0.030974	0.049906
5	0.000002	—	—	0.005703	0.047360
6	0.000000	0.003334	0.033337	0.003288	0.030923

i	1	2	3
λ_i	0.2	0.3	0.3
	$\frac{e^{-0.2}(0.2)^x}{x!}$	$\frac{e^{-0.3}(0.3)^{x/2}}{(x/2)!}$	$\frac{e^{-0.3}(0.3)^{x/3}}{(x/3)!}$

Para la aplicación de las fórmulas de esta sección, notamos que $m = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $\lambda_1 = \lambda\, p(1) = 0.2$, $\lambda_2 = \lambda\, p(2) = 0.3$ y $\lambda_3 = \lambda\, p(3) = 0.3$. Primero, calculamos las columnas (2), (3) y (4). Los registros diferentes a cero son probabilidades de Poisson. Después obtenemos la convolución de las *f.p.'s* de las columnas (2) y (3) y registramos el resultado en la columna (5). Finalmente, convolucionamos las *f.p.'s* exhibidas en las columnas (4) y (5) y registramos el resultado en la columna (6).

Recuerde que la *f.p.* completa no se exhibe en ningún conjunto de cálculos. El ejemplo requería probabilidades sólo para $x=0,1,..,6$. Sin embargo, $\Pr[S \le 6] = f(0) + f(1) + \cdots + f(6) = 0.97325$.

La Fórmula (11.4.7) y el Teorema 11.2 tienen otra implicación. En lugar de definir una distribución Poisson compuesta de S especificando el parámetro λ y la *f.d.* $P(x)$ de los montos de reclamación individual discreta, podemos definir la distribución en términos de los montos de reclamación individual posible $x_1, x_1, \ldots, x_m$ y los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de las distribuciones Poisson asociadas que se describieron en la parte (b) del Teorema 11.2. Por lo tanto para x_i existe una distribución Poisson asociada de N_i con parámetro λ_i. En términos de esta nueva definición de la distribución de S, tenemos de $E[N_i] = Var[N_i] = \lambda_i$ y la independencia de las N_i's que

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{m} x_i N_i\right] = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_i \tag{11.4.13}$$

y

$$Var[S] = Var\left[\sum_{i=1}^{m} x_i N_i\right] = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \lambda_i \tag{11.4.14}$$

La Fórmula (11.4.13) podría haberse obtenido empezando a partir de (11.3.2) y notando que

$$\lambda p_1 = \lambda \sum_{i=1}^{m} x_i \pi_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_i$$

Igualmente podemos obtener (11.4.14) a partir de (11.3.3).

En algunos casos es de utilidad, como en el Ejemplo 11.5, considerar a S como una suma de variables aleatorias mutuamente independientes $x_i N_i$, $i=1,2,\ldots,m$ en donde $x_i N_i$ tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro λ_i y distribución del monto de reclamaciones degenerado en x_i. Esta interpretación se infiere del Teorema 11.2 y subraya el método alternativo ilustrado en el ejemplo 11.6.

Existe una tercera forma, el ***método recursivo***, para evaluar una distribución Poisson compuesta. Para este método, se supone que los montos de reclamación posibles son enteros positivos, y establecemos $\lambda_i = \lambda p(i)$, $i=1,2,...$ El método recursivo se basa en la fórmula recursiva

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{x} \lambda_i f(x-i) \qquad x = 1,2,... \tag{11.4.15}$$

Luego, empezando con $f(0) = \Pr(N=0) = e^{-\lambda}$, *f(1), f(2),* se calculan en sucesión.

Nótese que la suma en (11.4.15) tiene sólo un número finito de términos diferentes a cero, ya que $f(x - i) = 0$ para $i > x$. También, si existe un monto de reclamación más grande posible, digamos m, el factor λ_i se desvanece para $i > m$. Por lo tanto el límite superior de la sumatoria será el mínimo de x y m.

Para establecer (11.4.15), consideramos primero las esperanzas condicionales $E\left[X_k \middle| X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} = x\right]$ para $k=1,2,...,n+1$. Por razones de simetría, estas cantidades son las mismas para todas estas k. Además, su suma es x. Por tanto, cada una es $x/(n+1)$. Por ejemplo, $E\left[X_1 \middle| X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} = x\right] = x/(n+1)$. Expresando esta esperanza condicional en términos de la *f.p.* común de las X_k's, obtenemos la fórmula

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} i\, p(i) p^{*n}(x-i)}{p^{*(n+1)}(x)} = \frac{x}{n+1} \tag{11.4.16}$$

Ahora empezamos con el lado derecho de (11.4.15) y procedemos de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{x} \lambda_i f(x-i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{x} \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} p^{*n}(x-i)$$

Cambiando el orden de la sumatoria, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{x} p(i) p^{*n}(x-i)$$

la que, mediante el uso de (11.4.16) reacomodada para la segunda suma, se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} p^{*(n+1)}(x) = f(x)$$

Ejemplo 11.6 (recalculado):

Para la distribución Poisson compuesta de este ejemplo, calcule $f(x)=Pr(S=x)$ por el método recursivo.

Solución:
Sustituyendo los valores de λ_i, $i = 1,2,3$, utilizados para el método alternativo de cálculo en (11.4.15) produce

$$f(x) = \frac{1}{x}[0.2f(x-1) + 0.6f(x-2) + 0.9f(x-3)] \qquad x = 1,2,\ldots$$

Recordando que $f(x) = 0$, $x < 0$, y $f(0) = e^{-\lambda} = 0.449329$, directamente reproducimos los valores de $f(x)$ dados en el método básico de cálculo.

V

11.5 Aproximaciones a la distribución de las reclamaciones agregadas

En la Sección 2.4 se empleó la distribución normal como una aproximación a la distribución de las reclamaciones agregadas en el modelo individual. La aproximación normal será la primera que se desarrolle para usarla con el modelo colectivo.

Para la distribución Poisson compuesta, los dos parámetros de la aproximación normal están dados por (11.3.2) y (11.3.3). Para la distribución binomial compuesta negativa los parámetros están dados por (11.3.10) y (11.3.11). En cada uno de los dos casos la aproximación es mejor cuando el número esperado de reclamaciones es grande, o, en otras palabras, cuando λ es grande para el caso de la Poisson compuesta y cuando r es grande para la binomial negativa. Estos dos resultados están contenidos en el Teorema 11.3, que puede interpretarse como una versión del teorema de límite central.

Teorema 11.3:

a. Si S tiene una distribución Poisson compuesta, especificada por λ y $P(x)$, entonces la distribución de

$$Z = \frac{S - \lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}} \tag{11.5.1}$$

converge a la distribución normal estándar a medida que $\lambda \to \infty$

b. Si S tiene una distribución binomial negativa compuesta, especificada por r, p y $P(x)$, entonces la distribución de

$$Z = \frac{S - r\left(\frac{q}{p}\right) p_1}{\sqrt{r\left(\frac{q}{p}\right) p_2 + r\left(\frac{q^2}{p^2}\right) p_1^2}} \tag{11.5.2}$$

converge a la distribución normal estándar a medida que $r \to \infty$

Demostración:

Demostraremos el enunciado (a) probando que

$$\lim_{\lambda \to \infty} = M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

El enunciado (b) puede probarse utilizando una estrategia similar, pero la prueba involucra pasos adicionales.

Por (11.5.1) seguimos que:

$$M_Z(t) = M_S\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda\, p_2}}\right)\exp\left\{-\frac{\lambda\, p_1\, t}{\sqrt{\lambda\, p_2}}\right\}$$

Ahora, usamos (11.3.5) para obtener

$$M_Z(t) = \exp\left\{\lambda\left[M_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda\, p_2}}\right) - 1\right] - \frac{\lambda\, p_1\, t}{\sqrt{\lambda\, p_2}}\right\} \tag{11.5.3}$$

y sustituimos la sucesión

$$M_X(t) = 1 + \frac{p_1 t}{1!} + \frac{p_2 t^2}{2!} + \cdots \tag{11.5.4}$$

Con $t/\sqrt{\lambda\, p_2}$ en lugar de t, en (11.5.3) para obtener:

$$M_Z(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{p_3}{p_2^{3/2}}t^3 + \cdots\right\} \tag{11.5.5}$$

Luego a medida que $\lambda \to \infty$, $M_Z(t)$ se aproxima a $e^{t^2/2}$ *f.g.m.* de la distribución normal estándar.

□

La distribución normal es simétrica y consecuentemente su tercer momento central es *0*, sin embargo, la distribución de las reclamaciones agregadas, frecuentemente, está sesgada. El Cuadro 11.2 muestra que el tercer momento central de S bajo cada una de las distribuciones Poisson compuesta y binomial negativa compuesta no es *0*. Para las distribuciones de montos de reclamaciones positivas $P(0) = 0$, y el tercer momento central de S es positivo en cada caso.

Para completar el cuadro 11.2 hemos utilizado las propiedades del logaritmo de una *f.g.m.*, por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}\log M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{M_X'(0)}{M_X(0)} = \mu$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}\log M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{M_X''(0)M_X(0) - M_X'(0)^2}{M_X(0)^2} = \sigma^2$$

En el ejercicio 11.19(a), se pide al estudiante que confirme la relación utilizada en la última fila del Cuadro 11.2.

Cuadro 11.2 Cálculo del tercer momento central de S

Paso	Distribución de S	
	Poisson Compuesta	Binomial Negativa Compuesta
$M_S(t)$	$\exp\{\lambda[M_X(t)-1]\}$	$\left[\frac{p}{1-qM_X(t)}\right]^r$
$\log M_S(t)$	$\lambda[M_X(t)-1]$	$r\log p - r\log[1-qM_X(t)]$
$\frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t)$	$\lambda M_X'''(t)$	$\frac{rqM_X'''(t)}{1-qM_X(t)} + \frac{3rq^2M_X'(t)M_X''(t)}{[1-qM_X(t)]^2} + \frac{2rq^3M_X'(t)^3}{[1-qM_X(t)]^3}$
$E\left[(S-E[S])^3\right]$ $= \frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t)\Big\|_{t=0}$ (*)	λp_3	$\frac{rqp_3}{p} + \frac{3rq^2p_1p_2}{p^2} + \frac{2rq^3p_1^3}{p^3}$

(*) Para $k \geq 4$, $\frac{d^k}{dt^k}\log M(t)\Big|_{t=0}$ no es el k-ésimo momento central.

Por lo tanto requerimos una aproximación más general a la distribución de las reclamaciones agregadas, una que se acomode al sesgo. Para esta segunda aproximación, empezamos con una distribución gama. Esta selección se motiva por el hecho de que la distribución gama tiene un tercer momento central positivo como lo tienen las distribuciones Poisson compuestas y las binomiales compuestas negativas con montos de reclamaciones positivos. Permitimos que $G(x:\alpha,\beta)$ represente la *f.d.* de la distribución gama con parámetros α y β; es decir:

$$G(x:\alpha,\beta)=\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt \qquad (11.5.6)$$

Después para cualquier x_0 definimos una nueva *f.d.*, representada por $H(x:\alpha,\beta,x_0)$, como

$$H(x:\alpha,\beta,x_0)=G(x-x_0:\alpha,\beta) \qquad (11.5.7)$$

Esto equivale a una traslación de la distribución $G(x:\alpha,\beta)$ por x_0. La figura 11.2 ilustra para este caso $x_0 > 0$ en donde $g(x)$, $x \geq 0$, y $h(x)$, $x \geq x_0$ representan, respectivamente, las *f.d.p.* asociadas con $G(x:\alpha,\beta)$ y $H(x:\alpha,\beta,x_0)$.

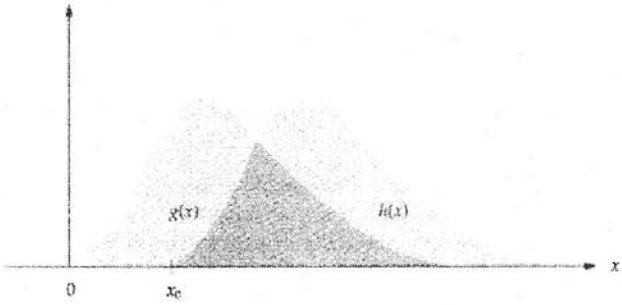


Figura 11.2 Distribución Gama Transladada

La segunda aproximación consiste en aproximar la distribución de las reclamaciones agregadas S mediante una distribución gama trasladada en la que los parámetros α, β y x_0 se seleccionan igualando el primero, el segundo y tercer momentos centrales de S con los grupos correspondientes para la distribución gama trasladada. Como los momentos centrales de la gama trasladada son los mismos que para la distribución gama básica, este procedimiento impone los requisitos de:

$$E[S] = x_0 + \frac{\alpha}{\beta} \tag{11.5.8}$$

$$Var[S] = \frac{\alpha}{\beta^2} \tag{11.5.9}$$

$$E\left[\left(S - E[S]\right)^3\right] = \frac{2\alpha}{\beta^3} \tag{11.5.10}$$

De estas obtenemos:

$$\beta = 2\frac{Var[S]}{E\left[\left(S - E[S]\right)^3\right]} \tag{11.5.11}$$

$$\alpha = 4\frac{\left(Var[S]\right)^3}{E\left[\left(S - E[S]\right)^3\right]^2} \tag{11.5.12}$$

$$x_0 = E[S] - 2\frac{\left(Var[S]\right)^2}{E\left[\left(S - E[S]\right)^3\right]} \tag{11.5.13}$$

Para una distribución Poisson compuesta este procedimiento conduce a:

$$\alpha = 4\lambda \frac{p_2^3}{p_3^2} \tag{11.5.14}$$

$$\beta = 2\frac{p_2}{p_3} \tag{11.5.15}$$

$$x_0 = \lambda p_1 - 2\lambda \frac{p_2^2}{p_3} \tag{11.5.16}$$

Advertencia:

Podemos demostrar que si $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$ y $x_0 \to -\infty$ tal que:

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{\alpha}{\beta} &= \mu \quad \text{(constante)} \\ \frac{\alpha}{\beta^2} &= \sigma^2 \quad \text{(constante)} \end{aligned} \tag{11.5.17}$$

La distribución $H(x:\alpha,\beta,x_0)$ converge a la distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Por consiguiente, la familia de distribuciones normales está contenida, como distribuciones límite, dentro de esta familia de distribuciones gama de tres parámetros. En este sentido, esta aproximación es una generalización de la aproximación normal.

Ejemplo 11.7:

Considere la distribución Poisson con parámetro λ=16. Esta es la misma que la distribución Poisson compuesta con λ=16 y una distribución del monto de reclamaciones degenerada en 1. Compare esta distribución con aproximaciones mediante:

a) Una distribución gama trasladada.
b) Una distribución normal.

Solución:

a) Aquí p_k=1, k=1,2,3 y de (11.5.14) - (11.5.16), tenemos α = 64, β = 2, x_0=16. Nótese que, a diferencia del caso de la Figura 11.2, x_0 es negativa.

b) Para la aproximación normal, utilizamos μ = 16 y σ = 4.

Los resultados que se presentan a continuación comparan las tres distribuciones. En las aproximaciones, se utilizó la corrección de la discontinuidad de la mitad del entero para aproximar $F(x)$ para x=5,10,...,40.

	Exacta	Aproximaciones	
x	$\sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-16}(16)^y}{y!}$	$G(x+16.5:64,2)$	$\Phi\left(\frac{x+0.5-16}{4}\right)$
5	0.001384	0.001636	0.004332
10	0.077396	0.077739	0.084566
15	0.466745	0.466560	0.450262
20	0.868168	0.868093	0.869705
25	0.986881	0.986604	0.991226
30	0.999433	0.999378	0.999856
35	0.999988	0.999985	0.999999
40	1.000000	1.000000	1.000000

En el caso de la distribución binomial compuesta negativa existe un argumento adicional que respalda el uso de la aproximación gama. El argumento se delinea en el Apéndice de este capítulo.

11.6 Notas y referencias

El Capítulo 2 de Seal (1969) contiene un examen amplio de la literatura sobre los modelos de riesgo colectivo, incluyendo el trabajo pionero de Lundberg sobre la distribución Poisson compuesta. Varios autores, por ejemplo, Dropkin (1959) y Simon (1960), han utilizado la distribución binomial negativa en el modelo del número de siniestros de automóvil de un conjunto de tenedores de pólizas en un periodo fijo.

En el Ejemplo 11.4 derivamos la distribución binomial negativa al suponer que el parámetro desconocido de Poisson tiene una distribución gama. Esta idea se remonta al menos hasta el trabajo de Greenwood y Yule sobre la propensión a los accidentes (1920). Una derivación alternativa en términos de un modelo de contagio se debe a Polya y Eggenberger y puede encontrarse en

el Capítulo 2 de Bühlmann (1970). Para el caso especial en donde r es un entero, la binomial negativa puede obtenerse como la distribución de un número de ensayos de Bernoulli que terminan en fracaso antes del r-ésimo éxito. Este desarrollo puede encontrarse en la mayoría de los textos acerca de la probabilidad, pero tiene escasa relevancia para el tema de este capítulo.

El Teorema 11.2 se ha conocido desde hace algún tiempo y puede estudiarse en la Sección 2, Capítulo 2 de Feller (1968). El método alternativo para calcular las probabilidades de una distribución Poisson compuesta, que se basa en el Teorema 11.2 fue sugerido por Pesonen (1967) e instrumentado por Halmstad (1976) en el cálculo de las primas para prever pérdidas adicionales. El Teorema 11.2 tiene un inverso, que no fue enunciado en la Sección 11.4. Renyi (1962) demuestra que la mutua independencia de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ implica que N tiene una distribución Poisson. Por tanto, el método alternativo de cálculo funcionará sólo para la distribución Poisson compuesta.

El método alternativo de cómputo puede, también, adoptarse para construir un modelo de simulación para las reclamaciones agregadas. En lugar de determinar los montos de reclamaciones individuales, se simulan $N_1, N_2, \ldots, N_m$ y se obtiene una realización de S directamente de la fórmula (11.4.7). Para una determinación de S, con el método básico, el número esperado de los números aleatorios requerido es $1+\lambda$. Si se utiliza el método alternativo, exactamente se requieren m números aleatorios para cada determinación de un valor de S.

Existen varios métodos más elaborados para aproximar la distribución de las reclamaciones agregadas. La potencia normal y las aproximaciones de Esscher se describen en Beard, Pesonen y Pentikäinen (1977). Varios de los métodos de aproximación fueron comparados por Bohman y Esscher (1963, 1964). Seal (1978) presenta el caso de la aproximación de la gama trasladada e ilustra su magnífico desempeño. Bowers (1966) aproximó la distribución de las reclamaciones agregadas mediante la suma de funciones ortogonales, cuyo primer término es la distribución gama. El resultado, enunciado en el apéndice de este capítulo, de que la distribución gama puede obtenerse como un límite de la binomial negativa compuesta se debe a Lundberg (1940).

Algunas veces la distribución de las reclamaciones agregadas puede obtenerse de la inversión numérica de su *f.g.m.*, esta idea se desarrolla en el Capítulo 3 de Seal (1978).

Apéndice

Teorema 11.4

Si las variables aleatorias S_k , $k = 0,1,2,...$, tienen distribuciones binomiales negativas compuestas con parámetros r y $p(k)$ y *f.d.* del monto de reclamaciones $P(x)$, y si los parámetros de las distribuciones binomiales negativas son tales que:

$$\frac{q(k)}{p(k)} = k\frac{q}{p}$$

para k=1,2,3,..., en donde $q = 1- p$ es una constante, entonces la distribución de

$$\frac{S_k}{E[S_k]}$$

se aproxima a $G(x: r, r)$ a medida que $k \to \infty$.

Demostración
Utilizando (11.2.9), encontramos que la *f.g.m.* de $S_k/E[S_k]$ es:

$$\left[\frac{p(k)}{1-q(k)M_X(t/E[S_k])}\right]^r \tag{11.A.1}$$

También tenemos que:

$$M_X(t/E[S_k]) = 1+\frac{p_1}{E[S_k]}t+\frac{p_2}{2E[S_k]^2}t^2+\cdots \tag{11.A.2}$$

Si se sustituye (11.A.2) en (11.A.1), obtenemos:

$$\left[\frac{p(k)}{1-q(k)-(q(k)p_1/E[S_k])\,t-(q(k)p_2/2\,E[S_k]^2)\,t^2-\cdots}\right]^r \tag{11.A.3}$$

Ahora, como

$$E[S_k] = r\frac{q(k)\,p_1}{p(k)} = r\frac{k\,q\,p_1}{p}$$

observamos que la *f.g.m.* de $S_k/E[S_k]$ es:

$$\left[1 - \frac{1}{r}t - \frac{p_2}{2\,r^2 p_1^2 (q/p)k}\,t^2 - \cdots\right]^{-r}$$

$$= \left[1 - \frac{1}{r}t - R(k)\right]^{-r}$$

en donde el término restante $R(k)$ es tal que $\lim_{k\to\infty} R(k) = 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty} E\left[\exp\left(t\frac{S_k}{E[S_k]}\right)\right] = \left(\frac{r}{r-t}\right)^r \qquad (11.A.4)$$

la cual es la *f.g.m.* de una distribución $G(x: r, r)$

□

De (11.A.4) se sigue que la *f.g.m.* de S_k es aproximadamente

$$\left(\frac{r}{r - E[S_k]\,t}\right)^r = \left(\frac{r}{r - (r\,q(k)/p(k))p_1\,t}\right)^r = \left(\frac{p(k)/[q(k)p_1]}{(p(k)/[q(k)p_1]) - t}\right)^r$$

que es la *f.g.m.* de $G(x: r, (p(k)/q(k)p_1))$ Por lo tanto, cuando k es grande, lo que bajo la hipótesis del Teorema 11.4 implica que el número esperado de reclamaciones, $rq(k)/p(k) = rk(q/p)$, es grande, la distribución de las reclamaciones agregadas es aproximadamente una distribución gama.

El Teorema 11.4 se presenta para proporcionar un argumento que respalde el uso de las distribuciones gama para aproximar la distribución de las reclamaciones agregadas. La comparación de las principales ideas del Teorema 11.3(b) y del Teorema 11.4 nos conduce a mayores conocimientos. El Teorema 11.3(b) sigue muy cercanamente el patrón del teorema de límite central. Si en (11.5.2) se escribe

$$Z = \frac{S/r - (q/p)p_1}{\sqrt{(q/p)p_2 + (q^2/p^2)p_1^2/\sqrt{r}}}$$

La correspondencia es clara, con el parámetro r jugando el papel de n en el teorema de límite central.

En el Teorema 11.4 el parámetro r de la distribución binomial negativa permanece fijo. El número esperado de reclamaciones cambia en proporción al tamaño del parámetro k, compensando cambios en $q(k)$ y $p(k)$=1- $q(k)$. Bajo la hipótesis del Teorema 11.4

$$Var[S_k] = \frac{r\,k\,q}{p} p_2 + r\frac{k^2q^2}{p^2} p_1^2$$

y

$$Var\left[\frac{S_k}{E[S_k]}\right] = \frac{p}{r\,k\,q\,p_1^2} p_2 + \frac{1}{r}$$

A medida que el parámetro de tamaño $k \to \infty$

$$Var\left[\frac{S_k}{E[S_k]}\right] \to \frac{1}{r}$$

Como lo indicaba el Teorema 11.4. Por tanto la aproximación gama puede considerarse en el caso de la binomial negativa cuando el número esperado de reclamaciones es grande y la distribución del monto de reclamaciones tiene relativamente poca dispersión.

Ejercicios

Sección 11.1

11.1 Sea S el número de personas que cruzan en carro una intersección en una hora determinada. ¿Cuál sería el modelo S para una suma aleatoria?

11.2 Sea S la cantidad total de lluvia que cae en una estación de tiempo en un mes determinado. ¿Cuál sería el modelo de S para una suma aleatoria?

Sección 11.2

11.3 Suponga que N tiene una distribución binomial con parámetros n y p. Exprese cada uno de los siguientes en términos de n, p, p_1, p_2 y $M_X(t)$.

a. E[S] b. Var[S] c. $M_S(t)$

11.4 Para la distribución especificada en el Ejemplo 11.2, calcule

a. E[N] b. Var[N] c. E[X]
d. Var[X] e. E[S] f. Var[S]

Sección 11.3

11.5 Suponga que la distribución del monto de reclamaciones es la misma que en el ejemplo 11.2, pero que N tiene una distribución Poisson con $E[N]=1.7$. Calcule

a. E[S] b. Var[S]

11.6 Suponga que S tiene una distribución Poisson compuesta con $\lambda = 2$ y $p(x)=0.1x$, $x=1,2,3,4$. Calcule las probabilidades tal que las reclamaciones agregadas sean iguales a 0,1,2,3 y 4.

11.7 Considere a la familia de las distribuciones binomiales negativas con parámetros r y p. Considere que $r\to\infty$ y $p\to 1$ tal que $r(1-p) = \lambda$ permaneciendo constante. Demuestre que el límite obtenido es la distribución Poisson con parámetro λ [Sugerencia: Note que $p^r=[1-(\lambda/r)]^r \to e^{-\lambda}$ como $r\to\infty$, y considere la convergencia de la *f.g.m.*]

11.8 Suponga que S tiene una distribución de Poisson compuesta con parámetro de Poisson λ y *f.p.* del monto de reclamaciones

$$p(x) = \left[-\log(1-c)\right]^{-1} \frac{c^x}{x} \qquad x=1, 2, 3, \ldots\ldots, \quad 0 < c < 1$$

Considere la *f.g.m.* de S y demuestre que S tiene una distribución binomial negativa con parámetros p y r. Exprese p y r en términos de c y λ.

11.9 Sean

$$g(x) = 3^{18} e^{17} \frac{e^{-3x}}{17!}$$

y

$$h(x) = 3^6 x^5 \frac{e^{-3x}}{5!} \qquad x>0$$

dos *f.d.p.* Escriba la convolución de estas dos distribuciones, es decir, exhiba $g^*h(x)$. [Sugerencia: Proceda directamente a partir de la definición de convolución de la Sección 2.3, o utilice (11.3.19)].

11.10 Suponga que el número de accidentes experimentados por un conductor asegurado en un sólo año tiene una distribución Poisson con parámetro λ. Si sucede un accidente, la probabilidad es p de que el monto del daño excederá una cantidad deducible. Con el supuesto de que el número de accidentes es independiente de la severidad de los accidentes, derive la distribución del número de accidentes que resulten en un pago por reclamación.

Sección 11.4

11.11 Suponga que S_1 tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro Poisson $\lambda = 2$ y montos de reclamaciones 1, 2 o 3 con probabilidades 0.2, 0.6 y 0.2 respectivamente. Además S_2 tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro de Poisson $\lambda = 6$ y monto de reclamaciones que son 3 o 4 con probabilidad 0.5 para cada una. Si S_1 y S_2 son independientes, ¿Cuál es la distribución de S_1+S_2?

11.12 Suponga que N_1, N_2, N_3 son mutuamente independientes y que N_i tiene una distribución Poisson con $E[N_i]=i^2$, $i=1,2,3$. ¿Cuál es la distribución de $S=-2N_1+N_2+3N_3$?

11.13 Si N tiene una distribución Poisson con parámetro λ, exprese $Pr(N=n+1)$ en términos de $Pr(N=n)$.

Nótese que esta fórmula recursiva puede ser útil para cálculos tales como los de los registros sucesivos en las columnas (2), (3) y (4) del método alterno de cálculo del Ejemplo 11.6.

11.14 Suponga que S tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro λ y *f.p.* discreta $p(x)$, $x>0$. Permita que $0<\alpha<1$. Considere a $\tilde{S}$ con una distribución que es Poisson compuesta con parámetro Poisson $\tilde{\lambda}=\lambda/\alpha$ y *f.p.* del monto de reclamaciones $\tilde{p}(x)$ en donde

$$\tilde{p}(x)=\begin{cases}\alpha\, p(x) & x>0\\ 1-\alpha & x=0\end{cases}$$

Esto significa que estamos permitiendo montos de reclamaciones de 0 (como podría suceder si existe un deducible) y que por consiguiente, están modificando las distribuciones. Demuestre que S y $\tilde{S}$ tienen la misma distribución mediante

a) la comparación de *f.g.m.'s* de S y $\tilde{S}$
b) comparando la definición de la distribución de S y $\tilde{S}$ en términos de los montos posibles de reclamación y los parámetros de Poisson de las distribuciones de sus frecuencias.

11.15 En el Ejemplo 11.2, sea N_1 el número aleatorio de reclamaciones de monto 1 y N_2 el número aleatorio de reclamaciones de monto 2. Calculé

a. $Pr(N_1=1)$ b. $Pr(N_2=1)$ c. $Pr(N_1=1, N_2=1)$.

¿Son N_1 y N_2 independientes?

Sección 11.5

11.16 Demuestre que, si N tiene una distribución Poisson con parámetro λ, la distribución de

$$Z = \frac{N - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Se aproxima a una distribución $N(0,1)$ a medida que $\lambda \to \infty$

11.17 Use $log M_S(t)$ como se da en el Cuadro 11.2 para verificar (11.3.3) y (11.3.11).

11.18 Suponga que la *f.d.* de S es $G(x;\alpha,\beta)$. Utilice la *f.g.m.* [véase (11.3.19)] para demostrar que

$$E[S^h] = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+h+1)}{\beta^h} \qquad h = 1, 2, 3, \ldots$$

11.19 a. Verifique que

$$\frac{d^3}{dt^3} \log M_X(t)\bigg|_{t=0} = E[(X - E[X])^3]$$

b. Utilice (a) para demostrar que si S tiene una distribución $G(x;\alpha,\beta)$, entonces

$$E[(S - E[S])^3] = \frac{2\alpha}{\beta^3}$$

11.20 a. Para una determinada α, determine β y x_0 de tal forma que $H(x:\alpha,\beta,x_0)$ tenga una media 0 y varianza 1.

b. ¿Cuál es el límite de $H(x:\alpha,\sqrt{\alpha},-\sqrt{\alpha})$ a medida que $\alpha\to\infty$?

11.21 Suponga que S tiene una distribución Poisson compuesta con $\lambda=12$ y montos de reclamaciones que están distribuidos uniformemente entre 0 y 1. Aproxime $Pr(S<10)$ usando

a. la aproximación normal
b. la aproximación gama trasladada.

Misceláneos

11.22 La relación de pérdidas de un conjunto de pólizas de seguro sobre un periodo de prima única se define como $R=S/G$ en donde las S son reclamaciones agregadas y G son las primas agregadas. Suponga que $G=p_1 E[N]\,(1+\theta),\ \theta>0$.

a. Demuestre que

$$E[R]=(1+\theta)^{-1}$$

y que

$$Var[R]=\frac{E[N]Var[X]+p_1^2Var[N]}{\left[p_1E[N](1+\theta)\right]^2}$$

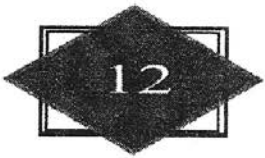
b. Desarrolle una expresión para la $Var[R]$ si

(i) N tiene una distribución Poisson
(ii) N tiene una distribución binomial negativa.

11.23 Suponga que la distribución S_1 es Poisson compuesta, dada por λ y $P_1(x)$, y que la distribución S_2 es binomial negativa compuesta, dada por r, p con $q=1-p$, y $P_2(x)$. Demuestre que S_1 y S_2 tienen la misma distribución con tal de que $\lambda = -r \log p$ y

$$P_1(x) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} P_2^{*k}(x)}{-\log p}.$$

[Sugerencia: Demuestre la igualdad de las *f.g.m.'s*]
Nótese que, el sentido de este ejercicio, cada distribución binomial negativa compuesta puede ser considerada como Poisson compuesta.



MODELOS DE RIESGOS COLECTIVOS DURANTE UN PERIODO

12.1 Introducción

El propósito de este capítulo es presentar un modelo matemático para las variaciones en el monto del excedente de un asegurador para un periodo amplio. Por excedente entendemos el exceso de algún fondo inicial más las primas cobradas sobre las reclamaciones pagadas. Como se notará, esta definición de excedente es matemáticamente conveniente, pero no contablemente.

Para $t \geq 0$, sea $U(t)$ el excedente del asegurador en el tiempo t. Suponemos que las primas se reciben continuamente a una tasa constante c, donde $c > 0$, y permitimos que $S(t)$ represente las reclamaciones agregadas hasta el tiempo t. Si $U(0) = u$ es el excedente disponible en el tiempo 0, entonces, quizás como resultado de operaciones pasadas

$$U(t) = u + ct - S(t) \qquad t \geq 0 \tag{12.1.1}$$

En este modelo se aprecia que ignoramos al interés y a los factores distintos a las primas y reclamaciones que pudierán afectar al excedente. Por ejemplo, estamos ignorando los gastos y dividendos de los tenedores de pólizas y de los accionistas. Un resultado típico de este ***proceso de excedente*** $\{U(t),\ t \geq 0\}$ se muestra en la figura 12.1. La palabra ***proceso*** indica que estamos interesados en una familia de variables aleatorias, una para cada valor de t, $t \geq 0$ y en las interconexiones entre sus distribuciones. Esto contrasta con el capítulo 11 en donde consideramos la distribución de una variable aleatoria para un sólo periodo.

Nótese que el excedente se incrementa linealmente (con pendiente c) excepto cuando ocurre una reclamación. Entonces el excedente cae por el monto de la reclamación. Si el excedente inicial u aumentó o disminuyó por una cantidad h, la gráfica de $U(t)$ crecerá o disminuirá unidades de altura, pero de otra manera permanecerá sin

cambio. Como se ilustra en la figura 12.1, el excedente podría llegar a ser negativo en ciertos tiempos. Cuando esto sucede, hablamos de que ha ocurrido la ***ruina***. Este término técnico no es sinónimo de ***insolvencia***. En una situación de la vida real, el evento de la ruina podría no ser tan irremediable como su nombre lo sugiere ya que, cuando se consideran todos los factores, los fondos del asegurador pueden ser positivos, o podría ser posible restablecer la posición positiva del excedente. Sin embargo, en una organización de seguros se puede obtener una medida útil del riesgo financiero calculando la probabilidad de la ruina como una consecuencia de la variación en la cantidad del excedente.

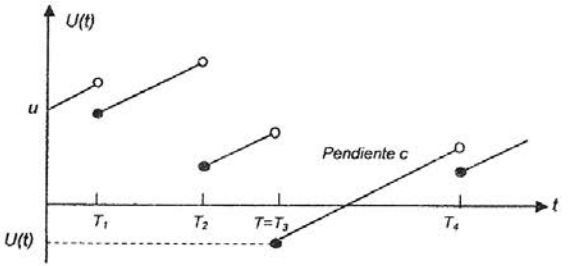


Figura 12.1 Un resultado típico del proceso excedente

Definamos:

$$T = \min\{t : t \geq 0,\ U(t) < 0\} \tag{12.1.2}$$

Como el tiempo en que ocurre la ruina (entendiendo que $T = \infty$ es simbólico para $U(t) \geq 0,\ \forall\ t \geq 0$; es decir, la ruina no ocurre) Además, representamos con

$$\psi(u) = \Pr\ (T < \infty) \tag{12.1.3}$$

La probabilidad de la ruina considerada como una función del excedente inicial u. También nos interesaremos en $U(t)$, el excedente negativo en el tiempo en que ocurre la ruina.

En la práctica, la mayoría de los aseguradores están interesados en la ruina sobre un periodo largo pero finito como de unos 20 años y en realidad no están preocupados acerca del horizonte infinito. Más precisamente, la consideración se limitará

$$\psi(u,t) = \Pr\ (T < t) \tag{12.1.4}$$

La probabilidad de la ruina antes del tiempo t, Sin embargo, discutiremos sólo la probabilidad de la ruina sobre un horizonte infinito, $\psi(u)$ la cual es matemáticamente más manejable. Por supuesto, $\psi(u)$ es una frontera superior de $\psi(u,t)$.

Las ideas que se exponen en este capítulo pueden utilizarse para proporcionar un sistema de advertencias para la conducción de una organización de seguros. Necesariamente, para representar el proceso de riesgo de tal organización se debe seleccionar un modelo. La probabilidad de la ruina, con base en ese modelo, previene al administrador de la organización de seguros sobre algunos de los riesgos involucrados. Otra vez, los modelos particulares desarrollados en este capítulo hacen supuestos simplificados para mantener manejables las matemáticas. Se dejan a un lado los efectos de los dividendos, interés y la experiencia en su cálculo. No obstante, estos modelos proporcionan un medio inicial de analizar el proceso de riesgo de una organización de seguros. En la práctica, se complementan con análisis adicionales.

12.2 Procesos de reclamaciones

En esta sección formularemos el modelo de la ruina usando dos procesos aleatorios, el proceso del número de reclamaciones y el de las reclamaciones agregadas. El primero lo estableceremos con un proceso Poisson y la segunda mediante un proceso de Poisson compuesto.

Para un cierto portafolio de pólizas de seguro, sea $N(t)$ el número de reclamaciones y $S(t)$ las reclamaciones agregadas hasta el tiempo t. Empezamos la cuenta en el tiempo 0; es decir, $N(0)=0$. Además, $S(t)=0$ siempre que $N(t)=0$. Y al igual que en el capítulo 11, dejamos que X_i represente el monto de la i-ésima reclamación. Entonces:

$$S(t)=X_1+X_2+\cdots+X_{N(t)} \qquad (12.2.1)$$

El proceso $\{N(t), t\geq 0\}$ se denomina el ***proceso del número de reclamaciones***, mientras que $\{S(t)\geq 0\}$ se denomina el ***proceso de reclamaciones agregadas***. Como se mencionó anteriormente, el conjunto de variables aleatorias se denomina proceso ya que estamos interesados en las distribuciones en todos los tiempos $t\geq 0$. Esto contrasta con el capítulo 11 en donde estábamos interesados en el número de reclamaciones y reclamaciones agregadas para un periodo único.

Sea $t \geq 0$ y $h > 0$. De las definiciones se sigue que $N(t+h) - N(t)$ es el número de reclamaciones y $S(t+h) - S(t)$ es el agregado de reclamaciones que ocurren en el intervalo entre t y $t+h$. Sea T_i el tiempo cuando ocurre la i-ésima reclamación. Por lo tanto $T_1, T_2, \ldots$ son variables aleatorias con $T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$. Estas desigualdades son estrictas, por lo tanto excluyen la posibilidad de que dos o más reclamaciones ocurran al mismo tiempo. Entonces el tiempo de espera (o tiempo transcurrido) entre reclamaciones sucesivas está representado mediante $W_i = T_1$ y

$$W_i = T_i - T_{i-1} \qquad i > 1 \tag{12.2.2}$$

En las figuras 12.2 y 12.3 se muestran los resultados típicos del proceso del número de reclamaciones y el del proceso agregado de reclamaciones. Nótese que $N(t)$ y $S(t)$ son funciones escalonadas. Las discontinuidades están en los tiempos T_i cuando ocurren las reclamaciones, y el tamaño de los escalones en estos tiempos es 1 Para $N(t)$ y su monto de reclamaciones correspondiente X_i para $S(t)$.

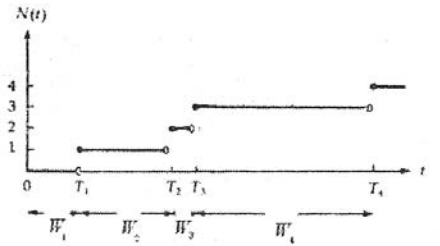


Figura 12.2 Un resultado típico del proceso del número de reclamaciones

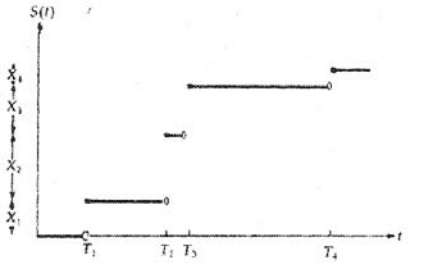


Figura 12.3 Un resultado típico del proceso de reclamaciones agregadas

Existen tres métodos para definir un proceso del número de reclamaciones:

a) El ***método global***: Para $t \geq 0$ y $h > 0$ especificamos la distribución de $N(t+h) - N(t)$. Esta distribución puede depender de los valores de $N(s)$ para $s \leq t$.

b) El ***método infinitesimal***: especificamos la probabilidad de que $N(t+dt) = N(t)+1$, es decir, la probabilidad de la ocurrencia de una reclamación en el intervalo infinitesimal entre t y $t+dt$. Esta probabilidad es proporcional a dt y puede depender de las observaciones hasta el tiempo t, es decir, en $N(s)$ para $s \leq t$. El método se restringe a procesos donde

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr[N(t+\Delta t) > N(t)+1]}{\Delta t} = 0$$

y por tanto puede ser menos general que los otros dos métodos.

c) El método discreto (o tiempo de espera): especificamos la distribución conjunta de $W_1, W_2, W_3, \ldots$ o, en forma equivalente, la de $T_1, T_2, T_3, \ldots$.

Ejemplo 12.1:

Sea n, el número gentes de edad x, en el tiempo 0. Sea $N(t)$ el número de muertes que han ocurrido en el tiempo t y T_i represente el tiempo cuando la i-ésima muerte ocurre $(i = 1,2,\ldots,n)$. Al igual que en el capítulo 8, suponemos independencia de los tiempos transcurridos hasta que sobreviene la muerte. Especifique el proceso $\{N(t), t \geq 0\}$ para cada uno de los tres métodos definidos anteriormente.

Solución:

a) La distribución condicional de $N(t+h) - N(t)$ dado $N(t) = i$, es binomial con parámetros $n-i$ y ${}_hq_{x+t}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Por lo tanto

$$\Pr[N(t+h) - N(t) = k \mid N(t) = i]$$
$$= \binom{n-i}{k} \left({}_hq_{x+t}\right)^k \left(1 - {}_hq_{x+t}\right)^{n-i-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n-i$$

Sí $N(t) = n$, entonces $N(t+h) = n$.

b) $\Pr\left[N(t+dt)-N(t)=1 \middle| N(t)=i\right]=(n-i)\mu_{x+t}dt,\ \ i=0,1,\ldots,n$. Esto se sigue del método (a) al reemplazar ${}_hq_{x+t}$ con $\mu_{x+t}dt$ y estableciendo $k=1$. Alternativamente, la fuerza que opera sobre el estatus de la vida conjunta de las restantes $n-i$ vidas, todas de edad $x+t$, es $(n-i)\mu_{x+t}$ para el intervalo dt.

c) Para $i=1,2,\ldots,n$

$$\Pr(W_{i+1} > t \mid T_i = s) = ({}_tp_{x+s})^{n-i}$$

y $W_{n+1}=\infty$ formalmente, puede obtenerse del método (a) mediante:

$$\begin{aligned}\Pr(T_{i+1} > s+t \mid T_i = s) &= \Pr[N(s+t)-N(s)=0 \mid N(s)=i] \\ &= (1-{}_tq_{x+s})^{n-i}\end{aligned}$$

La definición de un ***proceso de Poisson*** mediante el método (a) es el siguiente: el número de reclamaciones que ocurren en cualquier intervalo de amplitud h tiene una distribución de Poisson con parámetro λh, independiente de la posición del intervalo y la historia observada. Por tanto, la probabilidad condicional de que $N(t+h)-N(t)=k$, determinada por la historia observada hasta el tiempo t, es decir, dado $N(s)$ para toda $s\le t$, es:

$$\begin{aligned}\Pr[N(t+h)-N(t)=k \mid N(s)\ \ \forall\ s\le t] &= \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} \qquad K=0,1,2,\ldots\end{aligned} \tag{12.2.3}$$

Para toda $t\ge 0$ y $h\ge 0$. De esta propiedad se sigue que el proceso de Poisson tiene ***incrementos independientes***; es decir, si (t_1,t_1+h_1), $(t_2,t_2+h_2),\ldots,(t_n,t_n+h_n)$ son intervalos separados, las variables aleatorias $N(t_1+h_1)-N(t_1)$, $N(t_2+h_2)-N(t_2),\ldots,N(t_n+h_n)-N(t_n)$. Además, estos incrementos son ***estacionarios***; es decir, la distribución de $N(t_i+h_i)-N(t_i)$, que es Poisson con parámetro λh_i, que no depende de t_i.

Para $k=1$, y cualquier $t\ge 0$ y $h\ge 0$, tenemos de (12.2.3)

$$\Pr[N(t+h)-N(t)=1 \mid N(s)\ \ \forall\ s\le t] = e^{-\lambda h}\lambda h$$

Ahora reemplazamos h por la dt infinitesimal para ver que

$$\Pr[N(t+dt)-N(t)=1 \mid N(s)\ \ \forall\ s\le t] = \lambda\ dt \tag{12.2.4}$$

La cual es la definición del proceso de Poisson en el método (b). Establece que la probabilidad de ocurrencia de una reclamación en un intervalo infinitesimal de amplitud dt es λdt y es independiente de la posición del intervalo y de la historia observada del proceso.

En el método (c) necesitamos obtener la distribución de los tiempos de espera entre las reclamaciones sucesivas. Tenemos:

$$\begin{aligned} &\Pr[W_{i+1} > h \mid T_i = t, N(s) \text{ para } s \le t] \\ &= \Pr[N(t+h) - N(t) = 0 \mid T_i = t, N(s) \text{ para } s \le t] \\ &= e^{-\lambda h} \end{aligned} \tag{12.2.5}$$

Por lo tanto, considerando (12.2.3), W_{i+1} tiene una distribución exponencial con parámetro λ y es independiente de $N(s)$ para $s \le T_i$. En otras palabras, W_{i+1} es independiente de $W_1, W_2, \ldots, W_i$. Luego la definición de un proceso de Poisson en el método (c) es el siguiente: si $W_1, W_2, \ldots$ son variables aleatorias mutuamente independientes con una distribución exponencial común (parámetro $\lambda > 0$), se dice que el proceso $\{N(t), t \ge 0\}$ es un proceso de Poisson con parámetro λ.

En este contexto, definiremos ahora un proceso de Poisson compuesto. Si para $S(t)$, definido en (12.2.1), las $X_1, X_2, X_3, \ldots$ son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con *f.d.* $P(x)$ común, y si también son independientes del proceso $\{N(t), t \ge 0\}$, que se supone que es un proceso de Poisson, se dice que el proceso $\{S(t), t \ge 0\}$ es un ***proceso de Poisson compuesto***. Si el proceso de reclamaciones agregadas es un proceso de Poisson compuesto determinado por λ y $P(x)$, las siguientes propiedades corresponden a las del proceso del número de reclamaciones subyacente.

a) Si $t \ge 0$ y $h > 0$, la distribución de $S(t+h) - S(t)$ es una Poisson compuesta con especificaciones λh y $P(x)$, es decir:

$$\Pr[S(t+h) - S(t) \le x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} P^{*k}(x)$$

En donde P^{*k} es la convolución k veces de la *f.d.* $P(x)$.

b) En un intervalo de tiempo infinitesimal de amplitud dt, existe ya sea la reclamación con probabilidad 1 y con $P(x)$ como la *f.d.* de su monto, o no existe reclamación.

c) En cualquier tiempo h, la probabilidad de que la siguiente reclamación ocurra ente $h+t$ y $h+t+dt$ y de que el monto de la reclamación sea menor que o igual a x es $e^{-\lambda t}(\lambda dt)P(x)$.

Además, el proceso $\{S(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes. Las reclamaciones agregadas de intervalos separados son variables aleatorias independientes y su distribución depende sólo de la amplitud del intervalo correspondiente y no de su posición.

Si $S(t)$ representa un proceso de Poisson compuesto y el valor de t es fijo, $S(t)$ tendrá una distribución de Poisson compuesta. Esta distribución se estudió en el capítulo 11; las fórmulas (11.3.2) y (11.3.3) dan la media y la varianza. Aplicando estas formulas con λ reemplazada por λt, obtenemos

$$E[S(t)] = \lambda t\, p_1 \qquad (12.2.6)$$

$$Var[S(t)] = \lambda t\, p_2 \qquad (12.2.7)$$

12.3 El coeficiente de ajuste

El proceso del excedente $\{U(t), t \geq 0\}$ puede ser estudiado mediante su relación, determinada en (12.1.1), con el proceso de reclamaciones $S(t)$. Ahora que disponemos de un modelo completo del proceso del excedente, desarrollaremos un concepto especial. Esta herramienta puede utilizarse, en general, para encontrar los límites inferiores y superiores de $\psi(u)$ y en forma explícita en el caso particular de una distribución exponencial de reclamaciones individuales.

Primero, supondremos que la tasa de cobro de las primas c excede los pagos esperados de reclamación por unidad de tiempo, que es λp_1. Además, definimos un recargo relativo de seguridad θ mediante la ecuación $c = (1+\theta)\lambda p_1$ en donde θ es positivo. Cuando lleguemos al Teorema 12.1 en la siguiente sección, veremos que cuando $\theta \to 0$ ó $\theta < 0$ implica $\psi(u) = 1$, es decir, la certeza de la ruina.

En seguida, sea $(-\infty, \gamma)$ el intervalo abierto más grande para el que la *f.g.m.* de $P(x)$ existe. Se supone que γ es positiva. En el caso de la distribución exponencial con parámetro β, γ es igual a β, mientras que para cualquier distribución del monto de las reclamaciones con límites γ es $+\infty$.

Además, supondremos que $M_X(r)$ tiende a ∞ a medida que $r \to \gamma$ (Este supuesto no siempre es válido para γ finita; como ejemplo, considere la distribución que está concentrada en el intervalo $x>1$ en donde su *f.d.p.* es proporcional a $x^{-2}e^{-x}$.)

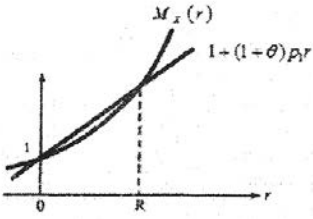


Figura 12.4 Definición del coeficiente de ajuste

Por conveniencia de notación, supondremos también que $P(x)$ es continua y tiene un *f.d.p.* $p(x)$; si $P(x)$ es discreta y tiene una *f.p.* $p(x)$, las integrales se reemplazarán por sumas en la siguiente expresión.

Para un proceso de Poisson compuesto, consideramos la ecuación

$$\lambda + cr = \lambda \int_0^\infty e^{rx} p(x)dx = \lambda M_x(r) \quad r < \gamma \tag{12.3.1}$$

o la expresión equivalente, usando $c = (1+\theta)\lambda p_1$,

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_x(r) \qquad r < \gamma \tag{12.3.2}$$

Aquí, el lado izquierdo es una función lineal de r, mientras que el lado derecho es una función positiva creciente que tiende a ∞ a medida que $r \to \gamma$. Más aún, la segunda derivada del lado derecho es positiva por lo que su gráfica es cóncava hacia arriba. El supuesto de que $c > \lambda p_1$ (equivalente a $\theta > 0$) significa que la pendiente, $(1+\theta)p_1$ del lado izquierdo de (12.3.2) excede la pendiente, $M_X'(0) = p_1$, del lado derecho en $r = 0$. En la figura 12.4, observamos que la ecuación (12.3.2) tiene dos soluciones. Aparte de la solución trivial $r = 0$, existe una solución positiva $r = R$, que se denomina el ***coeficiente de ajuste***. Los motivos para considerar aquí la expresión (12.3.1) y su solución R se aclaran en el Teorema 12.1 y su demostración en el apéndice de este capítulo.

Ejemplo 12.2:

Determine el coeficiente de ajuste si la distribución del monto de reclamaciones es exponencial con parámetro β.

Solución:

El coeficiente de ajuste se obtiene de (12.3.2) y se transforma aquí en

$$1+\frac{(1+\theta)r}{\beta}=\frac{\beta}{\beta-r}$$

o, como una ecuación cuadrática en r,

$$(1+\theta)r^2-\theta\,\beta\,r=0$$

Como se esperaba, $r=0$ es una solución mientras que la del coeficiente de ajuste es

$$R=\frac{\theta\,\beta}{1+\theta}$$

∇

En la mayoría de los casos, la ecuación (12.3.2) no puede resolverse explícitamente. En estos casos, se debe hacer mediante un método de análisis numérico apropiado. En la figura 12.4 observamos que si

$$M_X(r)-1-(1+\theta)p_1 r \qquad (12.3.3)$$

es positiva para algún valor de $r>0$, se sigue que $R<r$. Igualmente, si (12.3.3) es negativa para algún valor de r, $R>r$. Podemos utilizar esta información para determinar R ya sea mediante prueba y error o bisección sucesiva del intervalo. En el ejercicio 12.4 se demuestra que $R<2\theta\,p_1/p_2$, en tal forma que $r=0$ y $r=2\theta\,p_1/p_2$ pueden utilizarse como valores iniciales para el método de bisección sucesiva del intervalo.

Ejemplo 12.3:

Calcule el coeficiente de ajuste si todas las reclamaciones son de tamaño 1.

Solución:

La fórmula (12.3.2) proporciona el coeficiente de ajuste como la raíz positiva de

$$1+(1+\theta)r = e^{r}.$$

Los resultados de la evaluación numérica de la ecuación anterior para varios valores de θ se exhiben abajo.

θ	R
0.2	0.354
0.4	0.639
0.6	0.876
0.8	1.079
1.0	1.256
1.2	1.413

∇

En general, el coeficiente de ajuste es una función creciente del recargo relativo de seguridad θ. Esto puede observarse en la figura 12.4. A medida que θ se incrementa, la pendiente de la línea recta a través del punto (0,1) se incrementa en tal forma que el punto de intersección de la línea y la curva se mueve a la derecha y hacia arriba.

Existe una conexión intrínseca entre el coeficiente de ajuste y la probabilidad de ruina determinada en el siguiente teorema, mismo que se demuestra en el apéndice de este capítulo.

Teorema 12.1:

Para $u \geq 0$,

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}. \qquad (12.3.4)$$

En palabras, el denominador se calcula con respecto a la distribución condicional del excedente negativo, $U(T)$, dado que ocurra la ruina; es decir, $T<\infty$.

En la figura 12.4, observamos que si $\theta \to 0$, la secante tiende a la tangente para $M_X(r)$ en $r=0$, lo que implica $R \to 0$. Pero, entonces de (12.3.4), $\psi(u)=1$, o la ruina es una certeza. Adicionalmente, $U(t)$, $t>0$, para el caso en donde $\theta<0$, será siempre menor que la correspondiente $U(t)$ para $\theta \to 0$, y por tanto, ya que la ruina es una certeza para $\theta \to 0$, la ruina es también una certeza para $\theta<0$. Por estas razones, mantendremos el supuesto de que $\theta>0$.

En general, una evaluación explícita del denominador de (12.3.4) no es posible. Las excepciones son el caso $u=0$ (véase el ejercicio 12.10) y el caso donde la distribución del monto de las reclamaciones es exponencial (véase el ejemplo 12.4). Sin embargo, el teorema puede usarse para derivar desigualdades. Ya que $U(t)$, dado $T<\infty$, necesariamente es negativo, el denominador de (12.3.4) excede a 1. Se sigue que

$$\psi(u) < e^{-Ru}. \tag{12.3.5}$$

Si la distribución del monto de reclamaciones está limitado en tal forma que $P(m)=1$ para algunas m finitas, se sigue que, dado $T<\infty$, $U(t)>-m$ ya que el excedente justamente antes de la reclamación debería ser positivo. Por lo tanto $e^{-RU(T)}<e^{Rm}$, así

$$E[e^{-RU(T)} \mid T<\infty] < e^{Rm}.$$

Por tanto

$$\psi(u) > e^{-Ru}e^{-Rm} = e^{-R(u+m)}. \tag{12.3.6}$$

Algunos autores sugieren el uso de la aproximación

$$\psi(u) \cong e^{-Ru} \tag{12.3.7}$$

la que, en vista de (12.3.5), sobreestima la probabilidad de la ruina.

Examinaremos ahora un caso especial en donde el Teorema 12.1 puede aplicarse para obtener una expresión explícita para la probabilidad de la ruina $\psi(u)$.

Ejemplo 12.4:

Calcule la probabilidad de la ruina en el caso de que la distribución del monto de las reclamaciones sea exponencial con parámetro $\beta > 0$.

Solución:

Si ocurre la ruina, se supone que tiene lugar en el tiempo T. Sea $\hat{u}$ el monto del excedente justamente anterior a T. El evento de que $-U(T) > y$ puede reestablecerse como el evento de que X, el tamaño de las reclamaciones que lleva a la ruina, excede $\hat{u}+y$, dado que excede $\hat{u}$. La probabilidad condicional de este evento está dada por

$$\frac{\beta \int_{\hat{u}+y}^{\infty} e^{-\beta x} dx}{\beta \int_{\hat{u}}^{\infty} e^{-\beta x} dx} = e^{-\beta y}$$

por lo que la *f.d.p* de $-U(T)$, dado $T < \infty$, es

$$\frac{d}{dy}(1 - e^{-\beta y}) = \beta e^{-\beta y}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty] &= \beta \int_0^{\infty} e^{Ry} e^{-\beta y} dy \\ &= \frac{\beta}{\beta - R} \end{aligned}$$

Del ejemplo 12.2, sabemos que el coeficiente de ajuste en este caso es $R = \theta\beta/(1+\theta)$. Combinándolo con (12.3.4) nos da

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{\frac{-\theta\beta}{1+\theta} u\right\} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\frac{\theta}{1+\theta} \frac{u}{p_1}\right\}. \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

∇

12.4 Modelo de tiempo discreto

En esta sección examinaremos un modelo que puede ser considerado como el del tiempo discreto análogo al modelo desarrollado en las secciones precedentes.

Sea U_n el excedente del asegurador en el tiempo $n, n = 0,1,2,...$ Suponemos que

$$U_n = u + nc - S_n \tag{12.4.1}$$

donde $u = U_0$ es el excedente inicial, c es el monto de las primas recibidas cada periodo y S_n es la suma de todas las reclamaciones en el primero de n periodos. También suponemos que

$$S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \tag{12.4.2}$$

donde W_i es la suma de las reclamaciones en el periodo i y $W_1, W_2, ... W_n$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes. Además, $\mu = E[W] < c$ donde W es una variable aleatoria distribuida como las W_i. Sea

$$\tilde{T} = \min\{n : U_n < 0\} \tag{12.4.3}$$

El tiempo de la ruina (otra vez con el entendimiento de que $\tilde{T} = \infty$ si $U_n \geq 0$ para toda n), y sea

$$\tilde{\psi}(u) = \Pr(\tilde{T} < \infty) \tag{12.4.4}$$

la probabilidad de la ruina en este contexto.

Este modelo genera un resultado similar al Teorema 12.1. Para formularlo, primero debemos definir el coeficiente de ajuste $\tilde{R}$ para el nuevo modelo. Definimos $\tilde{R}$ como la solución positiva de la ecuación

$$e^{-cr} M_W(r) = 1 \tag{12.4.5}$$

(véase la figura 12.5). La gráfica de $e^{-cr}M_W(r)$ puede trazarse al observar que

$$\frac{d}{dr}[e^{-cr}M_W(r)] = \frac{d}{dr}E[e^{(W-c)r}] = E[(W-c)e^{(W-c)r}]$$

y

$$\frac{d^2}{dr^2}[e^{-cr}M_W(r)] = E[(W-c)^2 e^{(W-c)r}].$$

La primera de estas observaciones muestra que la pendiente en $r=0$ es $\mu - c$, una cantidad negativa, y la segunda muestra que la gráfica es cóncava hacia arriba. Además, dado que W tiene una probabilidad positiva sobre los valores en exceso de c, la primera derivada será, para una r bastante grande, positiva y así permanecerá. Por tanto, $e^{-cr}M_W(r)$ tendrá un mínimo, como lo indica la figura 12.5 y $\bar{R}$ es positiva como se muestra.

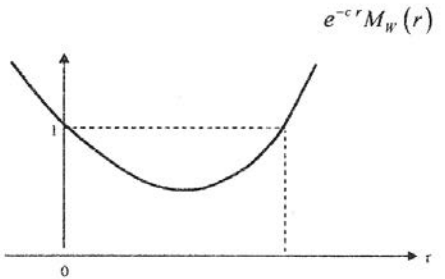


Figura 12.5 La definición de $\bar{R}$

Figura 12.5 La definición de $\bar{R}$

Notamos que (12.4.5) puede reexpresarse como

$$\log M_W(r) - c\,r = 0. \qquad (12.4.6)$$

Si observamos el caso especial donde la W_i's distribución común es de Poisson compuesta, entonces $\log M_W(r) = \lambda(M_X(r)-1)$ y (12.4.6) es la misma que (12.3.1), la definición de R para el modelo de tiempo continuo. Por tanto, cuando el proceso de reclamaciones es de Poisson compuesta, $\bar{R} = R$ así que $\bar{R}$ puede considerarse una generalización de R.

Ejemplo 12.5:

Derive una expresión para $\tilde{R}$ en el caso especial en donde la distribución común de la W_i's es $N(\mu,\sigma^2)$.

Solución:

Aquí

$$\log M_W(r) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2.$$

Por lo tanto, la solución positiva de (12.4.6) es

$$\tilde{R} = \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}.$$

donde, como se supuso anteriormente, $\mu < c$.

∇

El análogo del Teorema 12.1 es el resultado siguiente

Teorema 12.2:

Para $u > 0$

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{\exp(-\tilde{R}\,u)}{E[\exp(-\tilde{R}\,U_{\tilde{T}})\,|\,\tilde{T} < \infty]}. \tag{12.4.7}$$

Dado que por definición $U_{\tilde{T}} < 0$, se sigue que

$$\tilde{\psi}(u) < \exp(-\tilde{R}\,u). \tag{12.4.8}$$

La demostración del Teorema 12.2 es similar a la del Teorema 12.3, que se presenta en el apéndice de este capítulo.

Ahora derivaremos una aproximación para $\widetilde{R}$. En la presentación del cuadro 11.2 vimos que para una variable aleatoria X

$$\frac{d}{dt}\log M_X(t)|_{t=0} = E[X]$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}\log M_X(t)|_{t=0} = Var[X]$$

Por tanto, utilizando la expansión de series de Maclaurin, tenemos

$$\log M_W(r) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + \cdots$$

donde $\sigma^2 = Var[W]$. Si usamos únicamente los dos primeros términos de esta expansión en (12.4.6), obtenemos la aproximación

$$\widetilde{R} \cong \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}. \tag{12.4.9}$$

Comparando este resultado con el ejemplo 12.5, observamos que (12.4.9) es exacto en el caso donde la distribución común de las W_i's es normal. Adicionalmente, si W tiene una distribución compuesta y la seguridad relativa recargada θ está dada por $c = (1+\theta)\mu$, entonces (11.2.5) y (11.2.6) producen

$$\widetilde{R} \cong \frac{2\theta\, p_1 E[N]}{(p_2 - p_1^2)E[N] + p_1^2 Var[N]} \tag{12.4.10}$$

en donde N es una variable aleatoria distribuida como el número de reclamaciones en un periodo.

Ejemplo 12.6:

Aproxime $\tilde{R}$ si

a. N tiene una distribución de Poisson con parámetro λ
b. N tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y p.

Solución:

a. Aquí $E[N]=Var[N]=\lambda$, y (12.4.10) se reduce a

$$\tilde{R} \cong \frac{2\,\theta\, p_1}{p_2} \tag{12.4.11}$$

Ya hemos indicado que, en este caso, $\tilde{R}=R$, y a semejanza del ejercicio 12.4, el lado derecho de (12.4.11) es realmente un límite superior.

b. En este caso,

$$E[N]=\frac{r\,q}{p}$$

$$Var[N]=\frac{r\,q}{p^2}$$

por lo que se sigue de (12.4.10) que

$$\tilde{R} \cong \frac{2\,\theta\, p_1}{p_2 + p_1^2[(1/p)-1]}. \tag{12.4.12}$$

Nótese que para $p \to 1$, se obtiene el resultado de (a).

∇

Hasta ahora se ha venido suponiendo que los montos totales de reclamaciones en diferentes periodos son variables aleatorias independientes. En muchos casos, este supuesto es irreal. Para investigar una situación de este tipo, consideraremos ahora un modelo auto regresivo para los costos de las reclamaciones del asegurador que

generaliza el modelo previamente considerado y permite la correlación entre las reclamaciones de periodos sucesivos.
Suponemos que W_i, la suma de las reclamaciones en el periodo i, es de la forma

$$W_i = \Upsilon_i + a\, W_{i-1} \qquad i = 1,2,\ldots \tag{12.4.13}$$

Aquí $-1 < a < 1$, y $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[\Upsilon_i] < (1-a)c$. El valor $W_0 = \omega$ inicial completa la descripción de este modelo auto regresivo de primer orden para las W_i's.

El excedente del asegurador U_n en el tiempo n se define igual que en (12.4.1) y $\tilde{T}$, el tiempo de la ruina, como en (12.4.3). Nótese que la probabilidad de la ruina,

$$\tilde{\psi}(u,\omega) = \Pr(\tilde{T} < \infty) \tag{12.4.14}$$

Es ahora una función de dos variables. Esto generaliza el modelo considerado anteriormente, que corresponde al caso especial en donde $a = 0$.

Utilizaremos ahora la regla iterativa de (12.4.13) para obtener

$$W_i = \Upsilon_i + a\,\Upsilon_{i-1} + \cdots + a^{i-1}\,\Upsilon_1 + a^i\,\omega \tag{12.4.15}$$

Por tanto el total de las reclamaciones en los primero de n periodos es

$$\begin{aligned} S_n &= \Upsilon_n + (1+a)\Upsilon_{n-1} + \cdots + (1+a+\cdots+a^{n-1})\Upsilon_1 \\ &\quad + (a+a^2+\cdots+a^n)\omega \\ &= \Upsilon_n + \frac{1-a^2}{1-a}\Upsilon_{n-1} + \cdots + \frac{1-a^n}{1-a}\Upsilon_1 + a\frac{1-a^n}{1-a}\omega \end{aligned} \tag{12.4.16}$$

Esto demuestra que Υ_1 finalmente contribuirá $\Upsilon_1/(1-a)$ a las reclamaciones totales. Por lo tanto suponemos que $c > E(\Upsilon_1)/(1-a)$, y al igual que en (12.4.5) definimos el coeficiente de ajuste como la solución positiva de la ecuación

$$e^{-cr} M_{\Upsilon_1/(1-a)}(r) = 1 \tag{12.4.17}$$

Por tanto $\tilde{R}$ es un número positivo con la propiedad de que

$$\log E\left[\exp\left(\frac{-\tilde{R}\,\Upsilon}{1-a}\right)\right]-c\,\tilde{R}=0 \tag{12.4.18}$$

Nótese que $\tilde{R}$ depende de la distribución común de las Υ_i's y de los valores de a y c.

En el apéndice de este capítulo, se derivará el siguiente resultado.

Teorema 12.3:

$$\tilde{\psi}(u,\omega)=\frac{\exp(-\tilde{R}\,\hat{u})}{E[\exp(-\tilde{R}\,\hat{U}_{\tilde{T}})|\,\tilde{T}<\infty]} \tag{12.4.19}$$

Aquí usamos la notación

$$\hat{U}_n=U_n-\frac{a}{1-a}W_n \qquad \hat{u}=\hat{U}_0 \tag{12.4.20}$$

En cierto sentido, $\hat{U}_n$ es un excedente modificado. Es el excedente real ajustado mediante todas las reclamaciones futuras que están relacionadas con W_n. Esta interpretación de $\hat{U}_n$ se desarrolla en el ejercicio 12.9.

Si $a\geq 0$, se sigue que $\hat{U}_{\tilde{T}}\leq U_{\tilde{T}}<0$. Por tanto, en este caso, el denominador de (12.4.19) es mayor que 1 y obtenemos un límite superior simplificado para la probabilidad de la ruina.

Corolario al Teorema 12.3:

Si $0\leq a<1$ entonces

$$\tilde{\psi}(u,\omega)\leq\exp(-\tilde{R}\,\hat{u}) \tag{12.4.21}$$

Nótese que esto generaliza (12.4.8).

12.5 El primer excedente abajo del nivel inicial

Regresaremos ahora al modelo de tiempo continuo desarrollado en las secciones 12.1-12.3 para los que hay disponibles resultados adicionales.

Específicamente, consideraremos el monto del excedente al tiempo que el primero cae por debajo del nivel inicial (esto, quizás, nunca ocurra). Como una aplicación, encontramos una expresión simple para $\psi(0)$, la probabilidad de la ruina si el excedente inicial es 0.

El principal teorema de esta sección, que se demuestra en el apéndice de este capítulo, es el siguiente.

Teorema 12.4

Para una proceso de Poisson compuesto, la probabilidad de que el excedente caiga alguna vez por abajo de su nivel inicial u, y este entre $u-y$ y $u-y-dy$ cuando suceda por primera vez, es

$$\frac{\lambda}{c}\left[1-P(y)\right]dy=\frac{1-P(y)}{(1+\theta)p_1}dy \qquad y>0$$

Como una aplicación del Teorema 12.4, notamos que la probabilidad de que el excedente caiga alguna vez por abajo de su nivel original es

$$\frac{1}{(1+\theta)p_1}\int_0^{\infty}\left[1-P(y)\right]dy=\frac{1}{1+\theta} \tag{12.5.1}$$

ya que

$$\int_0^{\infty}\left[1-P(y)\right]dy=p_1$$

Por tanto, si $u=0$, $1/(1+\theta)$ es la probabilidad de que el excedente caiga alguna vez por debajo de 0, es decir, que ocurra la ruina. Por tanto

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta} \tag{12.5.2}$$

Es notable que $\psi(0)$ dependa del recargo relativo de seguridad θ y no de la forma específica de la distribución del monto de las reclamaciones

Notamos que

$$\frac{\lambda}{c}\left[1-P(y)\right]=\frac{1-P(y)}{(1+\theta)p_1} \qquad y>0$$

no es *f.d.p.* ya que no se integra a 1. Sin embargo, existe una *f.d.p.* relacionada en el sentido adecuado. Sea L_1 una variable aleatoria que representa la cantidad por la que el excedente cae por debajo del nivel inicial por primera vez; dado que esto sucede alguna vez. La *f.d.p.* para L_1 se obtiene dividiendo

$$\frac{1-P(y)}{(1+\theta)p_1}$$

por

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}$$

y es

$$f_{L_1}(y)=\frac{1}{p_1}\left[1-P(y)\right] \qquad y>0 \tag{12.5.3}$$

La relación entre la *f.g.m.* de L_1 y aquella de la distribución del tamaño de la reclamación X, puede obtenerse integrando por partes:

$$\begin{aligned} M_{L_1}(r) &= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty e^{ry}\left[1-P(y)\right]dy \\ &= \frac{1}{p_1}\left\{\frac{e^{ry}}{r}\left[1-P(y)\right]\Big|_0^\infty+\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{ry}p(y)dy\right\} \\ &= \frac{1}{p_1 r}\left[M_X(r)-1\right] \end{aligned} \tag{12.5.4}$$

Ilustraremos aplicaciones adicionales del Teorema 12.4 mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 12.7:

Escriba una expresión para la distribución del nivel del excedente para la primera vez que el excedente cae por debajo del nivel inicial u, condicionado a que caiga por debajo de u, si todas las reclamaciones son de tamaño 2.

Solución:

Tenemos

$$1-P(y)=\begin{cases}1 & 0\le y<2\\ 0 & y\ge 2\end{cases}$$

Por tanto la *f.d.p.* para L_1 es

$$\frac{1}{p_1}[1-P(y)]=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le y<2\\ 0 & \textit{otro caso.}\end{cases}$$

Por lo tanto, L_1 está distribuido uniformemente entre 0 y 2 así que el nivel del excedente después de dicha primera caída esta distribuido uniformemente entre $u-2$ y u.

∇

Ejemplo 12.8:

Escriba una expresión para la distribución de L_1 si el tamaño de las reclamaciones individuales tiene una distribución exponencial con parámetro β.

Solución:

Como $1-P(y)=e^{-\beta y}$ para $y>0$, la *f.d.p.* de L_1 es

$$\frac{1}{p_1}[1-P(y)]=\beta e^{-\beta y}\quad y>0.$$

Por lo tanto, la distribución de L_1 también es exponencial con parámetro β.

∇

12.6 La pérdida agregada máxima

Una nueva variable aleatoria, la ***pérdida agregada máxima***, se define como

$$L = \max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\} \tag{12.6.1}$$

es decir, como el exceso máximo de las reclamaciones agregadas sobre las primas recibidas. Como $S(t) - ct = 0$ para $t = 0$, se sigue que $L \geq 0$.

El Teorema 12.2 se utilizará en la demostración de otro que proporciona una fórmula explícita para la *f.g.m.* de L. Esto puede usarse para proporcionar información acerca de $\psi(u)$. Como una aplicación, $\psi(u)$ se expresa para el caso donde la distribución del monto de reclamaciones individuales es una suma ponderada de distribuciones exponenciales.

Para obtener la *f.d.* de la variable aleatoria L consideramos, para $u \geq 0$, que

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= \Pr\left[U(t) \geq 0,\ \forall t\right] \\ &= \Pr\left[u + ct - S(t) \geq 0,\ \forall t\right] \\ &= \Pr\left[S(t) - ct \leq u,\ \forall t\right] \end{aligned}$$

Pero el lado derecho es equivalente a $\Pr(L \leq u)$, así que tenemos

$$1 - \psi(u) = \Pr(L \leq u) \quad u \geq 0 \tag{12.6.2}$$

Se sigue que $1 - \psi(u)$, el complemento de la probabilidad de la ruina, puede interpretarse como la *f.d.* de L. En particular, tenemos

$$1 - \psi(0) = \Pr(L \leq 0) = \Pr(L = 0) \tag{12.6.3}$$

ya que $L \geq 0$. En este caso, la pérdida máxima se alcanza en el tiempo $t = 0$. También la distribución de L es de tipo mixto. Existe una masa puntual de $1 - \psi(0)$ en el origen con la probabilidad restante distribuida continuamente sobre valores positivos de L.

El principal resultado de esta sección es la siguiente fórmula explícita para la *f.g.m.* de L, la que, en vista de (12.6.2), puede usarse para obtener información acerca de $\psi(u)$.

Teorema 12.5:

$$M_L(r)=\frac{\theta p_1 r}{1+(1+\theta)p_1 r - M_X(r)} \tag{12.6.4}$$

Una fórmula equivalente es

$$M_L(r)=\frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\ \frac{\theta\left[M_X(r)-1\right]}{1+(1+\theta)p_1 r - M_X(r)} \tag{12.6.4A}$$

que refleja la masa puntual en el origen más directamente, ya que la contribución a la *f.g.m.* de la probabilidad en $L=0$ es

$$1-\psi(0)=\frac{\theta}{1+\theta}$$

Por (12.5.2). Se aprecia que la ecuación utilizada para definir el coeficiente de ajuste se obtiene igualando el denominador de (12.6.4) a 0.

Demostración:

La prueba del teorema involucra la consideración de las veces que el proceso de pérdida agregada asume nuevos niveles records. Un resultado del proceso de pérdidas agregadas se muestra en la figura 12.6. En este resultado se establece tres veces un nuevo nivel record. Después de cada nivel record existe una probabilidad $1-\psi(0)$ que este record no sea superado y una probabilidad $\psi(0)$ que si sea superado. Al hacer esta proposición estamos confiando en el hecho de que un proceso de Poisson compuesto tiene incrementos independientes y estacionarios.

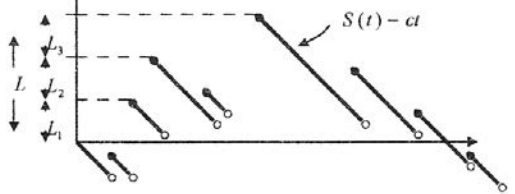


Figura 12.6 Un resultado típico del proceso de pérdidas agregadas

Si es superado, la *f.d.p.* del incremento es la de L_1 la cual está dada por (12.5.3). La figura ilustra que podemos representar a L como una suma de un número aleatorio de variables aleatorias, por tanto

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_N. \tag{12.6.5}$$

Aquí N es el número de nuevos niveles record y tiene una distribución geométrica con

$$\begin{aligned} \Pr(N=n) &= [1-\psi(0)][\psi(0)]^n \\ &= \theta\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n+1} \quad n=0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{12.6.6}$$

y la *f.g.m.* determinada mediante

$$M_N(r) = \frac{\theta}{1+\theta-e^r} \tag{12.6.7}$$

Las variables aleatorias $L_1, L_2, \ldots$ son mutuamente independientes e independientes de N. Su *f.d.p.* común esta dada por (12.5.3). De acuerdo con (11.2.7), la *f.g.m.* de L es

$$\begin{aligned} M_L(r) &= M_N(\log M_{L_1}(r)) \\ &= \frac{\theta}{1+\theta-M_{L_1}(r)} \end{aligned} \tag{12.6.8}$$

La fórmula (12.5.4) da $M_{L_1}(r)$ en términos de $M_X(r)$ y por tanto

$$\begin{aligned} M_L(r) &= \frac{\theta}{1+\theta-\{1/(p_1 r)\}[M_X(r)-1]} \\ &= \frac{\theta\ p_1 r}{1+(1+\theta)p_1 r - M_X(r)} \end{aligned}$$

La cual se tendrá que demostrar. La fórmula alternativa (12.6.4A) puede verificarse juntando términos bajo un denominador común.

Observe que como $1-\psi(u)$ es la *f.d.* de la variable aleatoria L [véase (12.6.2) arriba] donde L tiene una masa puntual en el origen y una densidad continua para valores positivos de u, tenemos

$$M_L(r) = 1 - \psi(0) + \int_0^\infty e^{ur}\left[-\psi'(u)\right]du$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} + \int_0^\infty e^{ur}\left[-\psi'(u)\right]\ du$$

Por tanto (12.6.4A) establece que

$$\int_0^\infty e^{ur}\left[-\psi'(u)\right]\ du = \frac{1}{1+\theta}\ \frac{\theta\left[M_X(r)-1\right]}{1+(1+\theta)p_1 r - M_X(r)} \tag{12.6.9}$$

Esta fórmula puede utilizarse para encontrar expresiones explícitas para $\psi(u)$ para ciertas familias de distribuciones del monto de las reclamaciones. Una de ellas consiste en las combinaciones de distribuciones exponenciales de la forma

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i\ \beta_i\ e^{-\beta_i x} \qquad x > 0,$$
$$\beta_i > 0,\ \ A_i > 0,\ \ A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 1 \tag{12.6.10}$$

Luego

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r} \tag{12.6.11}$$

Originalmente, $M_X(r)$ está definida como una esperanza y existe sólo para $r < \gamma = \min\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Sin embargo, esta función puede extenderse en forma natural a toda $r \neq \beta_i$. Por simplicidad, usamos el mismo símbolo, $M_X(r)$, para estas funciones.

Sustituimos (12.6.11) en (12.6.9) y reconocemos que el lado derecho del resultado es una función racional de r, la que, al aplicar el método de las fracciones parciales, se puede escribir en la siguiente forma

$$\int_0^\infty e^{ur}\left[-\psi'(u)\right]\ du = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i\ r_i}{r_i - r} \tag{12.6.12}$$

La única función que satisface esto y $\psi(\infty) = 0$ es

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i\ e^{-r_i u} \tag{12.6.13}$$

Se sigue que la probabilidad de la ruina está determinada por expresión. Ilustraremos este procedimiento con dos ejemplos.

Ejemplo 12.9:

Derive una expresión para $\psi(u)$ si el monto de reclamaciones las X_is tienen una distribución exponencial; es decir, $n=1$ en (12.6.10).

Solución:

Dado que

$$M_X(r)=\frac{\beta}{\beta-r}=\frac{1}{1-p_1 r}$$

el lado derecho de (12.6.9) es

$$\left(\frac{1}{1+\theta}\right)\left(\frac{\theta(1/(1-p_1 r)-1)}{1+(1+\theta)p_1 r-1/(1-p_1 r)}\right)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)\left(\frac{\theta}{\theta-(1+\theta)p_1 r}\right)$$

$$=C_1\frac{r_1}{r_1-r}$$

donde $C_1=1/(1+\theta)$ y $r_1=\theta/[(1+\theta)p_1]$. Entonces

$$\psi(u)=C_1 e^{-r_1 u}$$

Esta fórmula se establecía previamente en el ejemplo 12.4, en la fórmula (12.3.8)

∇

Ejemplo 12.10:

Dado que $\theta = 2/5$ y $p(x)$ está dada por

$$p(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x} \qquad x > 0,$$

calcule $\psi(u)$.

Solución:

De $p(x)$ tenemos

$$M_X(r) = \frac{3/2}{3-r} + \frac{7/2}{7-r}$$

y

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{5}{21}$$

Sustituimos estas expresiones en el lado derecho de (12.6.9), la que, después de algunas simplificaciones, se transforma en

$$\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{5-r}{6-7r+r^2}\right)$$

Las raíces del denominador son $r_1 = 1$ y $r_2 = 6$. Por tanto esta expresión, reexpresada en la forma de (12.6.12), es

$$\frac{C_1}{1-r} + \frac{6\,C_2}{6-r}.$$

Se determina que los coeficientes son

$$C_1 = \frac{24}{35}$$

$$C_2 = \frac{1}{35}$$

Por tanto

$$\psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u} \qquad u \geq 0$$

∇

En la gráfica de la figura 12.7, ilustra los puntos r_i, que satisfacen la ecuación

$$1+(1+\theta)p_1 r = M_X(r) \tag{12.6.14}$$

en donde la distribución de X es una mezcla de exponenciales. La función $M_X(r)$ esta dada en (12.6.11) con $n=3$.

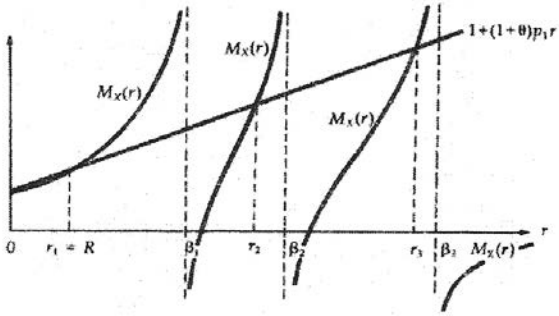


Figura 12.7 La solución de la ecuación (12.6.14) para $n=3$

El lado derecho de (12.6.11) tiene discontinuidades en $\beta_1, \beta_2, \ldots$, y en cada uno de estos argumentos el valor de la función cambia de $+\infty$ a $-\infty$. La figura ilustra que, en general, las r_i's satisfacen una condición de la forma

$$r_1 = R < \beta_1 < r_2 < \beta_2 < \ldots < r_n < \beta_n \tag{12.6.15}$$

La figura 12.4 ilustra la parte de la figura 12.7 ubicada a la izquierda de $\beta_1 = \gamma$. Los problemas prácticos necesitarán considerar distribuciones de reclamaciones que no sean mezclas de distribuciones exponenciales. Para algunas distribuciones puede, incluso, ser difícil calcular el coeficiente de ajuste, para estar en posibilidad de aproximar las probabilidades de la ruina. Un método, basado en los primeros dos momentos de la distribución del monto de las reclamaciones es fácil de aplicar y parece dar resultados satisfactorios para valores moderados de u.

El primer momento para la distribución de L se obtiene en el ejercicio 12.13(b). El resultado es

$$E[L] = \frac{p_2}{2\ \theta\ p_1} \tag{12.6.16}$$

Además sabemos de (12.5.2) que $\psi(0) = 1/(1+\theta)$ y de (12.3.5) que $\psi(u) < e^{-Ru}$ La aproximación que se propone aquí es que

$$1 - F_L(u) = \psi(u) \cong \frac{1}{1+\theta} e^{-K u} \qquad u > 0$$

en donde K se selecciona en tal forma que el valor aproximado de $E[L]$ es igual al que se da en (12.6.16). Pero

$$E[L] = \int_0^\infty [1 - F_L(u)]\, du \cong \frac{1}{1+\theta}\ \frac{1}{K}$$

así que

$$K = \frac{2\ \theta\ p_1}{(1+\theta)\ p_2}$$

Nos dará la igualdad requerida. Por tanto nuestra aproximación es

$$\psi(u) \cong \frac{1}{1+\theta}\ \exp\left\{-\frac{2\theta\ p_1\ u}{(1+\theta)\ p_2}\right\} \qquad u > 0$$

Debe destacarse que si la distribución de las reclamaciones es exponencial con media p_1, de tal forma que $p_2 = 2p_1^2$, el resultado es exacto [véase (12.3.8)]. Este método se amplia en el ejercicio 12.19 para proporcionar una aproximación mayor.

12.7 Notas y referencias

Las referencias generales son los textos de

- Beard, Pentikäinen y Pesonen (1977),
- Beekman (1974),
- Bühlmann (1970),
- Gerber (1979), y
- Seal (1969).

La teoría acerca de la ruina ha sido desarrollada por la escuela escandinava (F. Lundberg, Cramér) y por la italiana (DeFinetti); este desarrollo es descrito acuciosamente en el texto de Dubourdieu (1952).

No discutimos la famosa fórmula asintótica para la probabilidad de la ruina,

$$\psi(u) \cong C\, e^{-R\,u} \qquad u \to \infty \tag{12.7.1}$$

en donde C es alguna constante. En vista del Teorema 12.1, esta fórmula es bastante plausible; significa que el denominador de la fórmula (12.3.4) tiene un límite a medida que $u \to \infty$ con la C en la fórmula (12.7.1) como el recíproco de este límite. En el caso donde la distribución del monto de las reclamaciones es una mezcla de distribuciones exponenciales, esta forma asintótica se ilustra mediante la fórmula (12.6.13).

La ecuación en el ejercicio 12.11 se llama una ecuación de renovación imperfecta. Feller (1966) discutía las soluciones de las ecuaciones de este tipo; en particular, él prueba (12.7.1). Mediante la misma técnica, Gerber (1974) encuentra el límite de la distribución condicional de $-U(T)$, dado que $T < \infty$, para $u \to \infty$.

Si modificamos el modelo al suponer que el excedente gana interés a una fuerza constante $\delta > 0$, tenemos que reemplazar c por $c + \delta\, u$ en la ecuación integro-diferencial (12.A.7) del Apéndice de este capítulo. En el caso de montos de reclamación exponenciales, la ecuación resultante tiene una solución explícita en términos de la función gama.

Si los papeles de las primas y reclamaciones se intercambian, con las primas representando los pagos por el asegurador y las reclamaciones representando los pagos al asegurador, en tal forma que

$$U(t) = u - c\,t + S(t)$$

en donde ahora se supone que $c < \lambda p_1$, existe una fórmula explícita,

$$\psi(u) = e^{-R u}$$

Para probarlo, se establece un resultado parecido al Teorema 12.1 y se observa que el excedente en el tiempo de la ruina es necesariamente 0. Se ha sugerido que este modelo podría utilizarse para un portafolio de anualidades en donde una muerte libera la reserva del tenedor de la póliza y conduce a una reclamación negativa.

Seal (1978) discute métodos numéricos para evaluar la probabilidad de la ruina en un intervalo de tiempo finito. Beekman y Bowers (1972) aproximan $\psi(u,t)$ equiparando los momentos. Gerber (1974) y DeVylder (1978) dan límites superiores para $\psi(u,t)$ mediante argumentos de amarre.

Apéndice

Demostración del Teorema 12.1:

Para $t > 0$ y $r > 0$, consideramos

$$\begin{aligned} E\left[e^{-r\,U(t)}\right] &= E\left[e^{-r\,U(t)} \middle| T \le t\right] \Pr(T \le t) \\ &\quad + E\left[e^{-r\,U(t)} \middle| T > t\right] \Pr(T > t) \end{aligned} \tag{12.A.1}$$

Como $U(t) = u + c\,t - S(t)$, el término del lado izquierdo es

$$\exp\left\{-r\,u - r\,c\,t + \lambda\,t\left[M_X(r) - 1\right]\right\} \tag{12.A.2}$$

En el primer término del lado derecho, escribimos

$$\begin{aligned} U(t) &= U(T) + \left[U(t) - U(T)\right] \\ &= U(T) + c(t-T) - \left[S(t) - S(T)\right] \end{aligned}$$

Para una T determinada, el término entre paréntesis cuadrados es independiente de $U(T)$ y tiene una distribución de Poisson compuesta con parámetro de Poisson $\lambda(t-T)$. Por lo que el primer término del lado derecho de (12.A.1) puede escribirse como

$$E\left[\exp\left(-r\,U(T)\right)\exp\left\{-r\,c(t-T) + \lambda(t-T)\left[M_X(r) - 1\right]\right\} \middle| T \le t\right] \Pr(T \le t) \tag{12.A.3}$$

Las expresiones (12.A.2) y (12.A.3) pueden simplificarse mucho si escogemos r tal que

$$-r\,c+\lambda\left[M_X(r)-1\right]=0$$

Existen dos soluciones (véase la figura 12.4). La solución $r=0$ proporciona una identidad trivial cuando se sustituye en (12.A.1), pero la otra solución, $r=R$, servirá para nuestros propósitos. Si, con $r=R$, sustituimos las expresiones simplificadas en (12.A.1), obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-R\,u} &= E\left[e^{-R\,U(T)}\middle|T\le t\right]\ \Pr(T\le t) \\ &\quad + E\left[e^{-R\,U(t)}\middle|T>t\right]\ \Pr(T>t) \end{aligned} \tag{12.A.43}$$

Ahora dejemos que $t\to\infty$. El primer término del lado derecho converge a

$$E\left[e^{-R\,U(T)}\middle|T<\infty\right]\psi(u)$$

Por tanto del Teorema 12.1 se sigue, si podemos demostrar que el segundo término del lado derecho desaparece para $t\to\infty$. Demostraremos esto en la siguiente forma:

Sea $\alpha=c-\lambda p_1$, $\beta^2=\lambda p_2$. Por tanto, de (12.2.6) y (12.2.7)

$$\begin{aligned} E\left[U(t)\right] &= E\left[u+c\,t-S(t)\right]=u+\alpha\,t \\ Var\left[U(t)\right] &= Var\left[S(t)\right]=\beta^2 t \end{aligned}$$

Consideramos $u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}$, que es positiva para una t suficientemente grande. Ahora dividimos el segundo término del lado derecho de (12.A.4) distinguiendo si $U(t)$ es menor que o mayor que $u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}$. Con esta división, tenemos

$$\begin{aligned} &E\left[e^{-R\,U(t)}\middle|T>t, 0\le U(t)\le u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}\right]\ \Pr\left[T>t, 0\le U(t)\le u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}\right] \\ &+E\left[e^{-R\,U(t)}\middle|T>t,\ U(t)>u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}\right]\ \Pr\left[T>t, U(t)>u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}\right] \\ &\le \Pr\left[U(t)\le u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}\right]+\exp\left[-R\left(u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}\right)\right] \\ &\le t^{-1/3}+\exp\left[-R\left(u+\alpha\,t-\beta\,t^{2/3}\right)\right] \end{aligned}$$

mediante la desigualdad de Chebychev, el límite superior del segundo término del lado derecho de (12.A.4) se desaparece cuando $t\to\infty$.

V

Demostración del Teorema 12.3:

Los siguientes cálculos producen una fórmula recursiva simple para el excedente modificado:

$$\begin{aligned}\hat{U}_t &= U_t - \frac{a}{1-a}W_t \\ &= U_{t-1} + c - W_t - \frac{a}{1-a}W_t \\ &= U_{t-1} + c - \frac{1}{1-a}W_t \\ &= U_{t-1} + c - \frac{1}{1-a}(Y_t + a\,W_{t-1}) \\ &= \hat{U}_{t-1} + c - \frac{Y_t}{1-a} \qquad t = 1,2,\ldots\end{aligned} \tag{12.A.5}$$

De (12.A.5), (12.4.17) y la independencia de las Y_t's se sigue que para cualquier n

$$E\left[\exp\left\{-R(\hat{U}_n - \hat{U}_t)\right\}\right] = 1 \qquad t = 0,1,\ldots,n. \tag{12.A.6}$$

Ahora consideremos la identidad

$$\begin{aligned}E\left[\exp(-R\,\hat{U}_n)\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\exp(-R\,\hat{U}_n)\middle|\bar{T} = i\right]\,\Pr(\bar{T} = i) \\ + E\left[\exp(-R\,\hat{U}_n)\middle|\bar{T} > n\right]\,\Pr(\bar{T} > n).\end{aligned} \tag{12.A.7}$$

De (12.A.6) para $t = 0$, se sigue que la expresión del lado izquierdo de (12.A.7) es $\exp(-\bar{R}\,\hat{u})$. En la sumatoria del lado derecho reemplazamos $\hat{U}_n$ por $\hat{U}_t + (\hat{U}_n - \hat{U}_t)$. La diferencia, $\hat{U}_n - \hat{U}_t$, es independiente de $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \ldots \hat{U}_t$. Lo que puede confirmarse usando (12.A.5) y la independencia de las Y's. En especial $(\hat{U}_n - \hat{U}_t)$ es independiente del evento $\bar{T} = i$. Se sigue de (12.A.6) que

$$E\left[\exp(-R\,\hat{U}_n)\middle|\bar{T} = i\right] = E\left[\exp(-R\,\hat{U}_t)\middle|\bar{T} = i\right]$$

Por tanto (12.A.7) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\exp(-R\,\hat{u}) = \sum_{i=1}^{n} E\left[\exp(-R\,\hat{U}_t)\middle|\bar{T} = i\right]\,\Pr(\bar{T} = i) \\ + E\left[\exp(-R\,\hat{U}_n)\middle|\bar{T} > n\right]\,\Pr(\bar{T} > n)\end{aligned} \tag{12.A.8}$$

que es similar a (12.A.4). Ahora permitimos que $n \to \infty$. Entonces el primer término del lado derecho de (12.A.8) converge a

$$\sum_{i=1}^{n} E\left[\exp(-R\,\hat{U}_i)\middle|\tilde{T}=i\right]\Pr(\tilde{T}=i) = E\left[\exp(-R\,\hat{U}_T)\middle|\tilde{T}<\infty\right]\Pr(\tilde{T}<\infty)$$

Por lo tanto para completar la demostración del Teorema 12.3 tenemos que demostrar que el segundo término del lado derecho de (12.A.8) desaparece cuando $n \to \infty$. Hacemos esto de la siguiente manera.

De (12.4.16) se sigue que

$$E[S_n] = n\frac{E[\Upsilon]}{1-a} - a\frac{1-a^n}{1-a}\left\{\frac{E[\Upsilon]}{1-a} - \omega\right\}$$

Como $c > E[\Upsilon]/(1-a)$, existe un número positivo α tal que $E[U_n] > u + \alpha\, n$ si n es suficientemente grande. Adicionalmente, se sigue de (12.4.16) que existe un número β^2 tal que $Var[U_n] < \beta^2\, n$. Podemos ahora usar el mismo razonamiento que usamos al final de la demostración del Teorema 12.1 para demostrar que el segundo término del lado derecho de (12.A.8) converge a 0 cuando $n \to \infty$.

∇

Demostración del Teorema 12.4:

Para esta demostración introducimos un nuevo concepto que tiene por sí mismo interés. Permitimos que $\omega(x), x < 0$, sea una función con $\omega(x) \geq 0$. Definimos

$$\psi(u;\omega) = E\left[\omega(U(T))\middle|T<\infty\right]\psi(u) \qquad (12.A.9)$$

considerada como una función del excedente inicial, u. Podemos interpretar a $\omega(x)$ como una ***sanción*** si el excedente en el tiempo de la ruina es x. En este caso $\psi(u;\omega)$ es el valor esperado de la sanción. Algunos ejemplos son

a. $\omega(x) = e^{-R\,x}$, entonces (12.3.4) demuestra que $\psi(u;\omega) = e^{-R\,u}$

b. si $\omega(x) = 1$, entonces (12.A.9) demuestra que $\psi(u;\omega) = \psi(u)$

c. si

$$\omega_h(x) = \begin{cases} 1 & x < -h \\ 0 & -h \leq x \leq 0, \end{cases}$$

entonces

$$\psi(0;\omega_h) = \Pr\left[U(T) < -h\middle|T<\infty\right]\psi(0)$$

Empezamos la prueba demostrando que, para toda función con límites $\omega(x)$, tenemos

$$\psi(0;\omega)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}\omega(-y)[1-P(y)]dy \tag{12.A.10}$$

De la propiedad (b) en la definición del proceso de Poisson compuesto en la sección 12.2 y la ley de la probabilidad total, observamos que para $u \geq 0$

$$\begin{aligned}\psi(u;\omega)&=(1-\lambda\, dt)\;\psi(u+c\, dt;\omega)\\&\quad+\lambda\, dt\left\{\int_0^{u}\psi(u-x;\omega)\,p(x)\,dx+\int_u^{\infty}\omega(u-x)p(x)dx\right\}\end{aligned} \tag{12.A.11}$$

Sustituimos $\psi(u+c\, dt;\omega)=\psi(u;\omega)+c\, dt\;\psi'(u,\omega)$, restamos $\psi(u;\omega)$ en ambos lados, y dividimos entre $c\, dt$ para obtener

$$\begin{aligned}\psi'(u;\omega)&=\frac{\lambda}{c}\psi(u;\omega)-\frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\psi(u-x;\omega)\,p(x)dx\\&\quad-\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}\omega(u-x)p(x)dx\end{aligned} \tag{12.A.12}$$

Debemos ahora integrar esta ecuación sobre u de 0 a z. Las dobles integrales que resultan pueden reducirse a integrales simples mediante un cambio en las variables. Para la primera integral reemplazamos x y u por x y $y=u-x$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{z}\int_0^{u}\psi(u-x;\omega)\,p(x)dx\,du&=\int_0^{z}\int_0^{z-y}\psi(y;\omega)\,p(x)\,dx\,dy\\&=\int_0^{z}\psi(y;\omega)P(z-y)\,dy\end{aligned}$$

En la segunda integral reemplazamos x y u por x y $y=x-u$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{z}\int_0^{\infty}\omega(u-x)\,p(x)dx\,du&=\int_0^{\infty}\int_y^{y+z}\omega(-y)\,p(x)dx\,dy\\&=\int_0^{\infty}\omega(-y)[P(y+z)-P(y)]dy\end{aligned}$$

Por lo tanto (12.A.12), integrada de 0 a z, da

$$\begin{aligned}\psi(z;\omega)-\psi(0;\omega)&=\frac{\lambda}{c}\int_0^{z}\psi(y;\omega)[1-P(z-y)]dy\\&\quad-\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}\omega(-y)[P(y+z)-P(y)]dy\end{aligned} \tag{12.A.13}$$

Para $z \to \infty$, los primeros términos de ambos lados desaparecen quedando

$$-\psi(0;\omega) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \omega(-y)[1-P(y)]dy$$

Ahora dejemos que $\omega_h(x)$ este definido al igual que en el ejemplo (c), es decir,

$$\omega_h(x) = \begin{cases} 1 & x < -h \\ 0 & -h \le x \le 0, \end{cases}$$

luego

$$\Pr\left[U(T) < -h | T < \infty\right]\psi(0) = \psi(0;\omega_h) = \frac{\lambda}{c}\int_h^\infty [1-P(y)]dy$$

De aquí, cuando $u = 0$, la probabilidad de que el excedente nunca caiga por debajo de 0, y este entre $-h$ y $-h-dh$, es

$$\frac{\lambda}{c}[1-P(h)]dh$$

Si $u > 0$, un evento con igual probabilidad es aquel en que el excedente nunca cae por debajo de u, y esta entre $u-h$ y $u-h-dh$. Esto prueba el Teorema 12.4.

Ejercicios

Sección 12.2

12.1. Suponga que $W_1, W_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con *f.d.* $F(x)$ común y *f.d.p.* $f(x)$, $x \ge 0$. Dado que $N(t) = t$ y $T_i = s$ $(s < t)$, ¿cuál es la probabilidad de la ocurrencia de una reclamación entre los tiempos t y $t+dt$? (Esta generalización del proceso de Poisson se denomina un proceso de renovación.)

12.2. Permita que $\{N(t), t \ge 0\}$ sea un proceso de Poisson con parámetro λ y $p_n(t) = \Pr[N(t) = n]$.

a. Demuestre que

$$p_0'(t) = -\lambda \; p_0(t)$$
$$p_n'(t) = -\lambda \; p_n(t) + \lambda \; p_{n-1}(t) \quad n \ge 1$$

b. Interprete estas fórmulas.

Sección 12.3

12.3 Calcule el $\lim_{c\to\lambda p_1} R$ y $\lim_{c\to\infty} R$ .lím

12.4. Use

$$e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2 \quad r>0, x>0$$

para demostrar que

$$R < \frac{2\theta p_1}{p_2}$$

12.5. Suponga que $\theta = 2/5$ y

$$p(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x} \quad x>0,$$

Calcule

a. γ b. R.

12.6. Suponga que la distribución del monto de las reclamaciones es discreta con $p(1) = 1/4$ y $p(2) = 3/4$. Si $R = \log 2$, calcule θ .

12.7. Demuestre que el coeficiente de ajuste puede obtenerse también como la solución única de la ecuación

$$\int_0^\infty e^{rx}\left[1 - P(x)\right]dx = \frac{c}{\lambda} \quad r < \gamma$$

Sección 12.4

12.8. Suponga que W_i asume solamente los valores 0 y +2 y que $\Pr(W=0) = p$, $\Pr(W=2) = q$ donde $p+q=1$. Asuma que $c=1$, $p>1/2$ y que u es un entero. Para este caso, determine

a. $U(\tilde{T})$ b $\varphi(u)$ en términos de $\tilde{R}$

c. $\tilde{R}$ en términos de p,q d. $\varphi(u)$ en términos de p,q

12.9. Considere las reclamaciones en los periodos $n+1, n+2, \ldots, n+m$ y represente su total mediante $S_{n,m}$; es decir, $S_{n,m} = W_{n+1} + W_{n+2} + \cdots + W_{n+m}$. El monto de reclamaciones para cada periodo se genera por el proceso estocástico descrito en (12.4.13). Con lo anterior verifique lo siguiente:

a.
$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^{m} \Upsilon_{n+i} \sum_{j=0}^{m-i} a^j + W_n \sum_{j=1}^{m} a^j$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a} \right) \Upsilon_{n+i} + \left(\frac{a-a^{m+1}}{1-a} \right) W_n$$

b. A medida que $m \to \infty$ el último término del lado derecho de la expresión en (a) converge a

$$\frac{a\, W_n}{1-a}$$

c. $$E\left[S_{n,m} | W_1 = w_1, W_2 = w_2, \ldots, W_n = w_n \right]$$
$$= \left[\frac{m(1-a) - a + a^{m+1}}{(1-a)^2} \right] \mu + \left(\frac{a-a^{m+1}}{1-a} \right) w_n .$$

en donde $E(\Upsilon_{n+i}) = \mu$.

Sección 12.5

12.10. Utilice el Teorema 12.4 para evaluar el denominador de (12.3.4) en el caso de que $u = 0$. ¿Es su resultado consistente con (12.5.2) ?

12.11. Demuestre mediante interpretación que $\psi(u)$, $u \geq 0$, satisface

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(y)] \psi(u-y)\, dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - P(y)]\, dy$$

[Sugerencia: Use el Teorema 12.4.]

12.12. Sustituya

$$M_X(r) = 1 + p_1 r + p_2 \frac{r^2}{2} + p_3 \frac{r^3}{6} + \cdots$$

en (12.5.4) para derivar expresiones para

a. $E[L_1]$ b. $E[L_1^2]$ c. $Var[L_1]$

Sección 12.6

12.13. a. Para N similar a la de (12.6.5), demuestre que $E[N] = 1/\theta$ y $Var[N] = (1+\theta)/\theta^2$.

b. Use el resultado del ejercicio 12.12 para derivar expresiones para $E[L]$ y $Var[L]$. [Sugerencia: las fórmulas (12.6.5), (11.2.5) y (11.2.6) con $p_1 = E[L_1]$, $Var[X] = Var[L_1]$, son de utilidad. Para una derivación alternativa, expanda $M_L(r)$ en (12.6.4) en potencias de r.]

12.14. Defina la *f.g.m.* de L si todas las reclamaciones son de tamaño 2.

12.15. Bajo ciertos supuestos, la probabilidad de la ruina es

$$\psi(u) = (0.3)e^{-2u} + (0.2)e^{-4u} + (0.1)e^{-7u} \quad u \geq 0$$

Calcule

a. θ b. R

12.16. ¿Cuál es el tamaño de las reclamaciones esperado para una distribución de la forma (12.6.10)?

12.17. Suponga que $\lambda = 3$, $c = 1$ y

$$p(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x} \quad x > 0$$

Calcule y/o determine

a. p_1
b. θ
c. $M_X(r)$
d. expresiones para los lados derechos de (12.6.9) y (12.6.12)
e. una fórmula explícita para $\psi(u)$.

12.18. Suponga que $\lambda = 1$, $c = 10$, y

$$p(x) = \frac{9x}{25}e^{-3x/5} \quad x > 0$$

Calcule y/o determine

a. p_1
b. θ
c. $M_X(r)$
d. expresiones para los lados derechos de (12.6.9) y (12.6.12)
e. una fórmula explícita para $\psi(u)$.

12.19. La discusión de Beekman (1969) y Bowers' sugirió la siguiente aproximación para la *f.d.* de L

$$\Pr(L \le u) \equiv \xi J(u) + (1-\xi)G(u:\alpha,\beta)$$

donde $I(x)$ es la *f.d.* degenerada de la constante 0 y $G(u:\alpha,\beta)$ es la distribución gama con parámetros α y β.

a. Determine ξ, α y β que equipara el punto de masa en el origen y con los dos primeros momentos de L [véase el ejercicio 12.13(b)].

b. ¿Cuál es la aproximación resultante para $\psi(u)$, $u \ge 0$?

Misceláneos

12.20 En el contexto de la fórmula (12.4.1) permita que $G_i = U_i - U_{i-1}$ represente la ganancia del asegurador entre los tiempos $i-1$ e i. Suponga que $G_1, G_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Suponga además que $u(x) = -e^{-\alpha x}, \alpha > 0$, es la función de utilidad del asegurador. Demuestre que

$$E\left[u(U_{n+1}) | U_n = x\right] \ge u(x)$$

si y solo si $\alpha \le \tilde{R}$, e interprete el resultado.

12.21. Si cambiamos las unidades de tiempo de tal forma que las nuevas unidades sean f veces las antiguas (para alguna $f > 0$), y permitimos que $\tilde{c}, \tilde{\lambda}, \tilde{\psi}(u,t)$ representen los parámetros del modelo en términos de las nuevas unidades,

a. ¿cuáles son estos nuevos parámetros en términos de c, λ y $\psi(u,t)$?

b. ¿Para qué valor de f es $\tilde{\lambda} = 1$? (Algunos autores se refieren a estas unidades como tiempo operacional.)

Apéndice

12.22. Suponga que todas las reclamaciones son de tamaño 1.

a. Enuncie la ecuación para $\psi(u)$ que corresponda a (12.A.12).

b. Resuelva la ecuación si $0 \le u \le 1$.

APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL RIESGO

13.1 Introducción

El modelo de riesgo colectivo se desarrolló en los Capítulos 11 y 12. Este modelo está construido con fundamento en los supuestos de que un conjunto de pólizas genera un número aleatorio de reclamaciones en cada periodo y de que cada reclamación puede ser de un monto aleatorio. Para aplicar el modelo, se necesita información acerca de la distribución del número de reclamaciones y la distribución de los montos de las reclamaciones individuales. La selección de estas distribuciones se discutió en la Sección 11.3 y en este capítulo sólo se añadirán advertencias sobre definiciones para la distribución del número de reclamaciones. Aquí la distribución de los montos de las reclamaciones individuales se ejemplificará en términos de cuatro diferentes líneas de seguro: contra incendio, para automóvil, de incacidad a corto plazo y de hospitalización.

Discutiremos dos métodos para aproximar, tanto como sea posible, el modelo de la teoría del riesgo individual para un portafolio de seguros mediante un modelo colectivo. Esto proporciona la forma de sustituir los modelos colectivos por individuales para las situaciones de corto plazo.

Se explora el concepto de reaseguro ***stop-loss*** (exceso de pérdida) para prever pérdidas adicionales para un portafolio de pólizas, en general, en relación con los modelos de Poisson compuestos. Para estos últimos, el método recursivo de la Sección 11.4 para calcular la distribución de las reclamaciones agregadas, proporciona los medios para el cálculo de las primas netas del reaseguro stop-loss. Adicionalmente, discutiremos la interpretación de un tipo de fórmula de dividendos del grupo de seguros como un seguro stop-loss.

Se examinará el efecto del reaseguro sobre el coeficiente de ajuste, y por tanto sobre la probabilidad de la ruina, para varias formas de reaseguro.

El principal propósito de este capítulo es indicar varias maneras de aplicar la teoría del riesgo a problemas de seguros.

13.2 Las distribuciones del monto de las reclamaciones

Para dar una idea de la amplia gama de aplicaciones de los modelos de la teoría del riesgo, se presentarán en esta sección cuatro aplicaciones específicas pero diferentes. La discusión será acerca de la distribución del monto de las reclamaciones individuales. Ello podrá después combinarse con las probabilidades de las reclamaciones individuales ocurridas, para proporcionar un modelo de riesgo individual, o combinarlas con una distribución para el número de reclamaciones de un conjunto de seguros, para proporcionar un modelo de riesgo colectivo. Las aplicaciones sugeridas en esta sección podrían ser utilizadas por una compañía de seguros para manejar una línea de negocios o un bloque de pólizas similares, o por una firma industrial que utiliza modelos en su programa de riesgos gerenciales.

Seguro contra incendios:

En esta línea de seguro, el evento de reclamación es un incendio que genera una pérdida en una construcción asegurada. Debido a que los incendios pueden causar graves daños, debe asignarse probabilidad adecuada a los montos de reclamaciones más altos mediante la $f.d.$ $P(x)$. En la literatura actuarial se han sugerido algunas distribuciones estándar. Se enlistan tres de estas distribuciones en el Cuadro 13.1.

Cuadro 13.1

Distribuciones típicas del monto de reclamaciones

Nombre	$p(x)$	*Media*	*Varianza*
Lognormal	$(x\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp\left\{\frac{-(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}$ $x>0,\ \sigma>0$	$\exp(m+\sigma^2/2)$	$(e^{\sigma^2}-1)\exp(2m+\sigma^2)$
Pareto	$\frac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$ $x>x_0>0,\ \alpha>0$	$\frac{\alpha x_0}{\alpha-1}$ $\alpha>1$	$\frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$ $\alpha>2$
Mezcla de Exponenciales	$p\,\alpha\, e^{-\alpha x}+q\,\beta\, e^{-\beta x}$ $x>0,\ 0<p<1,\ q=1-p\ \alpha,\beta>0$	$\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}$	$\frac{p(1+q)}{\alpha^2}+\frac{q(1+p)}{\beta^2}-\frac{2pq}{\alpha\beta}$

Una indicación de la amplitud de la dispersión de probabilidad en el caso de la distribución de Pareto está dada por el hecho de que la media no existe a menos $\alpha > 1$ y la varianza no existe a menos que $\alpha > 2$.

Para aplicar uno de estas distribuciones estándar, los parámetros de la distribución podrían estimarse a partir de una muestra de montos de reclamaciones.

Daño físico de automóvil:

En esta línea de seguro, un evento de reclamación es un incidente que provoca daños a un automóvil asegurado. El monto de la reclamación no tendrá la amplia variabilidad encontrada en el seguro contra incendio. Por esta razón, la distribución gama (11.5.6) ha sido utilizada ocasionalmente para la distribución del monto de las reclamaciones. Otra vez, los parámetros de la distribución podrían estimarse a partir de una muestra de montos de reclamaciones.

Seguro de incapacidad de corto plazo:

Este seguro proporciona beneficios de ingreso a personas incapacitadas. Usualmente hay un periodo definido de espera, 7 días por ejemplo, consecutivos a la ocurrencia de la incapacidad hasta que se inicia el beneficio. Hay también un límite superior sobre el periodo de pago, tal como 13 semanas. Cuando se expide para un grupo, el seguro se llama ***seguro de grupo de indemnización semanal.***

El beneficio es una cantidad fija por día y el monto de la reclamación es directamente proporcional al periodo de tiempo que la reclamación por incapacidad ha continuado después del periodo de espera. Sea Y una variable aleatoria que representa tal periodo de tiempo. A partir de las estadísticas de reclamaciones, se puede estimar la distribución de Y y tabularse en una forma similar a la del Cuadro 13.2. El lector notará la similitud entre la función representada en la segunda columna del Cuadro 13.2 y la función de sobrevivencia discutida para las tablas de mortalidad en el Capítulo 3. Como se utiliza en este caso, se le conoce como una ***función de continuación***. Esta produce probabilidades de continuación o sobrevivencia de una reclamación por incapacidad para las longitudes de tiempo indicadas. De igual forma que

la función de sobrevivencia puede utilizarse para expresar varias probabilidades de sobrevivencia y muerte, la función de continuación puede emplearse para proporcionar varias probabilidades de continuación y terminación de la incapacidad.

Al aplicar un modelo de riesgo colectivo para un seguro de grupo de ingresos por incapacidad del tipo ilustrado, $\Pr(N=n)$ deberá interpretarse como la probabilidad de que n incapacidades, cada una de las cuales continua al menos durante 7 días, ocurran durante el plazo del seguro entre el grupo de asegurados.

Cuadro 13.2 Distribución ilustrativa de Υ, el tamaño de la reclamación en el seguro de grupo de ingresos por incapacidad semanal (máximo beneficio 13 semanas, periodo de espera 7 días)

Tamaño de la reclamación (en días) y	$Pr(\Upsilon > y)$	$Pr(\Upsilon = y)$
0	1.00000	-
1	0.96500	0.03500
2	0.93026	0.03474
3	0.89677	0.03349
4	0.86359	0.03318
5	0.83164	0.03195
6	0.80004	0.03160
7	0.76964	0.03040
8	0.73962	0.03002
9	0.71077	0.02885
10	0.68376	0.02701
11	0.65846	0.02530
12	0.63476	0.02370
13	0.61254	0.02222
14	0.59171	0.02083
15	0.57218	0.01953
16	0.55387	0.01831
17	0.53615	0.01772
18	0.51953	0.01662
19	0.50342	0.01611
20	0.48832	0.01510
21	0.47367	0.01465
22	0.45993	0.01374
23	0.44659	0.01334
24	0.43364	0.01295
25	0.42150	0.01214
26	0.40970	0.01180
27	0.39864	0.01106

28	0.38788	0.01076
31	-	0.06361*
35	0.32427	-
38	-	0.04832
42	0.27595	-
45	-	0.03753
49	0.23842	-
52	-	0.02980
56	0.20862	-
59	-	0.02399
63	0.18463	-
66	-	0.01939
70	0.16524	-
73	-	0.01586
77	0.14938	-
80	-	0.01300
84	0.13638	-
87	-	0.01077
91	0.00000	0.12561
		1.00000

* por conveniencia, las terminaciones de las reclamaciones de una semana de aquí en adelante se consideraron como terminaciones al final del tercer día de la semana.

Si el beneficio de ingresos es una cantidad c por día, la distribución del monto de las reclamaciones está dada por

$$p(x) = \Pr\left(Y = \frac{x}{c}\right) \quad x = c,\ 2c,\ 3c,\ldots,\ 28c,\ 31c,\ldots,\ 87c,\ 91c$$

Para este seguro de corto plazo, no se consideró el interés.

Seguro de hospitalización:

Consideraremos aquí el seguro de hospitalización que proporciona un beneficio neto diario durante la hospitalización. Se puede utilizar un cuadro de continuación de la hospitalización para producir una *f.p.* para el tiempo de la estancia en un hospital para cada hospitalización. En la Figura 13.1 se muestra una gráfica de una función de continuación de hospitalización.

Al aplicar un modelo de riesgo colectivo a un seguro de hospitalización de este tipo expedido a un grupo de vida, $\Pr(N = n)$ deberá interpretarse como la probabilidad de que n hospitalizaciones, que cumplan con la definición contenido en la póliza, ocurran durante el periodo a los miembros del grupo asegurado. Si la cantidad del beneficio es c por día, la *f.p.* del monto de la reclamación esta dada por

$$p(x) = \Pr\left(\Upsilon = \frac{x}{c} \right) \quad x = c,\ 2c,\ \ldots,\ mc$$

en donde la variable aleatoria Υ representa el tiempo de la hospitalización en días y m es el número máximo de días para los que se paga el beneficio.

El uso de modelos de riesgo en estas aplicaciones nos permite estimar la prima pura total requerida. Además, esta estimación puede complementarse con enunciados acerca de la variabilidad de las pérdidas.

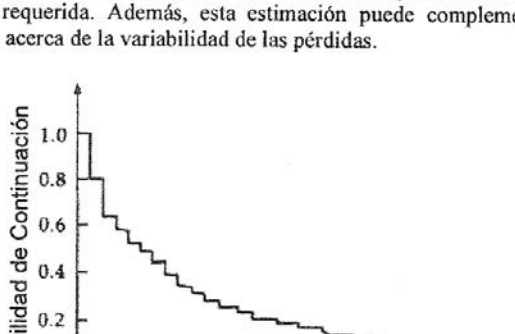


Figura 13.1 Función de continuación para el seguro de hospitalización

13.3 Aproximación del modelo individual

Los modelos de riesgo individual y colectivo son estructuras alternativas diseñadas para capturar aspectos clave de los sistemas de seguro. Cada modelo conduce al desarrollo de una distribución de las reclamaciones totales para el sistema de seguro que se pretende reflejar en el modelo. En esta sección desarrollaremos dos métodos mediante los cuales la distribución de Poisson compuesta, usualmente asociada con el modelo de riesgo colectivo, puede ser utilizada para aproximar la distribución de las reclamaciones totales en el modelo individual.

Consideremos el modelo individual desarrollado en el Capítulo 2 para aplicarlo a un grupo de n pólizas. Las reclamaciones totales en un periodo de la póliza para el grupo es $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ en donde X_j es la reclamación que resulta de la póliza $j (j = 1,2,...,n)$. Distinguiremos entre la ocurrencia de una reclamación y su monto, y escribimos

$$X_j = I_j B_j \tag{13.3.1}$$

Aquí I_j es 1 si la póliza j conduce a una reclamación y 0 en cualquier otro caso; B_j es el monto de tal reclamación, en el caso que ocurra. Bajo el supuesto de que I_j, B_j son mutuamente independientes $j = 1,2,...,n$, se sigue que

$$E[S] = \sum_{j=1}^{n} q_j \ \mu_j \tag{13.3.2}$$

y

$$Var[S] = \sum_{j=1}^{n} q_j (1 - q_j) \mu_j^2 + \sum_{j=1}^{n} q_j \sigma_j^2 \tag{13.3.3}$$

[véase (2.2.25) y (2.2.26)] en donde q_j representa la probabilidad de que la póliza j conduzca a una reclamación y $\mu_j = E[B_j]$, $\sigma_j^2 = Var[B_j]$.

Representaremos a la *f.d.* de B_j mediante $P_j(x)$. Si ocurre una reclamación, la probabilidad de que provenga de la póliza j es, por el Teorema de Bayes, aproximadamente $q_j/(q_1+q_2+\cdots+q_n)$. Entonces por la ley de la probabilidad total, la *f.d.* del monto de una reclamación determinada es aproximadamente

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j P_j(x)}{q_1+\cdots+q_n} \tag{13.3.4}$$

Consideraremos dos métodos de aproximación a la distribución de S mediante una distribución de Poisson compuesta.

El primer método utiliza la distribución de Poisson compuesta con parámetro

$$\lambda = q_1+q_2+\cdots+q_n \tag{13.3.5}$$

y la *f.d.* de los montos de reclamaciones individuales

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x) \tag{13.3.6}$$

La interpretación de (13.3.5) es que el número esperado de reclamaciones en el modelo de Poisson compuesto es la misma que el del modelo de riesgo individual original. Igualmente (13.3.6) significa que la distribución de una reclamación, dado que esta haya ocurrido, es la misma en los dos modelos, como puede verse en (13.3.4).

La distribución de Poisson compuesta especificada mediante (13.3.5) y (13.3.6) puede también explicarse en la siguiente forma: en el modelo individual, el número de reclamaciones producidas por la póliza j es una variable aleatoria de Bernoulli. Ahora podemos aproximar su distribución mediante la distribución de Poisson con parámetro q_j. En forma correspondiente, la distribución de X_j se aproxima mediante la distribución de Poisson compuesta dada por q_j y $P_j(x)$. Luego usamos el Teorema 11.1 para aproximar la distribución de S mediante la distribución de Poisson compuesta dada por (13.3.5) y (13.3.6).

De (13.3.6), se sigue que

$$p_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} E[B_j^k] \quad k = 1,\ 2,... \tag{13.3.7}$$

En particular,

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \mu_j$$

y

$$p_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} (\mu_j^2 + \sigma_j^2)$$

Por tanto, la media de la distribución aproximada de Poisson compuesta, $\lambda\, p_1$, coincide con la media de las reclamaciones totales en el modelo individual original [veáse (13.3.2)]. Por otra parte, la varianza de la distribución aproximada de Poisson compuesta, $\lambda\, p_2$, es

$$\sum_{j=1}^{n} q_j\ (\mu_j^2 + \sigma_j^2) \tag{13.3.8}$$

y excede a la varianza del total de reclamaciones en el modelo individual [véase (13.3.3)]. Sin embargo, si las q_j's son pequeñas, las dos varianzas son aproximadamente las mismas.

Consideremos el caso especial en donde el monto de reclamación para cada póliza es constante, $B_j = b_j$, así que $\mu_j = b_j$ y $\sigma_j = 0$. Entonces la *f.p.* de los montos de reclamaciones individuales de acuerdo con (13.3.6) es

$$p(x) = \sum_{b_j = x} \frac{q_j}{\lambda} \tag{13.3.9}$$

Donde la suma se hace sobre las pólizas para las cuales $b_j = x$.

Adicionalmente, la relación de la varianza de las reclamaciones totales en el modelo individual [véase (13.3.3)] con la varianza de la distribución aproximada de Poisson compuesta véase (13.3.8)] es

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} q_j b_j^2 (1-q_j)}{\sum_{j=1}^{n} q_j b_j^2} \tag{13.3.10}$$

Esta relación puede interpretarse como un promedio ponderado de las probabilidades de que no hay reclamaciones, $1-q_j$.

Ejemplo 13.1:

En el Ejemplo 2.3 considerábamos un portafolio de 1800 pólizas. Aproxime la distribución de las reclamaciones agregadas mediante una distribución de Poisson compuesta y discuta la aproximación resultante para la varianza de las reclamaciones agregadas.

Solución:
De acuerdo con (13.3.5),

$$\lambda = 500(0.02) + 500(0.02) + 300(0.1) + 500(0.1) = 100$$

De acuerdo con (13.3.9)

$$p(1) = \frac{500(0.02) + 300(0.1)}{100} = 0.4$$
$$p(2) = \frac{500(0.02) + 500(0.1)}{100} = 0.6$$

Entonces $p_2 = p(1) + 4p(2) = 2.8$, y la varianza de la aproximación de Poisson compuesta es $\lambda p_2 = 280$. Como se esperaba, esto excede la varianza de las reclamaciones agregadas en el modelo individual, que se encontró que era 256 en el Ejemplo 2.3. ▼

El segundo método utiliza la distribución de Poisson compuesta con parámetro de Poisson

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \cdots + \tilde{\lambda}_n \tag{13.3.11}$$

en donde $\tilde{\lambda}_j = -\log(1-q_j)$, y la *f.d.* de los montos de reclamaciones individuales

$$\tilde{P}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}} P_j(x) \tag{13.3.12}$$

La motivación para (13.3.11) y (13.3.12) es similar a la de (13.3.5) y (13.3.6). La diferencia clave es que en (13.3.5) el número esperado de reclamaciones en los dos modelos es igual mientras que (13.3.11) implica

$$e^{-\tilde{\lambda}} = \prod_{j=1}^{n} (1-q_j)$$

es decir, las probabilidades de que no haya reclamaciones son las mismas en los dos modelos.

Ejemplo 13.2:

Para el portafolio de 1800 pólizas estudiado en los Ejemplos 2.3 y 13.1, calcule la aproximación de Poisson compuesta a la distribución de las reclamaciones agregadas mediante el segundo método.

Solución:

$$\tilde{\lambda} = -500\log(0.98) - 500\log(0.98) - 300\log(0.9) - 500\log(0.9) = 104.5$$

$$\tilde{p}(1) = \frac{-500\log(0.98) - 300\log(0.9)}{104.5} = 0.399$$

$$\tilde{p}(2) = \frac{-500\log(0.98) - 500\log(0.9)}{104.5} = 0.601$$

▼

En esta sección presentamos dos métodos para aproximar la distribución de las reclamaciones agregadas en el modelo individual mediante una distribución de Poisson compuesta. Si todas la q_j's para el modelo individual son pequeñas (lo que podría ser el caso respecto de las pólizas de seguro de vida), los dos métodos producen resultados muy similares, por lo que, en ese caso,

$$\tilde{\lambda}_j = -\log(1-q_j) = q_j + \frac{1}{2}q_j^2 + \cdots \cong q_j$$

13.4 Reaseguro Stop-Loss (Exceso de Pérdida)

El concepto de un seguro con deducible se discutió en la Sección 1.5. Se dio una definición en (1.5.1) y se estableció una propiedad de óptimalidad en el Teorema 1.1. Cuando ese tipo de cobertura se escribe para un conjunto de riesgos de seguro se denomina reaseguro stop-loss, que constituye el tema de esta sección. En una aplicación determinada S puede representar a las reclamaciones totales en un periodo determinado para una compañía de seguros, o para un bloque de negocios de una compañía, o para un contrato de seguro de grupo de vida o de salud.

Para un contrato para prever pérdidas adicionales (stop-loss) con deducible d, el monto pagado por el reasegurador al asegurador que transfiere es

$$I_d = \begin{cases} 0 & S \le d \\ S-d & S > d \end{cases} \tag{13.4.1}$$

Nótese que I_d, como función de las reclamaciones agregadas S, es también una variable aleatoria. El monto de las reclamaciones retenidas por el asegurador que transfiere es

$$S - I_d = \begin{cases} S & S \le d \\ d & S > d \end{cases} \tag{13.4.2}$$

Por lo tanto, el monto retenido está limitado por d, lo que explica el nombre de contrato para prever pérdidas adicionales.

Discutiremos métodos para calcular $E[I_d]$, la prima neta para prever pérdidas adicionales (reaseguro) cuando el deducible es d. Representamos la *f.d.* de S mediante $F(x)$, y suponemos primero que S tiene una *f.d.p.* $f(x)$. Entonces

$$E[I_d] = \int_d^\infty (x-d) f(x) dx \tag{13.4.3}$$

Usualmente, S no puede asumir cualesquiera valor negativo. Entonces podemos extender la integral a $(0,\infty)$ y restar la integral sobre $(0,d)$ para ver que

$$E[I_d] = E[S] - d + \int_0^d (d-x) f(x) dx \tag{13.4.4}$$

Si establecemos

$$f(x) = -\frac{d}{dx}[1 - F(x)]$$

en (13.4.3), e integramos por partes, obtenemos

$$E[I_d] = \int_d^\infty [1 - F(x)] dx \tag{13.4.5}$$

Igualmente, obtenemos

$$E[I_d] = E[S] - \int_0^d [1 - F(x)] dx \tag{13.4.6}$$

a partir de (13.4.4).

Cada una de estas cuatro expresiones para $E[I_d]$ tiene sus propios méritos. Si $E[S]$ está disponible, las fórmulas (13.4.4) y (13.4.6) son preferibles cuando se requiere integración numérica, debido a que el rango de integración es finito. Esto reduce las posibilidades de aproximación inexacta de $f(x)$ para x grandes. Las Fórmulas (13.4.5) y (13.4.6) son válidas para distribuciones generales incluyendo aquellas de tipo discreto o mixto. Si la distribución de S está determinada en forma analítica, por ejemplo, si es una distribución normal o gama, (13.4.3) pude ser la fórmula más manejable.

Ejemplo 13.3:

Si S tiene una distribución gama, es decir, si $F(x) = G(x:\alpha,\beta)$ [véase (11.5.6)], demuestre que

$$E[I_d] = \frac{\alpha}{\beta}[1 - G(d:\alpha+1,\ \beta] - d[1 - G(d:\alpha,\ \beta)]$$

Solución:

De (13.4.3), obtenemos

$$\begin{aligned} E[I_d] &= \int_d^\infty x f(x)dx - d[1 - F(d)] \\ &= \int_d^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x} dx - d[1 - G(d:\alpha,\beta)] \end{aligned}$$

Ya que $\alpha\,\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, el integrando es α/β veces la *f.d.p.* gama con parámetros $\alpha+1$ y β. Por tanto se sigue la fórmula dada. ▼

Ejemplo 13.4:

Suponga que a, b son números con $\Pr(a < S < b) = 0$. Demuestre que, para $a < d < b$, puede obtenerse $E[I_d]$ de $E[I_a]$ y $E[I_b]$ mediante interpolación lineal.

Solución:
Del supuesto, se sigue que $F(x) = F(a)$ para $a \le x < b$. Usamos esto en (13.4.6) para ver que

$$E[I_d] = E[I_a] - (d-a)[1 - F(a)]$$

es decir, $E[I_d]$ es una función lineal de d en el intervalo $[a,b]$. ▼

Consideraremos ahora el caso donde los valores posibles de S son enteros no negativos y representamos mediante $f(x)$ la *f.p.* de S $(x = 0,1,2,...)$. En lo siguiente, se supone que el deducible d es un entero. De acuerdo con el ejemplo precedente, la prima neta para prever pérdidas adicionales para deducibles no enteros puede obtenerse mediante interpolación lineal.

Las fórmulas

$$E[I_d] = \sum_{x=d+1}^{\infty} (x-d) f(x) \tag{13.4.7}$$

y

$$E[I_d] = E[S] - d + \sum_{x=0}^{d-1} (d-x) f(x) \tag{13.4.8}$$

son las contrapartes de (13.4.3) y (13.4.4). Las integrales en las fórmuas (13.4.5) y (13.4.6) pueden escribirse como sumas, ya que $F(x)$ es una forma constante. Obtenemos

$$E[I_d] = \sum_{x=d}^{\infty} [1 - F(x)] \tag{13.4.9}$$

y

$$E[I_d] = E[S] - \sum_{x=0}^{d-1} [1 - F(x)] \tag{13.4.10}$$

Ejemplo 13.5:

Para la distribución de las reclamaciones agregadas del Ejemplo 11.2 calcule, mediante los dos métodos, la prima neta para stop-loss cuando el deducible es 7.

Solución:
De acuerdo con (13.4.7),

$$E[I_7] = f(8) + 2f(9) = 0.0028$$

Alternativamente, de acuerdo con (13.4.9),

$$E[I_7] = [1 - F(7)] + [1 - F(8)] = 0.0028$$ ▼

Ejemplo 13.6:

Calcule $E[I_6]$ para la distribución de Poisson compuesta utilizada en el Ejemplo 11.6.

Solución:
Como la distribución de Poisson compuesta tiene un rango infinito, el uso de (13.4.8) y (13.4.10) es más práctico aquí. Por ejemplo, usando (13.4.8) obtenemos

$$\begin{aligned} E[I_6] &= E[S] - 6 + \sum_{x=0}^{5} (6-x) f(x) \\ &= 1.7 - 6 + 4.3547 = 0.0547 \end{aligned}$$ ▼

En general, de (13.4.9), obtenemos una fórmula recursiva

$$E[I_{d+1}] = E[I_d] - [1 - F(d)] \quad d = 0,\ 1,\ 2,... \tag{13.4.11}$$

Por lo tanto $E[I_d]$ puede obtenerse recursivamente con un valor inicial $E[I_0] = E[S]$.

El enfoque recursivo es particularmente conveniente si S tiene una distribución de Poisson compuesta con parámetro λ y *f.p.* $p(x)$, $x = 1,2,...$, de los montos de reclamaciones individuales. En este caso, $f(x)$ también puede calcularse recursivamente [véase (11.4.15)]. Por lo tanto, empezando con

$$f(0) = F(0) = e^{-\lambda}$$

y

$$E[I_0] = \lambda\, p_1$$

usamos las fórmulas recursivas

$$f(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{j=1}^{x} j\ \ p(j) f(x-j)$$
$$F(x) = F(x-1) + f(x)$$
$$E[I_x] = E[I_{x-1}] - [1 - F(x-1)]$$

Sucesivamente para $x = 1,\ 2,\ 3,....$

Ejemplo 13.7:

Suponga que S tiene una distribución de Poisson compuesta con $\lambda = 1.5$, $p(1) = 2/3$, $p(2) = 1/3$. Calcule los valores de $f(x)$, $F(x)$, $E[I_x]$ para $x = 0,1,\ 2,\ ...,6$.

Solución:
Primero,

$$f(0) = F(0) = e^{-1.5} = 0.223$$

y

$$E[I_0] = \lambda\, p_1 = 1.5\ \frac{4}{3} = 2$$

Entonces, ya que $\lambda j\, p(j) = 1$ para $j = 1,\ 2,$

$$f(x) = \frac{1}{x}[f(x-1) + f(x-2)] \quad x = 1,\ 2, \ldots, 6$$

Nótese que $f(1) = f(0)$.

Los pasos restantes y los resultados se exhiben a continuación.

x	$f(x) = \frac{1}{x}[f(x-1) + f(x-2)]$	$F(x) = F(x-1) + f(x)$	$E[I_x] = E[I_{x-1}] + F(x-1) - 1$
0	0.223	0.223	2.000
1	0.223	0.446	1.223
2	0.223	0.669	0.669
3	0.149	0.818	0.338
4	0.093	0.911	0.156
5	0.048	0.959	0.067
6	0.024	0.983	0.026

Nuestra discusión se enfocó sobre el cálculo de $E[I_d]$, la prima neta para stop-loss. Típicamente, esto es simplemente un límite inferior para una prima real para prever pérdidas adicionales. La prima real contiene un factor de recargo que refleja la variabilidad del pago del reasegurador I_d Una medida de esta variabilidad es

$$Var[I_d] = E[I_d^2] - E[I_d]^2$$

En el caso discreto, es posible computar $E[I_d^2]$ recursivamente (véase el Ejercicio 13.8).

Nos ocuparemos ahora de una fórmula de dividendos para un seguro de grupo porque es un concepto idéntico al del reaseguro stop-loss. Recordará que el seguro de grupo es el nombre utilizado cuando un seguro que cubre a muchos individuos se compra en la forma de un sólo contrato por un patrocinador, por ejemplo, un patrón. Se dió un ejemplo en el caso de la incapacidad de corto plazo en la Sección 13.2. En esta sección discutiremos un tipo de fórmula de dividendo que puede usarse en relación con un seguro de grupo.

Supondremos que a cambio de una prima bruta de G el asegurador proporcionará una cobertura completa para la reclamaciones totales S en un periodo determinado. Con el conocimiento de los tenedores de pólizas, la prima contiene un recargo sustancial $G - E[S] > 0$. En consecuencia, el tenedor de la póliza anticipa un dividendo D, al final del periodo, el que será una función de S. Especificamente, suponemos que el dividendo es de la forma

$$D = \begin{cases} kG - S & S < kG \\ 0 & S \geq kG \end{cases} \tag{13.4.12}$$

en donde $0 < k < 1$. Por lo tanto el tenedor de la póliza paga G y a cambio recibe S y D.

Consideraremos ahora el valor esperado de D. Por conveniencia de notación, suponemos que la distribución de S es continua y representa la *f.d.p.* de S mediante $f(x)$; el caso discreto es muy similar, como se verá en el ejemplo 13.8. De (13.4.12), tenemos

$$E[D] = \int_0^{kG} (KG - x) f(x)\ dx \tag{13.4.13}$$

Presumiblemente, el asegurador establecerá k suficientemente pequeña para que $E[S] + E[D] < G$.

Ejemplo 13.8:

Para una prima de 5 u.m. el asegurador cubre las reclamaciones totales S, que tienen la distribución de Poisson compuesta considerada en el Ejemplo 13.7. El asegurador está de acuerdo en pagar un dividendo igual al exceso de 80% de la prima sobre las reclamaciones. Calcule $G - E[S] - E[D]$ (esto es el valor esperado de la cantidad disponible para cubrir gastos, recargo de seguridad, etc.).

Solución:
El dividendo es de la forma de (13.4.12) con $k = 0.8$. Por tanto

$$E[D] = 4f(0) + 3f(1) + 2f(2) + f(3) = 2.156$$

Entonces

$$G - E[S] - E[D] = 5 - 2 - 2.156 = 0.844$$ ▼

Si extendemos la integral de (13.4.13) a ∞, obtenemos

$$E[D] = \int_0^{\infty} (kG - x) f(x)dx + \int_{kG}^{\infty} (x - kG) f(x)dx$$

Por tanto

$$E[D] = kG - E[S] + E[I_{kG}] \qquad (13.4.14)$$

en donde I_{kG} es el pago especificado en el contrato stop-loss con deducible kG. Si la prima neta para prever pérdidas adicionales $E[I_d]$ ya se calculó para varios deducibles, esta es una fórmula conveniente para obtener $E[D]$.

Ejemplo 13.9:

Utilice (13.4.14) para obtener $E[D]$ en el Ejemplo 13.8.

Solución:
Ya que $E[I_4] = 0.156$,

$$E[D] = 4 - 2 + 0.156 = 2.156$$ ▼

Existen más facetas de la conexión entre una fórmula de dividendo del tipo de (13.4.12) y un contrato stop-loss. Empezamos con la identidad

$$S + D = kG + I_{kG} \qquad (13.4.15)$$

Esta puede verificarse distinguiendo los casos: $S \le kG$ en donde ambos lados son iguales a kG, y $S > kG$ en donde ambos lados son iguales a S. Restando

G en ambos lados, obtenemos

$$S + D - G = I_{kG} - (1-k)G \tag{13.4.16}$$

que tiene la siguiente interpretación: El balance de los pagos de reclamaciones y de los dividendos recibidos sobre la prima pagada es el mismo que el balance correspondiente para un contrato stop-loss con deducible kG y prima $(1-k)G$.

Esta interpretación sugiere que el asegurador puede considerar a la prima como si estuviera dividida en dos componentes,

$$G = kG + (1-k)G \tag{13.4.17}$$

Primero se pagan las reclamaciones de kG, y cualquier balance restante $kG - S$ (para $S < kG$) se paga como un dividendo de acuerdo con (13.4.12). El segundo componente, $(1-k)G.$, se usa para proporcionar un reaseguro exceso de pérdida (stop-loss) con deducible kG.

La fórmula (13.4.15) reexpresada como

$$D = kG - S + I_{kG}$$

produce otra vez (13.4.14) cuando se toman esperanzas en cada lado.

13.5 El efecto del reaseguro sobre la probabilidad de la Ruina

Las preguntas acerca del tipo y monto del reaseguro que debe comprarse pueden contestarse en varias formas. Un enfoque es el del asegurador que adopta una función de utilidad. Entonces, para todos los arreglos de reaseguro disponibles, el asegurador elige aquel que produce la utilidad esperada más alta. Este enfoque ideal, que es muy simple en concepto, comúnmente no se utiliza en la práctica.

Como preparación para un segundo enfoque, observamos que en el Capítulo 12 consideramos la tasa de la prima del asegurador c que tiene un recargo relativo de seguridad θ tal que $c = (1+\theta)\lambda p_1$ [véase (12.3.1)]. Aquí θ no

incluía ningún recargo para gastos, y el total de c estaba disponible para el proceso de riesgo. Para nuestra discusión posterior sobre el reaseguro, es útil definir un recargo del reaseguro ξ mediante la fórmula

$$\begin{aligned}&\text{(tasa de la prima de reaseguro)} \\ &= (1+\xi)\ \text{(tasa esperada del pago de reaseguro)}\end{aligned} \qquad (13.5.1)$$

Aquí la tasa de la prima de reaseguro, determinada por el reasegurador, proporcionará lo necesario para los pagos del reaseguro, gastos, seguridad y ganancias. El asegurador puede expresar la tasa de la prima del reaseguro en el formato del lado derecho de (13.5.1) para determinar ξ. En particular, para la tasa neta de la prima para prever pérdidas adicionales $E[I_d]$, determinada por (13.4.3), el recargo ξ es 0.

El segundo enfoque reconoce que la compra de reaseguro es necesariamente un compromiso entre la ganancia esperada y la seguridad. Debido al recargo contenido en la prima del reaseguro, la compra del reaseguro reducirá la ganancia esperada del asegurador; por otra parte, en cierto sentido, un arreglo de reaseguro razonable incrementará la seguridad. Para este enfoque, se define primero el estándar requerido de seguridad. Después sólo los arreglos de reaseguro que satisfagan ése estándar podrán ser considerados. De este conjunto de arreglos admisibles, el asegurador elige aquel que le proporciona la ganancia esperada más alta.
Consideraremos una medida especial de seguridad, la probabilidad de la ruina. Uno puede requerir, por ejemplo, que la probabilidad de la ruina no sea mayor de 1%. Ya que las fórmulas explícitas para la probabilidad de la ruina están disponibles sólo en los casos especiales, restringiremos nuestra discusión a los efectos que varios arreglos de reaseguro tienen sobre el coeficiente de ajuste. Los enunciados sobre el coeficiente de ajuste pueden utilizarse siempre para obtener información acerca de la probabilidad de la ruina [véase (12.3.5), (12.3.7) o (12.4.8)].

En este punto el nombre coeficiente de ajuste revela su significado: si un cierto arreglo de reaseguro produce un valor de R (o $\tilde{R}$) que no es suficientemente grande, el arreglo necesita ser ajustado.

Ejemplo 13.10:

Un asegurador tiene un portafolio que produce reclamaciones agregadas anuales que son independientes e idénticamente distribuidas; su distribución común es de Poisson compuesta con $\lambda = 1.5$, $p(1) = 2/3$, $p(2) = 1/3$ (Véase el Ejemplo 13.7). Las primas anuales recibidas son $c = 2.5$.

a. Calcule el coeficiente de ajuste que resulta de este portafolio.
b. Se puede obtener una cobertura stop-loss por un cargo de reaseguro recargado en 100%. Calcule el coeficiente de ajuste si el contrato stop-loss se compra con un deducible de

(i) 3 (ii) 4 (iii) 5.

Compare también estas alternativas desde el punto de vista de la ganancia esperada.

Solución:

a. En este caso, $R = \tilde{R}$ y podemos obtener R de (12.4.6) o de (12.3.2).

La última condición es que

$$1.5 + 2.5r = e^{r} + (0.5)e^{2r}$$

Obtenemos $R = \tilde{R} = 0.28$

b. Consideremos el caso (i), $d = 3$, en detalle. En el Ejemplo 13.7 calculamos $E[I_3 = 0.338]$. La prima real stop-loss es el doble de esta cantidad, o 0.676. Por lo tanto la prima retenida del asegurador en el año i es $2.5 - 0.676 = 1.824$ y las reclamaciones retenidas son

$$\hat{W}_i = \begin{cases} W_i & W_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \\ 3 & W_i > 3 \end{cases}$$

en donde W_i representan las reclamaciones agregadas del año i. De acuerdo con (12.4.5), $\tilde{R}$ es la solución positiva de la ecuación

$$e^{-1.824r}\left[\sum_{x=0}^{2} f(x)e^{xr} + [1 - F(2)]e^{3r}\right] = 1$$

(véase el Ejemplo 13.7). Calculamos $\tilde{R} = 0.25$. La ganancia esperada por año es

(la ganancia esperada en ausencia
de reaseguro, $c - E[S_1] = 2.5 - 2 = 0.5$)
- (la ganancia esperada del reasegurador, la que, debido
a que el cargo por reaseguro a la tasa $2E[I_3]$, es $E[I_3] = 0.338$)
$= 0.162$

Los cálculos para los casos (ii) e (iii) son similares. Los resultados se exhiben en el siguiente cuadro en donde $d = \infty$ representa el caso de no reaseguro.

Stop-loss Deducible, d	Coeficiente de Ajuste Adicionales $\tilde{R}$	Ganancia Esperada
3	0.25	0.162
4	0.35	0.344
5	0.34	0.433
∞	0.28	0.500

Con respecto a la seguridad (como se mide mediante el coeficiente de ajuste), un deducible de 4 es mejor que uno de 5, que a su vez es mejor que la ausencia del reaseguro. Con respecto a la ganancia esperada, el orden se invierte. Además, puede observarse que al seleccionar un deducible de 3 sería una decisión irracional con respecto a la seguridad y a la ganancia esperada. ▼

En lo que sigue consideraremos los arreglos de reaseguro en donde los pagos del reasegurador dependen de los montos de las reclamaciones individuales. En general, tal tipo de cobertura se define en términos de una función $h(x)$ con $0 \le h(x) \le x$ para toda x. La interpretación es que $h(x)$ es el monto pagadero (por el reasegurador al asegurador) si una reclamación es de tamaño x. Un

caso especial es el ***reaseguro proporcional*** en donde

$$h(x) = \alpha x \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{13.5.2}$$

es decir, en donde el reasegurador reembolsa un porcentaje constante de la reclamación. Un segundo caso es el ***reaseguro sobre exceso de pérdidas*** en donde

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \le \beta \\ x - \beta & x > \beta \end{cases} \tag{13.5.3}$$

con $\beta \ge 0$ haciendo el papel de deducible. Una cobertura sobre exceso de pérdidas es una reminiscencia de la cobertura para prever pérdidas adicionales [véase (13.4.1)]. Sin embargo, la primera se aplica a reclamaciones individuales, mientras que la última se aplica a reclamaciones agregadas.

Supondremos el modelo de Poisson compuesto para tiempo continuo del Capítulo 12 y su notación. En correspondencia, suponemos que las primas de reaseguro son pagaderas continuamente a una tasa, digamos, de c_h. Entonces el coeficiente de ajuste, R_h, es la solución no trivial de la ecuación

$$\lambda + (c - c_h)r = \lambda \int_0^\infty e^{r[x - h(x)]} p(x)dx \tag{13.5.4}$$

Esto se sigue de (12.3.1) ya que el asegurador ahora recibe ingreso a una tasa neta de $c - c_h$ y paga $x - h(x)$ por una reclamación de tamaño x.

Ejemplo 13.11:

Suponga que las reclamaciones para un proceso de Poisson compuesto están determinadas por $\lambda = 1$ y $p(x) = 1$, para $0 < x < 1$, y que las primas se reciben a una tasa de $c = 1$. Calcule el coeficiente de ajuste si se compra un reaseguro proporcional con $\alpha = 0,\ 0.1,\ 0.2,...,1$ si el recargo θ por reaseguro, es

a. 100%
b. 140%

Solución:

$$\begin{aligned} c_h &= (1+\theta)\lambda \int_0^1 h(x)\,p(x)\;\; dx \\ &= (1+\theta)\lambda \int_0^1 (\alpha x)\;(1)\;\; dx \\ &= \frac{(1+\theta)\lambda\alpha}{2} \end{aligned}$$

a. Aquí $\theta = 1$ así que (13.5.4) es

$$1+(1-\alpha)r = \int_0^1 e^{r(1-\alpha)x}\;\; dx = \frac{e^{r(1-\alpha)}-1}{r(1-\alpha)} \tag{13.5.5}$$

En ausencia del reaseguro ($\alpha = 0$), la solución no trivial de esta ecuación es $R = 1.793$. Se sigue que para $\alpha \neq 0$, $1.793/(1-\alpha)$ es la solución no trivial de (13.5.5).

b. Ahora tenemos que $\theta = 1.4$, por tanto (13.5.4) es ahora

$$1+(1-1.2\alpha)r = \frac{e^{r(1-\alpha)}-1}{r(1-\alpha)} \tag{13.5.6}$$

Las soluciones numéricas de esta ecuación y de (13.5.5) se comparan en el cuadro que se presenta más adelante. En la parte (a), el recargo por reaseguro coincide con el recargo relativo de seguridad del asegurador ya que $c = 2\lambda\; p_1 = 1$ y R es una función creciente de α. En la parte (b), el recargo por reaseguro excede al recargo por seguridad del asegurador. Con α creciente, R aumenta en forma gradual y después disminuye rápidamente. Si la tasa neta de ingreso iguala a las reclamaciones esperadas netas pagadas por el asegurador por unidad de tiempo, es decir, si $1-1.2\alpha = (1-\alpha)/2$, o $\alpha = 5/7$, entonces el recargo relativo de seguridad después del reaseguro es 0. Esto implica que no existe una raíz positiva para (12.3.1) y que la ruina es una certeza. Para $\alpha > 5/7$, este recargo es negativo y la ruina, otra vez, es una certeza.

	Coeficiente de Ajuste con reaseguro proporcional cuando el recargo por reaseguro es:	
α		
	100%	140%
0.0	1.793	1.793
0.1	1.993	1.936
0.2	2.242	2.095
0.3	2.562	2.268
0.4	2.989	2.436
0.5	3.587	2.538
0.6	4.483	2.335
0.7	5.978	0.635
0.8	8.966	-
0.9	17.933	-
1.0	∞	-

▼

Ejemplo 13.12:

Suponga que el asegurador del Ejemplo 13.11 puede comprar una cobertura sobre exceso de pérdidas con $\beta = 0, 0.1, 0.2, ...,1$. Calcule el coeficiente de ajuste si el recargo por reaseguro es

a. 100%
b. 140%.

Solución:

a.

$$c_h = 2\lambda \int_0^1 h(x)\, p(x)dx$$

$$= 2\int_\beta^1 (x-\beta)dx = (1-\beta)^2$$

De (13.5.4) obtenemos la condición para R:

$$1+[1-(1-\beta)^2]r = \int_0^\beta e^{rx}dx + \int_\beta^1 e^{r\beta}dx$$

$$= \frac{e^{r\beta}-1}{r} + (1-\beta)e^{r\beta} \qquad (13.5.7)$$

b. Las primas por reaseguro se pagan ahora a una tasa de $1.2(1-\beta)^2$. Por tanto la ecuación para R se transforma

$$1+[1-1.2(1-\beta)^2]\,r=\frac{e^{r\beta}-1}{r}+(1-\beta)e^{r\beta} \qquad (13.5.8)$$

Las soluciones de (13.5.7) y (13.5.8) se comparan en el siguiente cuadro.

	Coeficiente de Ajuste con Reaseguro por exceso de Pérdidas cuando el recargo por reaseguro es	
Deducible β	100%	140%
1.0	1.793	1.793
0.9	1.833	1.828
0.8	1.940	1.920
0.7	2.116	2.062
0.6	2.378	2.259
0.5	2.768	2.518
0.4	3.373	2.840
0.3	4.400	3.138
0.2	6.478	2.525
0.1	12.746	-
0.0	∞	-

Observamos el mismo fenómeno como en el caso de la cobertura proporcional: Si el recargo por reaseguro es igual al recargo de seguridad del asegurador, el coeficiente de ajuste aumenta con el grado de reaseguro. Sin embargo, si el recargo por reaseguro excede al recargo del asegurador, el coeficiente de ajuste aumentará hasta cierto punto y después disminuirá rápidamente.

▼

Ejemplo 13.13:

Compare los resultados de los Ejemplos 13.11 y 13.12 para pares de α y β tales que los pagos esperados del reasegurador sean los mismos, es decir, si $\alpha/2 = (1-\beta)^2/2$.

Solución:
Para los pares de α y β citados, los valores correspondientes del coeficiente de ajuste se exhiben a continuación.

		Coeficientes de Ajuste, con Pagos Esperados Iguales de Reaseguro, cuando el Recargo por Reaseguro es:			
		100%		140%	
α	β	Proporcional	Exceso de Pérdidas	Proporcional	Exceso de Pérdidas
0.00	1.0	1.793	1.793	1.793	1.793
0.01	0.9	1.811	1.833	1.807	1.828
0.04	0.8	1.868	1.940	1.848	1.920
0.09	0.7	1.971	2.116	1.921	2.062
0.16	0.6	2.135	2.378	2.030	2.259
0.25	0.5	2.391	2.768	2.181	2.518
0.36	0.4	2.802	3.373	2.372	2.840
0.49	0.3	3.516	4.400	2.535	3.138
0.64	0.2	4.981	6.478	1.992	2.525
0.81	0.1	9.438	12.746	-	-
1.00	0.0	∞	∞	-	-

Para un determinado recargo por reaseguro, la cobertura por exceso de pérdidas lleva consistentemente a un coeficiente de ajuste más alto que el que determina la cobertura proporcional correspondiente. Más adelante, veremos que esto no es una coincidencia.

▼

Algo similar al Teorema 1.1 es otro teorema que da una característica de optimalidad del reaseguro por exceso de pérdidas. La demostración del Teorema 13.1 se encuentra en el Apéndice de este capítulo.

Teorema 13.1:

Permita que un reaseguro arbitrario se defina mediante $h(x)$, $0 \le h(x) \le x$, y por c_h su tasa de la prima. Igualmente, sea un reaseguro por exceso de pérdidas con deducible β, definido mediante $h_\beta(x)$ y c_β (notación simplificada para c_{h_β}). Además, R_h, R_β representen los coeficientes de ajuste resultantes, respectivamente. Si $E[h(X)] = E[h_\beta(X)]$ y $c_h = c_\beta$, entonces $R_h \le R_\beta$.

Ya que $c_h = (1+\xi_h)\lambda E[h(X)]$ y $c_\beta = (1+\xi_\beta)\lambda E[h_\beta(X)]$ en donde ξ_h y ξ_β son los recargos por reaseguro para los reaseguros respectivos, las condiciones del teorema implican que $\xi_h = \xi_\beta$. Esto limita la aplicación del teorema ya que podría no ser posible asegurar el reaseguro por exceso de pérdidas con el mismo recargo por reaseguro como para otros reaseguros.

Para ilustrar este punto, suponga que el reaseguro proporcional con recargo de 100% por reaseguro puede obtenerse como una alternativa al reaseguro por exceso de perdidas, con recargo de 140%. De los ejemplos 13.11 al 13.13, podemos ver que el reaseguro proporcional con $\alpha = 0.49$, $\xi_h = 1$ tendrán una tasa de la prima $c_h = 2(\alpha/2) = 0.49$, que es menor que la tasa para el reaseguro por exceso de perdidas con $\beta = 0.3$, $\xi_\beta = 1.4$, es decir, $c_\beta = 2.4(0.7)^2/2 = 0.588$. Entonces no solo el reaseguro proporcional tendrá una tasa de la prima más baja, sino que observamos en el Ejemplo 13.13 que el coeficiente 3.516 resultante, es mayor que el coeficiente de ajuste de 3.138 resultante del reaseguro por exceso de pérdidas.

13.6 Notas y referencias

Una monografía de Hogg y Klugman (1984) demuestra el uso de las estadísticas de reclamaciones para seleccionar una distribución del monto de las reclamaciones y para estimar los parámetros. Otras referencias acerca del tema pueden encontrarse en Seal (1969). La distribución del monto de las reclamaciones para el seguro de grupo de indemnización semanal se tomará de los documentos de Miller (1951) y Bartlett (1965). La curva de continuación de hospitalización se derivaría de los datos del documento de Gingery (1952).

Los dos métodos para aproximar el modelo individual mediante un modelo colectivo fueron sugeridos por Mereu (1972) y Woody (1973).

El cálculo de las primas para prever pérdidas adicionales ha sido el tema de muchos documentos. Bohman y Esscher (1963-1964) reportaron en un estudio exhaustivo los métodos alternativos para aproximar la distribución de las reclamaciones totales y las reclamaciones esperadas para prever las pérdidas adicionales. Bartlett (1965) discutiría el uso de la distribución gama para el cálculo de las reclamaciones esperadas para prever pérdidas adicionales. Bowers (1969) presentaría un límite superior, en términos de la media y la varianza de las reclamaciones agregadas, para la prima neta de para prever pérdidas adicionales. Este resultado fue generalizado por Taylor (1977) y por Goovaerts y DeVylder (1980). En años recientes varios documentos han desarrollado métodos para usarse con las distribuciones discretas de reclamaciones. Entre ellos podemos mencionar a Halmstad (1972), Mereu (1972), Gerber y Jones (1976), Panjer (1980).

Gerber (1980) discutiría el efecto del reaseguro sobre la probabilidad de la ruina.

Apéndice

Prueba del Teorema 13.1:

Sabemos que R_h es la raíz positiva de

$$\lambda + (c - c_h)r = \lambda M_{X-h(X)}(r)$$

y R_β es la raíz positiva de

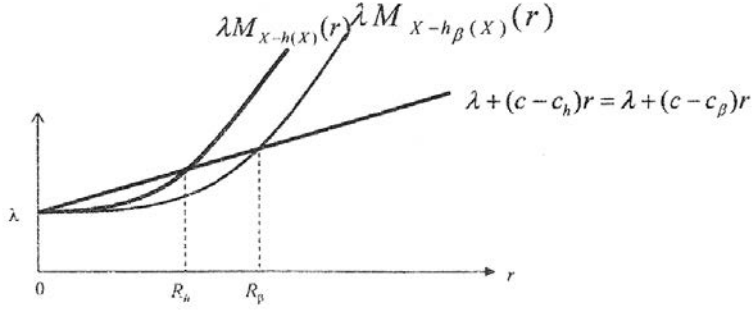
$$\lambda + (c - c_\beta)\, r = \lambda M_{X-h_\beta(X)}(r)$$

Ya que $c_h = c_\beta$, podemos ver en la figura 13.2 que

$$M_{X-h(X)}(r) \geq M_{X-h_\beta(X)}(r) \quad r > 0 \qquad (13.A.1)$$

implica que $R_h \leq R_\beta$.

Figura 13.2 Prueba del Teorema 13.1



Para establecer (13.A.1), primero usamos la convexidad de la función exponencial para demostrar que

$$\exp\{r[x-h(x)]\} \geq \exp\{r[x-h_\beta(x)]\} + r\exp\{r[x-h_\beta(x)]\}[h_\beta(x)-h(x)]$$

Como $x-h_\beta(x) \leq \beta$ y $x-h_\beta(x)=\beta$ siempre que $h_\beta(x)-h(x)>0$, se sigue que

$$\exp\{r[x-h(x)]\} \geq \exp\{r[x-h_\beta(x)]\} + r\exp\{r\beta\}[h_\beta(x)-h(x)]$$

Luego

$$E[\exp\{r[X-h(X)]\}] \geq E[\exp\{r[X-h_\beta(X)]\}] + r\exp\{r\beta\}E[h_\beta(X)-h(X)]$$

Por la hipótesis del teorema, la última esperanza es 0. Esto produce (13.A.1), de la que se sigue el teorema.

■

Ejercicios

Sección 13.1

13.1 Un seguro temporal estipula la cantidad b si ocurre una reclamación. La probabilidad de la ocurrencia de una reclamación es q.

a. Considere las siguiente variable aleatoria de pérdida,

$$L=\begin{cases} b-bq & con\ probabilidad\ q \\ 0-bq & con\ probabilidad\ p=1-q \end{cases}$$

Verifique que $E[L]=0$.

b. Calcule la $Var[L]$.

c. La prima de seguridad recargada se toma como $bq+s\sqrt{Var[L]}$. Si se venden 100 pólizas idénticas de este tipo y las variables aleatorias de perdidas, como se definen en la parte (a), para estas pólizas son mutuamente independientes, calcule el factor de recargo s tal que la probabilidad de que la suma de estas variables aleatorias de las perdidas exceda el recargo total por seguridad sea menor que 0.01.

Sección 13.2

13.2 Verifique los registros de la media y la varianza en el Cuadro 13.1.

13.3 a. Calcule la media de la distribución descrita en el Cuadro 13.2.
b. En cuánto se reduciría el beneficio promedio por caso de incapacidad en el seguro de incapacidad a corto plazo ilustrado, si el máximo de 13 semanas se reemplazará por uno de 10 semanas?

13.4 Dado que ocurra una incapacidad, evalúe, con base en el Cuadro 13.2

a. $\Pr(3 \le Y \le 6)$

b. $\Pr(10 \le Y \le 13)$

c. $\Pr(20 \le Y \le 23)$

Sección 13.3

13.5 Considere un portafolio de 100 pólizas, cada una de las cuales es para un seguro de vida temporal a un año.

		Cantidad Asegurada 1	4
Tasa de Mortalidad	**0.01**	10	20
a un 1 año	**0.02**	30	40

Los registros de la matriz proporcionan el número de pólizas del portafolio para la combinación indicada de cantidad asegurada y tasa de mortalidad.

a. Si S representa las reclamaciones agregadas, calcule $E[S]$ y $Var[S]$.

b. ¿Cuál distribución de Poisson compuesta sería utilizada para aproximar el modelo individual por el primer método? , ¿Cuál sería la aproximación resultante para la $Var[S]$?

13.6 Suponga que $B_j = b_j > 0$ para $j = 1,2,..,n$

a. Escriba expresiones para la media y la varianza de la distribución de Poisson compuesta de acuerdo al segundo método.

b. Demuestre que los valores en (a) son mayores que los valores correspondientes obtenidos por el primer método. [Sugerencia: primero demuestre que $\tilde{\lambda}_j > q_j$, $j = 1,2,..,n$.]

c. Compute la media y la varianza de la distribución de Poisson del Ejemplo 13.2.

13.7 Calcule la probabilidad de que dos reclamaciones que ocurren en el modelo individual sean de las pólizas i y j $(i \neq j)$.

Sección 13.4

13.8 Suponga que las reclamaciones posibles son enteros. Demuestre que

$$E[I_d^2] = E[I_{d-1}^2] - 2E[I_{d-1}] + 1 - F(d-1)$$

13.9 Calcule $E[I_d]$ si S tiene la distribución normal con parámetros μ y σ.

13.10 Suponga que las reclamaciones posibles son enteros. Calcule
a. $\Delta E[I_x]$ b. $\Delta^2 E[I_x]$

13.11 Se sabe que $E[I_d]=1-d-(1-d^3)/3$ para $0\le d\le 1$ y es igual a 0 para $d>1$. Obtenga la *f.d.p.* de la distribución de las reclamaciones agregadas subyacente.

13.12 Si S tiene una distribución de Poisson compuesta determinada por $\lambda=3$, $p(1)=5/6$, $p(2)=1/6$, calcule $f(x), F(x), E[I_x]$ para $x=0,1,2$.

13.13 Un dividendo de la forma de (13.4.12) debe usarse en los ejemplos 13.8 y 13.9.
a. Calcule $G-E[S]-E[D]$ si $k=0.9$.
b. Determine k tal que $G-E[S]-E[D]=0$

13.14 Un reasegurador pagará 80% del exceso de S sobre un deducible d, sujeto a un pago máximo de m. Exprese la prima neta para esta cobertura en términos de las primas netas stop-loss.

13.15 En el ejemplo 13.7 determine d tal que $E[I_d]=0.2$

Sección 13.5

13.16 Las reclamaciones de un cierto portafolio de seguros forman un proceso de Poisson compuesto con $\lambda=1$ y $p(x)=e^{-x}$, $x>0$. Las primas recibidas contienen un recargo por seguridad relativa de $\theta>0$.
a. Calcule el coeficiente de ajuste si se compra un reaseguro proporcional de la forma de (13.5.2) y si el recargo por reaseguro es $\xi>0$
b. Calcule el recargo por seguridad relativa del asegurador después del reaseguro al igual que en (a).
c. ¿Qué restricciones sobre α son necesarias?

13.17 En el ejercicio precedente, suponga que la cobertura por exceso de perdidas, está disponible con deducible β y recargo por reaseguro ξ.

a. Determine la ecuación a partir de la cual se puede obtener el coeficiente de ajuste.

b. Calcule el recargo relativo de seguridad del asegurador después del reaseguro por medio de la cobertura del exceso de perdidas.

13.18 Las reclamaciones anuales, W_j, $j = 12,...$, para una compañía de seguros son mutuamente independientes e idénticamente distribuidas, $N(10,4)$. La compañía cobra un recargo por seguridad relativa de 25%. Un reasegurador está dispuesto a aceptar el riesgo sobre cualquier parte, α, del portafolio sobre una base proporcional por una prima de reaseguro igual al 140% del valor esperado de las reclamaciones reaseguradas.

a. Exprese el coeficiente de ajuste, $\bar{R}$, para el portafolio con reaseguro proporcional como una función de α.

b. Determine el valor de α que maximice la seguridad de la compañía de seguros dando el valor más grande de $\bar{R}$.

Misceláneos

13.19 Un reasegurador con patrimonio w y función de utilidad $u(w)$ establece la prima para prever perdidas adicionales H_d correspondiente a un deducible d para que $u(w) = E[u(w + H_d - I_d)]$[véase (1.3.5)]. Calcule H_d si $u(w) = -\alpha e^{-\alpha w}$ $(\alpha > 0)$ y si S tiene la distribución normal con parámetros μ y σ.

MODELOS DE SEGUROS INCLUYENDO GASTOS

14.1 Introducción

En el capítulo 6 fue introducido el principio de equivalencia como un medio para determinar las primas de los seguros. En ese capítulo, el principio citado impuso la condición de que fuesen iguales los valores presentes actuariales de las indemnizaciones y de las primas netas en el momento de expedición del seguro. En el capítulo 7 este principio se aplicará a los periodos posteriores a la fecha inicial del contrato. Las reservas se expresaron como el valor presente actuarial de la diferencia entre los pagos de indemnización futuros y el ingreso neto futuro de las primas. Los siguientes capítulos se dedicaron, en gran medida, a construir un modelo completo para los sistemas de seguro basados sobre el principio de equivalencia. Sin embargo, ese modelo no incorporaba varios aspectos de la práctica del seguro y de la realidad económica. Por ejemplo, un asegurador tiene flujos de caja distintos de los pagos de reclamaciones. Los gastos de tipo general incluyen aquellos destinados al pago de impuestos y licencias así como aquellos destinados a las ventas y servicios de las pólizas de seguro. Estos gastos deben cubrirse mediante los ingresos de las primas y la inversión. En este capítulo incorporaremos los gastos en el modelo para primas y reservas.

14.2 Gastos generales

Primero examinaremos, mediante un ejemplo amplio, las principales ideas que son necesarias para incorporar los gastos. Los cuadros 14.1. A y B especifican las características sobresalientes, seleccionadas por conveniencia y facilidad de cálculo más que por realismo.

Cuadro 14.1.A Descripción de las especificaciones del ejemplo

1. Plan del seguro	Seguro dotal a 3 años con primas anuales expedido a x con nivel de beneficios y primas.
2. Base de pago	Totalmente discreta
3. Mortalidad	$q_x = 0.1,\ q_{x+1} = 0.1111,\ q_{x+2} = 0.5$
4. Interés	Tasa anual efectiva de $i = 0.15$
5. Monto del seguro	1,000
6. Gastos: a. Tiempo	Pagado al principio de cada año de la póliza.
b. Cantidad	(Como se determina en el cuadro 14.1B)

Cuadro 14.1.B Monto de los gastos: especificaciones del ejemplo

Tipo de gasto	Primer año		Renovación	
	Porcentaje de la prima	Constante	Porcentaje de la prima	Constante
Comisión de ventas	10%	-	2%	-
Gastos generales	4%	3		1
Impuestos, licencias y tarifas	2%	-	2%	-
Mantenimiento de la póliza	2%	1	2%	1
Expedición y clasificación	2%	4	-	-
Total	20%	8	6%	2

14.2.1 Primas y reservas

Las especificaciones 1 a 5 del cuadro 14.1.A pueden utilizarse con el principio de equivalencia para determinar la prima neta anual para este seguro, $1{,}000\,P_{x\overline{3}|} = 288.41$. El cuadro 14.2 proporciona los detalles para el cálculo de las reservas de las primas netas.

Cuadro 14.2 Cálculo de las reservas

(1) Resultados	(2) Pérdidas	(3) Probabilidad condicional	(4) (2) × (3)
	A la expedición $({}_0L)$		
$k(x)=0$	581.16	0.1	58.12
$k(x)=1$	216.94	0.1	21.69
$k(x)\geq 2$	−99.76	0.8	−79.81
			$1{,}000\ {}_0V_{x\overline{3}|} = E[{}_0L] =$ 0.00
			$\sigma({}_0L) = 215.51$
	Un año después de la expedición $({}_1L)$		
$k(x)=0$	581.16	0.1111	64.57
$k(x)\geq 1$	216.94	0.8889	192.84
			$1{,}000\ {}_1V_{x\overline{3}|} = E[{}_1L] = 257.41$
			$\sigma({}_1L) = 114.46$
	Dos años después de la expedición $({}_2L)$		
$k(x)\geq 0$	581.16	1.0	581.16
			$1{,}000\ {}_2V_{x\overline{3}|} = E[{}_2L] = 581.16$
			$\sigma({}_2L) = 0$

Como una confirmación final podemos verificar ${}_3V_{x\overline{3}|} = 1$:

$$1{,}000\left({}_2V_{x\overline{3}|} + P_{x\overline{3}|}\right)(1+i) = 1{,}000$$

$$(581.16 + 288.41)(1.15) = 1{,}000$$

Los gastos, como los estipula el cuadro 14.1.B, se incorporarán modificando las variables de pérdidas. El valor presente de las indemnizaciones es incrementado por el valor presente de los gastos. Este nuevo total será compensado por el valor presente de las adiciones a las primas para cubrir gastos, que se representa como G. El cuadro 14.3 es construido utilizando la información del cuadro 14.1.B.

Cuadro 14.3 Variable de pérdidas incrementada con los gastos $({}_0L_e)$

Resultados	Valor presente		Probabilidad
	Indemnizaciones + gastos	Primas	
$k(x)=0$	$1{,}000v + (0.20G+8)$	$-G\,\ddot{a}_{\overline{1}\rceil}$	0.1
$k(x)=1$	$1{,}000v^2 + (0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{1}\rceil}$	$-G\,\ddot{a}_{\overline{1}\rceil}$	0.1
$k(x)\geq 2$	$1{,}000v^3 + (0.20G+8)+(0.06G+2)a_{\overline{2}\rceil}$	$-G\,\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0.8

Las primas con recargo para cubrir gastos se determinarán mediante el principio de equivalencia; es decir, el valor esperado de la variable de pérdida incrementado para cubrir gastos deberá ser 0. Esto produce

$$G = 1{,}000P_{x\overline{3}\rceil} + \text{nivel de gasto de la prima } (e) = 288.41 + 43.94 = 332.35$$

El cuadro 14.4 exhibe los cálculos de los valores esperados y desviaciones estándar de las variables de pérdidas incrementadas para cubrir gastos al momento de la expedición de la póliza a 1 y 2 años después de la emisión. La reserva total se divide en los componentes, indemnización y gastos. Cada año el ingreso esperado de los pagos de las primas netas de seguros uniformes no corresponde con los pagos de indemnización esperados. Esta falta de correspondencia crea una reserva de indemnización no negativa. Igualmente cada año, el ingreso esperado de los recargos uniformes por gastos no corresponde con los pagos esperados por gastos. Esta falta de correspondencia crea una reserva para gastos no positiva.

Cuadro 14.4 Valores esperados de las variables de pérdidas incrementadas con los gastos

Resultados a la expedición	(Valor presente de las indemnizaciones	$-1{,}000\, P_{x:\overline{3}\rceil}\, \ddot{a}_{\overline{k+1}\rceil}$	+ Valor presente de los gastos	$-e\, \ddot{a}_{\overline{k+1}\rceil})$	Probabilidad condicional de egresos
		$({}_0L_e)$			
$k(x)=0$	(869.57	− 288.41)	+ (74.47	− 43.94)	0.1
$k(x)=1$	(756.14	− 539.20)	+ (93.55	− 82.15)	0.1
$k(x)\geq 2$	(657.52	− 757.28)	+ (110.14	− 115.37)	0.8
Valores esperados:	**Reserva para la indemnización**		**+ Reserva para los gastos**		**= Reserva Total**
	0		0		= 0
				$\sigma({}_0L_e)$	= 226.82
	Un año después de la expedición $({}_1L_e)$				
$k(x)=0$	(869.57	− 288.41)	+ (21.94	− 43.94)	0.1111
$k(x)\geq 1$	(756.14	− 539.20)	+ (41.02	− 82.15)	0.8889
Valores esperados:	**Reserva para la indemnización**		**+ Reserva para los gastos**		**= Reserva Total**
	257.41		- 39.00		= 218.41
				$\sigma({}_1L_e)$	= 120.47
	Dos años después de la expedición $({}_2L_e)$				
$k(x)\geq 0$	(869.57	− 288.41)	+ (21.94	− 43.94)	1.0
Valores esperados:	**Reserva para la indemnización**		**+ Reserva para los gastos**		**= Reserva Total**
	581.16		- 22.00		= 559.16
				$\sigma({}_2L_e)$	= 0

Como confirmación, la reserva total final (al final de los 3 años) es:

[Reserva total al final del segundo año + prima recargada − gastos] $(1+i)$

= [559.16 + 332.35 − 21.94] $(1.15)=1{,}000$

A continuación se identifican algunas de las ideas clave del ejemplo.

Observaciones

1. Las variables de pérdidas, como se introdujeron originalmente, miden el valor presente de las indemnizaciones menos el valor presente de las primas netas en los distintos tiempos en que las indemnizaciones podrán ser pagadas. Estas variables pueden aumentarse para incorporar los gastos y las primas con recargos para cubrir gastos.

2. El principio de equivalencia puede utilizarse para determinar las primas con recargos para cubrir gastos y las reservas totales asociadas (reservas para indemnización más reservas para gastos).

3. La reserva para gastos frecuentemente es negativa en los primeros años de la póliza. Esta es una consecuencia de la correspondencia entre un flujo decreciente de pagos por gastos con un nivel de flujo de recargos por gastos.

4. El análisis y la proyección de los gastos preceden a la determinación de las primas con recargos para cubrir gastos.

5. La desviación estándar de la variable de pérdidas incrementada por los gastos puede utilizarse para determinar un fondo de contingencia. Este fondo protege en contra de la correspondencia inadecuada del ingreso por primas e inversión con los pagos por indemnización y gastos. Tal situación es posible debido a la naturaleza aleatoria del tiempo en que se pagan las indemnizaciones. En el capítulo 7 se ejemplificaron métodos para esto.

6. Las cantidades consideradas como ingreso neto en el estado de contabilidad son menos variables cuando las reservas para indemnización más gastos se reportan como obligaciones, que en la situación cuando se usan las reservas de primas netas.

7. La ganancia total del periodo de 3 años no se afecta por el método seleccionado para reconocer obligaciones.

8. En la práctica real, los resultados esperados no se ajustan con el grado de certeza asumida en el ejemplo.

14.2.2 Contabilidad

En las empresas manufactureras, el producto se fabrica antes de venderse. En la mayoría de los negocios que se dedican a la prestación de servicios, el servicio se realiza antes de que se reciba el pago. Una operación de seguro es inusual en el sentido de que el ingreso por la prima se recibe antes de que el servicio de asumir el riesgo se realice.

La contabilidad se dirige, en parte, a buscar la correspondencia entre el costo de proveer un producto o servicio y el ingreso derivado de venderlo. El objetivo es medir la ganancia o la pérdida de involucrarse en esas actividades. La contabilidad en las operaciones de seguros de vida y anualidades difiere de la de muchas empresas debido a que el ingreso se recibe antes de que se conozcan los costos. Los sistemas de reservas, prima neta uniforme y prima con recargos para cubrir gastos, que fueron ilustrados anteriormente, pueden utilizarse para lograr una mejor correspondencia entre el ingreso derivado de las primas y los gastos asociados.

El ejemplo de confianza en los cuadros 14.5 y 14.6. En éstos, se supone que la prima anual bruta para cada póliza es la prima con recargos para cubrir gastos de 342.35 más un monto arbitrario de 10 para ganancias y contingencias. Los estados de contabilidad se derivan utilizando un grupo de sobrevivencia determinístico, que se compone inicialmente de 10 asegurados.

Cada registro contable puede dividirse entre 10 para producir registros que puedan interpretarse como cantidades esperadas para cada asegurado inicial. Los gastos se pagan y el ingreso por inversión se gana, exactamente, como lo especifican los cuadros 14.1. A y B.

Esta operación de seguros hipotéticamente comienza con un fondo inicial de 1,000.

En uno de los estados contables se consideran como obligaciones a las reservas para indemnización (primas netas uniformes). En un segundo conjunto de estados se consideran como obligaciones a las reservas para indemnización más los gastos.

Cuadro 14.5 Estados de ingresos (10 asegurados iniciales)

Estado de ingreso	a Considerando las reservas de primas netas uniformes como obligaciones	b Considerando a las reservas para indemnizaciones más gastos como obligaciones
Durante el primer año		
Ingreso	3 423.50	3423.50
Prima (10)	548.82	548.82
Inversión (15%)	3 972.32	3972.32
Cargos sobre el ingreso		
Gastos		
Porcentaje (20%)	684.70	684.70
Constante (8)	80.00	80.00
Reclamaciones (1)	1 000.00	1 000.00
Incremento de las reservas	2 316.69	1 965.69
	4 081.39	3 730.39
Ingreso neto	− 109.07	241.93
Durante el segundo año		
Ingreso	3 081.15	3 081.15
Prima (9)	912.88	912.88
Inversión (15%)	3 994.03	3 994.03
Cargos sobre el ingreso		
Gastos		
Porcentaje (6%)	184.87	184.87
Constante (2)	18.00	18.00
Reclamaciones (1)	1 000.00	1 000.00
Incremento de las reservas	2 332.59	2 507.59
	3 535.46	3 710.46
Ingreso neto	458.57	283.57
Durante el tercer año		
Ingreso	2 738.80	2 738.80
Prima (8)	1 283.59	1 283.59
Inversión (15%)	4 022.39	4 022.39
Cargos sobre el ingreso		
Gastos		
Porcentaje (6%)	164.33	164.33
Constante (2)	16.00	16.00
Reclamaciones y vencimientos (8)	8 000.00	8 000.00
Incremento de las reservas	− 4 649.28	− 4 473.28
	3 531.05	3 707.05
Ingreso neto	491.34	315.34

1. Ingreso por inversión = [activos al final del año anterior + ingreso por primas - gastos] (0.15)
2. Ingreso neto total = -109.07+458.57+491.34 Col. (1)
= 241.93 + 283.57 + 315.34 Col. (2)
= 840.84
3. Cálculo alternativo (revise especificaciones en el cuadro 14.1.B):
Ingreso neto total = [ingreso por intereses sobre fondos iniciales]
+ [valor acumulado de la ganancia neta por recargos]
$= 1{,}000[(1.15)^3-1]+10[(10)(0.8)(1.15)^3+9(0.94)(1.15)^2$
$+(8)[(0.94)(1.15)]$
= 840.91
La diferencia entre estos dos cálculos se atribuye a errores por redondeo.

Cuadro 14.6 Hojas de balance (10 asegurados iniciales)

Hojas de balance	(a) Considerando las reservas de primas netas uniformes como obligaciones	(b) Considerando a las reservas para indemnizaciones más gastos como obligaciones
Al final del primer año		
Activos	3 207.62	3 207.62
Obligaciones (reservas)	2 316.69	1 965.69
Excedente	890.93	1 241.93
	3 207.62	3 207.62
Al final del segundo año		
Activos	5 998.78	5 998.78
Obligaciones (reservas)	4 649.28	4 473.28
Excedente	1 349.50	1 525.50
	5998.78	5998.78
Al final del tercer año		
Activos	1 840.84	1 840.84
Obligaciones (reservas)	0	0
Excedente	1840.84	1840.84
	1840.84	1840.84

1. Incremento del excedente = ganancias totales (véase la nota al pie de página del cuadro 14.5). 1,840.84 – 1,000 =840.84
2. Excedente = [excedente al final del año anterior + ingreso neto]
3. Activos = [activos al final del año anterior + (ingreso neto + incremento en las reservas)]
= [activos al final del año anterior + (primas + ingreso por inversión – reclamaciones – gastos)]

14.3 Tipo de gastos

El sistema de contabilidad de una empresa de seguros está diseñado para registrar, clasificar y resumir transacciones financieras. El mismo sistema, por ende, proporcionará datos sobre los niveles de actividad: el número y monto de ventas, el número de reclamaciones pagadas, el número de primas facturadas, etc. Después de recabar esta información, se puede realizar el análisis con la meta de relacionar los principales renglones de gasto con las actividades que sostienen. Estas asignaciones guiarán la determinación del aumento requerido en las primas para cubrir gastos en el caso de las pólizas de seguro que se venderán en el futuro. Si se aplica el principio de equivalencias, el valor presente actuarial de los recargos por gastos será igual al valor presente actuarial de los gastos cargados a la póliza. La clasificación y distribución de los gastos de una organización de seguros son tareas confusas. El cuadro 14.7 nos da un ejemplo. Se adopta un sistema tentativo de clasificación y se presentan los resultados.

Cuadro 14.7 Esquema de posible clasificación de los gastos de una organización de seguros

Clasificación de gastos	Componentes
Inversión	(a) análisis
	(b) costos de compra, venta y servicios
Seguros	
1. Adquisición	(a) gastos de ventas, incluyendo comisiones de los agentes y publicidad
	(b) clasificación de riesgos, incluyendo exámenes médicos
	(c) preparación de nuevas pólizas y registros
2. Mantenimiento	(a) cobranza de primas y contabilidad
	(b) cambio de beneficiarios y preparación de establecimiento de opciones
	(c) correspondencia con tenedores de pólizas
3. General	(a) investigación
	(b) servicios actuariales y jurídicos
	(c) contabilidad general
	(d) impuestos, licencias y tarifas
4. Establecimiento	(a) investigación de reclamaciones y defensa legal
	(b) costos de desembolso de pagos de indemnización

En la determinación del aumento de las primas por concepto de gastos, se concentra la atención sobre los gastos de seguros. Por otra parte, los gastos de inversión se consideran, típicamente, como una compensación del ingreso por inversión y se reflejan en las primas a través de la reducción en la tasa de interés asumida.

En algunos casos, la práctica indica una relación natural entre los renglones de gastos y los niveles de actividad. Por ejemplo, es común compensar a los agentes de ventas mediante una estructura de comisiones de porcentajes aplicados a las primas del primer año y a las renovaciones. En la sección 14.2 la comisión pagada fue del 10% de la prima en el primer año y 2% en el segundo y tercer años. Los impuestos que se aplican a las organizaciones de seguro, especialmente aquellos recaudados por los estados, son un porcentaje de las primas cobradas dentro de la jurisdicción fiscal. En la sección 14.2, el 2% de las primas se destinaron a impuestos, licencias y tarifas.

La distribución de otros renglones de gastos es menos clara. Frecuentemente, se usa una combinación de análisis estadístico y buen juicio. Es una práctica común asignar los gastos de adquisición al primer año de la póliza en las fórmulas de recargo de las primas. Esto se debe a que se incurre en gastos de clasificación y publicidad con el propósito de generar y vender nuevos seguros. Algunos de estos gastos de adquisición varían de acuerdo al tamaño de la prima, por ejemplo, las comisiones. Algunos varían con el monto del seguro, por ejemplo, los gastos de clasificación de los riesgos. Otros se incurren por cada póliza emitida, independientemente del tamaño de la póliza o de la prima, por ejemplo, la generación de registros.

La clasificación y distribución de los gastos es una importante herramienta gerencial para controlar la operación de un sistema de seguros. Sin embargo, para la determinación de las primas, el punto de vista de los gastos es proyectivo más que retrospectivo. La meta es equiparar los gastos futuros con las adiciones futuras de cargos a las primas. Por lo tanto, las tendencias de los gastos con expectativas de inflación o deflación se incorporan a los recargos por gastos.

El cuadro 14.8 proporciona un ejemplo del sistema de clasificación del cuadro 14.7 para los gastos del seguro y los factores de recargo asociados.

Cuadro 14.8 Ejemplo de distribución de gastos futuros del seguro

Clasificación	Primer año			Renovación				
	Por póliza	Por c/1000 de seguro	Porcentaje de prima	Por póliza	Por c/1000 de seguro	Porcentaje de la prima por póliza cada año		
						2 – 9	10 – 15	16 o mas
1. Adquisición								
a. Gastos de ventas								
Comisiones	–	–	60%	–	–	7.0%	5.0%	3%
Oficinas de ventas	–	–	25%	–	–	2.5%	1.5%	1%
Otros relacionados con ventas	12.50	4.00	–	–	–	–	–	–
b. Clasificación	18.00	0.50	–	–	–	–	–	–
c. Expedición y registros	4.00	–	–	–	–	–	–	–
2. Mantenimiento	2.00	0.25	–	2.00	0.25	–	–	–
3. General								
a, b, c,	4.00	0.25	–	4.00	0.25	–	–	–
d. Impuestos	–	–	2%	–	–	2.0%	2.0%	2%
Total (1, 2, 3)	40.50	5.00	87%	6.00	0.50	11.5%	8.5%	6%
4. Establecimiento	18.00 por póliza más 0.10 por cada 1 000 de seguro							

Ejemplo 14.1

Utilizando el principio de equivalencia, desarrolle una fórmula para la prima anual incrementada para cubrir gastos de una póliza de vida entera, con base semicontinua, expedida a (x) por un monto de 20,000. Los gastos involucrados son los definidos en el cuadro 14.8.

Solución:

Sea G la prima incrementada para cubrir gastos:

valor presente actuarial de la prima con recargo para cubrir gastos = valor presente actuarial de las reclamaciones y establecimiento del gasto por indemnización más otros gastos

$$G\,\ddot{a}_{[x]} = 20{,}020\,\bar{A}_{[x]} + [(40.50 + 100.00 + 0.87G) + 6\,a_{[x]} + 10\,a_{[x]} + (0.115\,a_{[x]:\overline{8|}} + 0.085\,{}_{9|}\ddot{a}_{[x]:\overline{6|}} + 0.06\,{}_{15|}\ddot{a}_{[x]})G] \qquad (14.4.1)$$

$$G = \frac{20{,}020\,\bar{A}_{[x]} + 140.50 + 16\,a_{[x]}}{0.94\,\ddot{a}_{[x]} - 0.755 - 0.03\,\ddot{a}_{[x]:\overline{9|}} - 0.025\,\ddot{a}_{[x]:\overline{15|}}}$$

En el ejemplo 14.1, se requerirá una prima incrementada para cubrir gastos para una póliza con una suma asegurada de 20,000. En la práctica, las primas usualmente, se establecen como una tasa por unidad de seguro. Para seguro de vida, estas tasas han sido típicamente de 1,000 de la indemnización inicial por fallecimiento. Para las anualidades vitalicias, las tasas han sido típicamente por unidad del ingreso mensual. Cuando las primas se establecen como tasas se crea un problema en la distribución de gastos por póliza para pólizas por diferentes montos. Este es el tema de la sección 14.4.

14.4 Gastos por póliza

Sea $G(b)$ la prima incrementada para cubrir gastos para una póliza de monto b. Permítase que

$$G(b)(1-f)=ab+c \tag{14.4.1}$$

en donde a,c y f son constantes no negativas y $f<1$. La constante a representa aquellos componentes del costo del seguro que varían directamente con el monto del seguro; la prima neta para una unidad de seguro es la más grande. La constante c se puede interpretar como los gastos por póliza. La constante f es la porción de la prima utilizada para equiparar los gastos que varían con el monto de la prima.

Fórmula (14.4.1) puede ser rescrita como:

$$\begin{aligned} G(b) &= b\frac{a+\ c/b}{1-f} \\ &= b\ R(b) \end{aligned} \tag{14.4.2}$$

Donde

$$R(b)=\frac{a+\ c/b}{1-f}$$

La función $R(b)$ es la tasa de la prima para una póliza de monto b. La fórmula para $R(b)$ se puede simplificar a

$$R(b)=a'+\frac{c'}{b}$$

en donde $a'=a/(1-f)$ y $c'=c/(1-f)$. Sin embargo, con frecuencia es conveniente usar la forma en la que los tres elementos de la prima se representan explícitamente.

Una gráfica típica de la función de la tasa de la prima $R(b)$ se exhibe en la figura 14.1. El número m indica el valor mínimo de la póliza y b representa el valor promedio de la póliza. También se señalan tres métodos de considerar los gastos por póliza:

1. Cargar una ***cuota por póliza*** de monto $c/(1-f)=c'$ que se añadirá a la cantidad $b\left[a/(1-f)\right]=ba'$ para producir la prima con recargo para cubrir gastos (14.4.2). Bajo este enfoque, la tasa de la prima cargada realmente será $R(b)$.

2. Aproximar la función $R(b)$ mediante un conjunto de líneas rectas. Este enfoque se llama el ***método de banda*** ya que se carga la misma tasa de prima para montos de seguro que se localizan en una banda particular.

3. Aproximar la tasa de prima con $R(\bar{b})$.

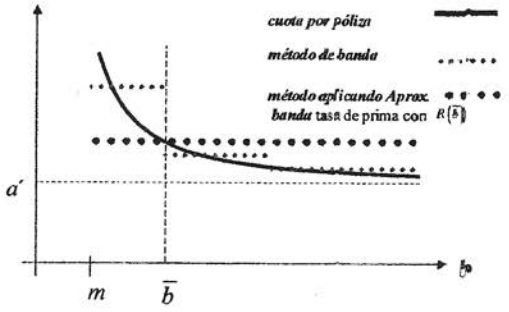


Figura 14.1.

El método 2, ***método de banda***, también ha sido llamado ***enfoque del descuento por cantidad***, porque, al incrementar el monto del seguro, el asegurado puede alcanzar una disminución significativa en la tasa de la prima. Con el método 3, el valor presente actuarial de los recargos por gastos será menor que el valor presente actuarial de los gastos por pólizas de monto $b<\bar{b}$. Nótese que si vemos el monto del seguro como una variable aleatoria, representada por B, y evaluamos la prima esperada sobre una póliza, tenemos

$$E\left[B\,R(\bar{b})\right]=\frac{\bar{b}\left[a+\,c/\bar{b}\right]}{1-f}=\frac{a\bar{b}+c}{1-f}$$

Es decir, si la distribución realizada de los montos del seguro corresponde a la usada para establecer la tasa de la prima, $R(\bar{b})$, habrá un balance entre los valores presentes actuariales de los recargos de primas y los gastos cargados.

Ejemplo 14.2

Un tipo de póliza de seguro de vida con prima única tiene los siguientes componentes de la prima.

Prima neta	$\bar{A}_x = 0.20$
Gastos	
Comisiones de ventas	7.5% de la prima
Impuestos, licencias y tarifas	3% de la prima
Gastos por póliza:	
Primer Año	23.00
Renovación	2.50
Establecimiento de reclamaciones por póliza	12.00

Calcule $R(b)$ para este tipo de póliza. El monto del seguro se mide en unidades de 1,000 e $i = 0.06$.

Solución:

Sustituyendo las cantidades en (14.4.1), y usando

$$a_x = \frac{1 - A_x}{d} - 1 = \frac{1 - (\delta / i)\bar{A}_x}{d} - 1 = 13.2353,$$

Tenemos

$$(1 - 0.105)\ G(b) = [1000\ b + 12](0.2) + 23 + 2.50\ a_x$$
$$0.895\ G(b) = 200\ b + 2.4 + 23 + 2.50[13.2353]$$
$$G(b) = 223.46\ b + 65.35$$

y

$$R(b) = 223.46 + \frac{65.35}{b}$$

Ejemplo 14.3:

Un tipo de póliza de vida entera, expedida sobre una base semicontinua, tiene la siguiente distribución de gastos.

Porcentaje de la Prima		Por cada 1000 de suma Asegurada	Por Póliza
Primer año	30%	3.00	10.00
Renovación	5%	0.50	2.50

a. Escriba las fórmulas para las primas incrementadas para cubrir gastos, para el primer año y la renovación suponiendo que los gastos por póliza son equiparados por separado con las tarifas de la póliza del primer año y de la renovación.

b. Escriba la fórmula para la tarifa de una sola póliza que se pagará cada año.

Solución:

a. Sea $k(b)$ la prima incrementada sin provisión para gastos por póliza (b se mide en miles):

(Valor presente actuarial de la prima incrementada para cubrir gastos)

=

(Valor presente actuarial de las indemnizaciones y gastos, excluyendo los gastos por póliza).

$$k(b)\,\ddot{a}_x = b\left[1{,}000\,\overline{A}_x + 3 + 0.50\,a_x\right] + 0.30\,k(b) + 0.05\,k(b)\,a_x$$

$$k(b) = b\left[\frac{1{,}000\,\overline{A}_x + 0.5\,\ddot{a}_x + 2.50}{0.95\,\ddot{a}_x - 0.25}\right] = ba'$$

Cuando la tarifa de la póliza se añade a la prima, el porcentaje de los gastos de la prima se aplica también a la tarifa de la póliza. Por tanto, tenemos

Primer año:

$$k(b)+\frac{10}{0.70}=k(b)+14.29$$
$$=b\,a'+14.29$$
$$=b\left(a'+\frac{14.29}{b}\right)$$

Año de renovación

$$k(b)+\frac{2.50}{0.95}=k(b)+2.63$$
$$=b\left(a'+\frac{2.63}{b}\right)$$

b. Sea g la tarifa de la póliza que se cobrará con cada prima. El componente g se determina de la ecuación

$$10+2.5\,a_x+0.3\,g+0.05\,g\,a_x=g\,\ddot{a}_x$$

y la prima se transforma en

$$k(b)+g=b\left(a'+\frac{g}{b}\right)$$

14.5 Fundamentos algebraicos de la contabilidad

En esta sección se precisarán muchas de las ideas ilustradas en la sección 14.2.2. Las referencias frecuentes a los cuadros 14.5 y 14.6 ayudarán al lector a seguir la argumentación. Uno de los objetivos de la contabilidad financiera es la determinación, a intervalos periódicos, de los elementos de la ecuación del balance general.

$$A(h) = L(h) + U(h) \tag{14.5.1}$$

En (14.5.1) $A(h)$ representa el monto de los activos, $L(h)$ el de las obligaciones y $U(h)$ la participación del propietario (excedente en la terminología de la contabilidad de seguros) al final del periodo contable h. Los cambios en el excedente se pueden representar mediante

$$\Delta U(h) = \Delta A(h) - \Delta L(h) = ingreso\ \ neto\ \ en\ \ el\ \ periodo\ h+1 \tag{14.5.2}$$

Ejemplificaremos este modelo básico usando un desarrollo algebraico bajo condiciones ideales como se establece en el siguiente cuadro:

Cuadro 14.9 Especificaciones del ejemplo de contabilidad

1. Plan del seguro:	De vida entera, monto unitario
2. Base de pago:	Totalmente discreto.
3. Edad y tiempo de expedición	Expedido a (x) al principio del primer periodo contable
4. Gastos:	No hay gastos ni recargos por gastos
5. Experiencia:	La experiencia de inversión es igual a la asumida Los registros de contabilidad se harán en términos de los valores esperados a la expedición de la póliza para cada asegurado inicial.

El ejemplo se construye con base en la fórmula recurrente de reserva (7.8.2) con $b_h = 1$, $\pi_{h-1} = P_x$, ${}_hV = {}_hV_x$, multiplicado por ${}_{h-1}p_x(1+i)$ tenemos:

$$ {}_{h-1}p_x({}_{h-1}V_x + P_x)(1+i) - {}_{h-1}p_x\, q_{x+h-1} = {}_hp_x\, {}_hV_x \qquad h = 1,2,... \tag{14.5.3} $$

De acuerdo con ello, al final del primer periodo contable la ecuación del balance general esperado por cada asegurado inicial es

$$ A(1) = L(1) $$

o

$$ p_x\, {}_1V_x = p_x\, {}_1V_x \tag{14.5.4} $$

La fórmula (14.5.4) puede establecerse mediante el siguiente argumento: durante el primer periodo contable los activos esperados por asegurado inicial cambiarán en la siguiente forma:

Aumento	Ingreso por prima = P_x
	Ingreso de inversión = $P_x\, i$
Disminución	Reclamaciones por fallecimiento = q_x

$$ \begin{aligned} A(1) = A(0) + \left[A(1) - A(0)\right] &= 0 + \left[P_x(1+i) - q_x\right] \\ &= p_x\, {}_1V_x \\ &= L(1) \end{aligned} $$

En este ejemplo $A(1) - L(1) = U(1) = 0$

La fórmula (14.5.3) puede usarse también para estudiar el progreso de los estados de contabilidad en una forma recurrente. Suponga que al final del periodo contable h.

$$ A(h) = L(h) $$

y que cuando empezamos el proceso durante el periodo contable $h+1$.

$$\Delta A(h) = \begin{Bmatrix} \text{ingreso por prima} \\ + \text{ ingreso por interes} \\ - \text{ reclamaciones por fallecimiento} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}_{h}p_x\ P_x \\ + {}_{h}p_x({}_{h}V_x + P_x)\ i \\ - {}_{h}p_x\ q_{x+h} \end{Bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A(h+1) &= A(h) + \Delta A(h) \\ &= {}_{h}p_x\ {}_{h}V_x + \left\{ {}_{h}p_x\left[P_x + ({}_{h}V_x + P_x)i\right] - {}_{h}p_x\ q_{x+h} \right\} \\ &= {}_{h}p_x\left[(P_x + {}_{h}V_x)(1+i)\right] - {}_{h}p_x\ q_{x+h} \\ &= {}_{h+1}p_x\ {}_{h+1}V_x = L(h+1) \end{aligned}$$

Siguiendo los resultados esperados, en este ejemplo, sin fondos iniciales, la ganancia o recargos por contingencia, se produce $A(h) - L(h) = U(h) = 0$, $h = 0,1,2,3,...$

Ahora modificamos los supuestos del cuadro 14.9 asumiendo que la prima neta está incrementada por una constante positiva c y que los gastos por cada póliza sobreviviente, pagada al principio del periodo contable h, son e_{h-1}. La constante de recargo puede contener un componente para ganancias. Es decir, el valor presente actuarial del recargo c puede ser mayor que el valor presente actuarial del conjunto de e_{h-1}, $h = 1,2,...$

La versión aumentada de (14.5.3), incorporando las primas con recargo y los gastos, es

$$\begin{aligned} {}_{h-1}p_x\left\{\left[{}_{h-1}V_x + u(h-1)\right] + (P_x + c) - e_{h-1}\right\}(1+i) - {}_{h-1}p_x\ q_{x+h-1} \\ = {}_{h}p_x\left[{}_{h}V_x + u(h)\right] \qquad h = 1,2,3,... \end{aligned} \tag{14.5.5}$$

En (14.5.5), $u(h)$ representa la meta del excedente por cada asegurado sobreviviente al final del periodo h.

Restando la versión sin recargo, (14.5.3), de (14.5.5) produce

$$ {}_{h-1}p_x\left[u(h-1)+(c-e_{h-1})\right](1+i) = {}_hp_x\ u(h) \qquad h=1,2,3,... \tag{14.5.6} $$

Multiplicando la ecuación de la diferencia (14.5.6) por v^h y reacomodando términos se produce

$$ \Delta\left[v^{h-1}\ {}_{h-1}p_x\ u(h-1)\right] = v^{h-1}\ {}_{h-1}p_x(c-e_{h-1}) \tag{14.5.7} $$

Imponiendo la condición inicial $u(0)=0$, obtenemos de (14.5.7)

$$ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{h}\Delta\left[v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x\ u(j-1)\right] &= \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x(c-e_{j-1}) \\ v^h\ {}_hp_x\ u(h) &= \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x(c-e_{j-1}) \\ {}_hp_x\ u(h) &= \sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\ {}_{j-1}p_x(c-e_{j-1}) \end{aligned} \tag{14.5.8} $$

Es decir, el excedente esperado al final de h periodos contables por cada asegurado inicial es el valor acumulado de las contribuciones esperadas del excedente en cada periodo contable anterior. Este resultado debe compararse con el cuadro 14.5, nota al pie de página.

Si las reservas para primas netas (reservas para indemnización) se consideran como una medida de las obligaciones, los registros esperados por cada asegurado inicial en los estados de contabilidad de nuestro sistema de seguro ideal, al final del periodo contable h, son las siguientes:

Balance general
(Al final del periodo contable h)

$$
\begin{aligned}
A(h) &= L(h) + U(h) \\
&= {}_hp_x \; {}_hV_x + {}_hp_x \; u(h) \\
&= {}_hp_x \; {}_hV_x + \sum_1^h (1+i)^{h-j+1} \; {}_{j-1}p_x (c - e_{j-1})
\end{aligned}
$$

Estado de ingresos
(*h-ésimo* periodo contable)

Ingreso:	
Ingreso por primas	${}_{h-1}p_x (P_x + c)$
Ingreso por inversión	${}_{h-1}p_x \left[{}_{h-1}V_x + u(h-1) + P_x + c - e_{h-1} \right] i$
Total	${}_{h-1}p_x \left[(P_x + c)(1+i) + ({}_{h-1}V_x + u(h-1) - e_{h-1}) i \right]$

Cambio de ingresos

Reclamaciones por fallecimiento	${}_{h-1}p_x \; q_{x+h-1}$
Gastos	${}_{h-1}p_x \; e_{h-1}$
Cambios en la reserva para Obligaciones	${}_hp_x \; {}_hV_x - {}_{h-1}p_x \; {}_{h-1}V_x$
Total	${}_hp_x \; {}_hV_x - {}_{h-1}p_x ({}_{h-1}V_x - e_{h-1}) + {}_{h-1}p_x \; q_{x+h-1}$

Ingreso neto
(Cambio en el excedente) ${}_{h-1}p_x \left[u(h-1)i + (c - e_{h-1})(1+i) \right]$ (14.5.9)

Para completar el balance general hemos hecho uso de (14.5.8) y de (14.5.3). Las columnas del lado izquierdo de los cuadros 14.5 y 14.6 proporcionan ejemplos numéricos de esta exhibición. Los cuadros están en términos de un grupo de sobrevivencia determinístico en lugar de los registros esperados por cada asegurado inicial. Entonces el excedente esperado al final de h periodos contables para cada asegurado inicial es

$${}_hp_x \; u(h) = {}_{h-1}p_x \; u(h-1) + {}_{h-1}p_x \left[u(h-1)i + (c - e_{h-1})(1+i) \right] \qquad (14.5.10)$$

La fórmula (14.5.10) es idéntica a (14.5.6); sin embargo, se deriva desde un punto de vista contable. Multiplicando por v^h produce

$$\Delta\left[v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x\,u(h-1)\right] = v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x(c-e_{h-1}),$$

que es (14.5.7) reformulada con interpretaciones contables.

Al principio de este capítulo se dijo que, en la práctica, los gastos tienden a disminuir a medida que se incrementa la duración. Por tanto el excedente esperado,

$${}_hp_x\,u(h) = \sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\,{}_{j-1}p_x(c-e_{j-1})$$

será típicamente negativo para valores pequeños de h y positivo para valores más altos. Esta observación se hace con respecto a un modelo contable en el que las reservas para primas netas se consideran como una medida de las obligaciones, los recargos son uniformes y los gastos disminuyen con el tiempo después de la expedición de la póliza. Es posible emprender varias acciones para evitar la situación en la que los activos son menores que las obligaciones, en los primeros periodos:

- La organización de seguros puede obtener capital adicional para el excedente inicial, $u(0)$., para mantener

  $$u(0)(1+i)^h + \sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\,{}_{j-1}p_x\left(c-e_{j-1}\right)$$

  positivo para $h = 0,1,2,3,...$

- Los recargos pueden depender de la duración en tal forma que $c_{h-1} - e_{h-1} \geq 0$, $h = 0,1,2,3,...$
- Las obligaciones de la organización aseguradora podrán basarse en un principio modificado de reservas que reducirá las obligaciones durante los primeros años de la póliza. El sistema de reservas para indemnización adicionado con las reservas para gastos usadas en la columna (2) de los cuadros 14.5 y 14.6 es un ejemplo de tal tipo de sistema. (Esta última alternativa será el tema que se tratará en lo que resta de este capítulo.)

14.6 Métodos modificados de reservas

Un método modificado de reservas es aquel que para definir las reservas, no usa el valor presente actuarial de un conjunto de primas netas uniformes como la deducción del valor presente actuarial de las indemnizaciones futuras. En su lugar se define un sistema de ***primas escalonadas***. Generalmente, no se involucran más de tres niveles diferentes, no obstante, que la teoría permitirá más pasos en el proceso. Los tres niveles de primas se representan mediante: α, la prima neta del primer año; β, la prima neta para los siguientes $j-1$ años; y P, la prima neta uniforme que se supone pagadera después de los primeros j años de la póliza. Este conjunto de primas se restringe a tener el mismo valor presente actuarial que el conjunto de primas netas uniformes para que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\, a_{x:\overline{j-1}|} + P_{j|}\ddot{a}_{x:\overline{h-j}|} &= P\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|} \\ \alpha + \beta\, a_{x:\overline{j-1}|} &= P\,\ddot{a}_{x:\overline{j}|} \end{aligned} \tag{14.6.1}$$

en donde h es la extensión del periodo de pago de la prima.

En la notación de la sección 14.5, para las reservas de primas netas uniformes, se espera que el monto c este disponible en el primer año de la póliza. Esto proviene de una prima con recargo de $P+c$ para compensar los gastos del primer año. Si $\alpha < P$, entonces se espera que $P+c-\alpha > c$ esté disponible, dentro del método contable de las reservas modificadas, para equiparar los gastos del primer año. Si $\alpha < P$, la consecuencia es que $\beta > P$. Esto puede observarse al reescribir (14.6.1) como

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\, a_{x:\overline{j-1}|} &= P(a_{x:\overline{j-1}|} + 1) \\ \beta &= P + \frac{P-\alpha}{a_{x:\overline{j-1}|}} \end{aligned} \tag{14.6.2}$$

Puede obtenerse una segunda expresión de utilidad de (14.6.1) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta(\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - 1) &= P\,\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - \alpha \\ \beta &= P + \frac{\beta-\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}} \end{aligned} \tag{14.6.3}$$

Por lo tanto, un método modificado de reservas puede definirse especificando la amplitud del periodo de modificación j y de la prima α del primer año, de la prima de renovación β, o de la diferencia $\beta-\alpha$. La figura 14.2 proporciona un diagrama esquemático que resume la relación entre las primas que constituye un método modificado de reservas. El valor presente actuarial de los componentes de las primas, dibujado mediante las áreas sombreadas A y B, es igual como puede versé en (14.6.1) reacomodado como $P-\alpha=(\beta-P)a_{x:\overline{j-1}|}$.

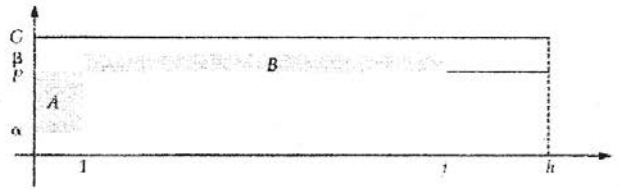


Fig. 14.2.
Primas en un Sistema Modificado de Reservas

En (14.6.1) y (14.6.2) hemos utilizado los símbolos α y β para representar, respectivamente, las primas netas del primer año y de la renovación, para un método modificado de reservas de j años y P para representar el símbolo general para la prima neta uniforme. En forma análoga usaremos el símbolo V^{Mod} para representar una reserva final computada mediante un método modificado.

Con el método modificado de reservas, la siguiente fórmula se usa para calcular las reservas finales en el caso general de un seguro dotal a n años con h pagos, estableciendo un periodo modificado de j años. Durante el periodo de modificación, $k<j$,

$$
\begin{aligned}
{}_{k}^{h}V_{\overline{x:n}|}^{Mod} &= A_{x+k:\overline{n-k}|}-\beta\,\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|}-{}_{h}P_{\overline{x:n}|}\;{}_{j-k|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-j}|} \\
&= A_{x+k:\overline{n-k}|}-{}_{h}P_{\overline{x:n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}-(\beta-{}_{h}P_{\overline{x:n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} \\
&= {}_{k}^{h}V_{\overline{x:n}|}-(\beta-{}_{h}P_{\overline{x:n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|}
\end{aligned}
$$

Después de la duración j, las reservas bajo el método modificado de reservas, son iguales a aquellas bajo el método nivelado.

Ejemplo 14.4:

Los seguros de vida entera, sobre una base totalmente continua, van a tener reservas determinadas mediante un método modificado de reservas. Con este método, las tasas de las primas netas anuales del primer año y de la renovación son $\overline{\alpha}_x$ y $\overline{\beta}_x$, $\overline{\alpha}_x < \overline{P}(\overline{A}_x)$; el periodo de modificación es el periodo completo de la póliza. Defina la variable de las pérdidas futuras y escriba las ecuaciones que puedan utilizarse para evaluar las reservas.

Solución:

$$ {}_tL^{Mod} \begin{cases} v^U - \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{\overline{U}|} & 0 \le U < 1-t \\ v^U - \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{\overline{1-t}|} - \overline{\beta}_x\, {}_{1-t|}\overline{a}_{\overline{U-(1-t)}|} & U \ge 1-t \end{cases} \quad 0 \le t < 1 $$

$$ v^U - \overline{\beta}_x\, \overline{a}_{\overline{U}|} \qquad t \ge 1 $$

Por analogía con (7.2.2), la reserva es

$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}_x)^{Mod} = \begin{cases} \overline{A}_{x+t} - \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x+t:\overline{1-t}|} - \overline{\beta}_x\, {}_{1-t|}\overline{a}_{x+t} & 0 \le t < 1 \\ \overline{A}_{x+t} - \overline{\beta}_x\, \overline{a}_{x+t} & t \ge 1 \end{cases} $$

Además,

$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}_x) - {}_t\overline{V}(\overline{A}_x)^{Mod} = \left[\overline{\beta}_x - \overline{P}(\overline{A}_x)\right]\overline{a}_{x+t} \qquad t \ge 1 $$

Por lo que necesitamos que,

$$ \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x:\overline{1}|} + \overline{\beta}_x\, {}_{1|}\overline{a}_x = \overline{P}(\overline{A}_x)(\overline{a}_{x:\overline{1}|} + {}_{1|}\overline{a}_x) \tag{14.6.4} $$

tenemos, igual que (14.6.2),

$$ \overline{\beta}_x = \overline{P}(\overline{A}_x) + \frac{\left[\overline{P}(\overline{A}_x) - \overline{\alpha}_x\right]\overline{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_{1|}\overline{a}_x} $$

y

$$ \overline{\beta}_x > \overline{P}(\overline{A}_x) $$

Por lo tanto,

$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}_x) - {}_t\overline{V}(\overline{A}_x)^{Mod} \ge 0 \qquad t \ge 1 $$

Ejemplo 14.5:

Usando la información del ejemplo 14.4, obtenga una fórmula retrospectiva para ${}_t\overline{V}(\overline{A}_x)^{Mod}$

Solución:

Considere el caso cuando $0 \le t < 1$ y recuerde que

$$\begin{aligned}\overline{A}_x &= \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x:\overline{1}|} + \overline{\beta}_x\, {}_{1|}\overline{a}_x \\ &= \overline{\alpha}_x(\overline{a}_{x:\overline{1}|} + \overline{a}_{x+1:\overline{1-t}|}\, {}_1E_x) + \overline{\beta}_x({}_{1-t|}\overline{a}_{x+1}\, {}_1E_x)\end{aligned}$$

Luego, usando la notación de la sección 7.3, tenemos

$$\begin{aligned}{}_t\overline{V}(\overline{A}_x)^{Mod} &= \overline{A}_{x+t} - \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x+t:\overline{1-t}|} - \overline{\beta}_x\, {}_{1-t|}\overline{a}_{x+t} \\ &= \overline{A}_{x+t} - \frac{\overline{A}_x - \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_tE_x} \qquad 0 \le t < 1 \\ &= \overline{\alpha}_x\, \overline{s}_{x:\overline{t}|} - {}_tk_x\end{aligned}$$

Además

$${}_t\overline{V}(\overline{A}_x) - {}_t\overline{V}(\overline{A}_x)^{Mod} = \left[\overline{P}(\overline{A}_x) - \overline{\alpha}_x\right]\overline{s}_{x:\overline{t}|} \qquad 0 \le t < 1$$

En el caso de $t \ge 1$, recordamos que

$$\overline{A}_x = \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x:\overline{1}|} + \overline{\beta}_x\left({}_{1|}\overline{a}_{x:\overline{t-1}|} + \overline{a}_{x+1}\, {}_tE_x\right)$$

Luego

$$\begin{aligned}{}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right)^{Mod} &= \overline{A}_{x+t} - \overline{\beta}_x'\, \overline{a}_{x+t} \\ &= \overline{A}_{x+t} - \frac{\overline{A}_x - \overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x:\overline{1}|} - \overline{\beta}_x\, {}_{1|}\overline{a}_{x:\overline{t-1}|}}{{}_tE_x} \\ &= \frac{\overline{\alpha}_x\, \overline{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_tE_x} + \overline{\beta}_x\, \overline{s}_{x+1:\overline{t-1}|} - {}_tk_x\end{aligned}$$

14.7 Terminal preliminar completo.

Para desarrollar un método de reservas que incremente el recargo efectivo por gastos, $G-\alpha$, para equiparar mejor los mayores gastos del primer año, α generalmente se restringe a que sea menor que P en el primer año de la póliza. Sin embargo, de acuerdo con ciertos principios regulatorios, existe un límite inferior práctico del valor de α.

Este límite inferior se deriva del reconocimiento de que las reservas negativas para obligaciones son, en realidad, activos contables. Ya que el cobro de primas futuras con recargo por gastos es incierta, las agencias regulatorias no han permitido que se incluyan tal tipo de reservas negativas en el balance general en la evaluación estatutaria de la solvencia de la compañía aseguradora. Por tanto, un objetivo práctico del método de reservas es evitar una reserva negativa al final del primer año de la póliza. Esto significa que, para una póliza de indemnización uniforme, el valor más pequeño posible de α será $A^{1}_{x:\overline{1}|}$ sobre una base totalmente discreta. Este resultado puede verse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &{}_1V \geq 0 \\ &\alpha\, \ddot{s}_{x:\overline{1}|} - {}_1k_x \geq 0 \\ &\alpha \geq A^{1}_{x:\overline{1}|} \end{aligned} \tag{14.7.1}$$

Si se fija α en el nivel mínimo y el periodo de modificación, j, es el periodo total de pago de la prima, el método resultante se denomina el método ***Terminal Preliminar Completo*** (*TPC*). Con el método (*TPC*), la reserva al final del primer año de la póliza es 0.

Para esta base totalmente discreta, la valuación de la prima de renovación β puede obtenerse de (14.6.1) sustituyendo un seguro general con h pagos de primas uniformes, por una prima neta única representada por A. Es decir, sea $A(1)$ la prima neta única para un seguro expedido a la edad $x+1$ para las indemnizaciones restantes a partir de esa edad. Entonces

$$\begin{aligned} A^{1}_{x:\overline{1}|} + \beta\ {}_1|\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|} &= P\ \ddot{a}_{x:\overline{h}|} \\ &= A \\ &= A^{1}_{x:\overline{1}|} + {}_1E_x\ A(1) \end{aligned} \tag{14.7.2}$$

o

$$\beta = \frac{{}_1E_x\, A(1)}{{}_1|\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}} = \frac{A(1)}{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}$$

En palabras, β es la prima anual neta para un seguro similar expedido a una año más de edad, con primas pagadas durante un año menos, en el caso de un periodo de pago de primas limitado, y que madura a la misma edad que el seguro original.

Para una base totalmente continua, el valor más pequeño posible para la tasa de la prima del primer $\bar{\alpha}$, es $\bar{A}^1_{x:\overline{h}|}/\bar{a}_{x:\overline{h}|}$, nuevamente basado en evitar una reserva final negativa en el primer año. Es decir,

$$\begin{aligned} {}_1\bar{V}(\bar{A}_x) &\geq 0 \\ \frac{\bar{\alpha}\,\bar{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_1E_x} - {}_1\bar{k}_x &\geq 0 \\ \bar{\alpha} &\geq \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}}{\bar{a}_{x:\overline{1}|}} \end{aligned} \qquad (14.7.3)$$

El desarrollo para la tasa de la prima de renovación, $\bar{\beta}$, es aproximadamente igual al de (14.7.2) precedente.

$$\begin{aligned} \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + \bar{\beta}\ {}_1|\bar{a}_{x:\overline{h-1}|} &= \bar{P}(\bar{A})\bar{a}_{x:\overline{h}|} \\ &= \bar{A} \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + {}_1E_x\ \bar{A}(1) \end{aligned} \qquad (14.7.4)$$

o

$$\bar{\beta} = \frac{{}_1E_x\ \bar{A}(1)}{{}_1|\bar{a}_{x:\overline{h-1}|}}$$

El efecto del método *TPC* sobre los balances generales puede demostrarse modificando (14.5.5). Notamos que las primas con recargo por gastos en el *TPC* estará dada por

$$P_x + c = A^1_{x:\overline{1}|} + c_0 = \beta_x + c_1$$

en donde c_0 es el recargo en el primer año y c_1 el de las primas de renovación. El análogo de (14.5.5) en donde, como antes, $u(k)$ representa la meta del excedente por cada asegurado que se espera sobreviva al final del periodo contable k ,es para $u(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \left[(A^1_{x:\overline{1}|} + c_0) - e_0\right](1+i) - q_x &= p_x\, u(1) \\ (c_0 - e_0)(1+i) &= p_x\, u(1) \qquad k = 0 \end{aligned} \tag{14.7.5A}$$

$$\begin{aligned} {}_kp_x \left\{\left[{}_kV^{TPC}_x + u(k)\right] + (\beta_x + c_1) - e_k\right\}(1+i) - {}_kp_x\, q_{x+k} \\ = {}_{k+1}p_x \left[{}_{k+1}V^{TPC}_x + u(k+1)\right] \qquad k = 1,2,... \end{aligned} \tag{14.7.5B}$$

Entonces, si

$$c_0 - e_0 = (P_x + c - A^1_{x:\overline{1}|} - e_0) > 0$$

el excedente del primer año será positivo en nuestro ejemplo de contabilidad ideal. En situaciones reales,

$$c_0 = P_x + c - A^1_{x:\overline{1}|} > c$$

y $p_x\, u(1)$ será mayor que cuando las obligaciones se miden mediante las reservas de primas netas uniformes.

Las fórmulas recurrentes, análogas a (7.8.2), son

$$A^1_{x:\overline{1}|}(1+i) - q_x = 0 \tag{14.7.6A}$$

y

$$ {}_kp_x({}_kV_x^{TPC} + \beta_x)(1+i) - {}_kp_x\, q_{x+k} = {}_{k+1}p_x\ {}_{k+1}V_x^{TPC} \qquad (14.7.6B) $$

Restando (14.7.6B) de (14.7.5B) obtenemos

$$ {}_kp_x\big[u(k) + c_1 - e_k\big](1+i) = {}_{k+1}p_x\ u(k+1) \qquad k = 1,2,3,... \qquad (14.7.7) $$

Al multiplicar (14.7.5A) y (14.7.7) por v^{k+1}, y permitir que $c'_k = c_0$ cuando $k = 0$ y $c'_k = c_1$ cuando $k = 1,2,...,$ tenemos

$$ \Delta\big[v^k\ {}_kp_x\ u(k)\big] = v^k\ {}_kp_x(c'_k - e_k) \qquad (14.7.8) $$

Con $u(0) = 0$, la ecuación de la diferencia (14.7.8) produce

$$ \sum_{j=0}^{k-1}\Delta\big[v^j\ {}_jp_x\ u(j)\big] = \sum_{j=0}^{k-1} v^j\ {}_jp_x(c'_j - e_j) \qquad (14.7.9) $$

$$ {}_kp_x\ u(k) = \sum_{j=0}^{k-1}(1+i)^{k-j}\ {}_jp_x(c'_j - e_j) \qquad (14.7.10) $$

Al igual que en (14.5.8), el excedente esperado por cada asegurado inicial en nuestro modelo ideal, es el valor acumulado del exceso de recargos sobre los gastos en cada uno de los primeros años. Las siguientes comparaciones de las contribuciones anuales esperadas con el excedente por cada asegurado sobreviviente en los casos de las reservas *TPC* y de las reservas de primas netas uniformes *PNU* puede desarrollarse utilizando (14.5.7) y (14.5.8).

TPC		*PNU*		(14.7.11)
$c_0 - e_0$	$>$	$c - e_0$		
$c_1 - e_k$	$<$	$c - e_k$	$k = 1,2,...$	

Las desigualdades, exhibidas en (14.7.11), para las contribuciones esperadas del excedente son válidas cuando $\alpha < P$ y $\beta > P$.

14.8 Temporal preliminar completo modificado

Si se adopta el principio de que las reservas negativas para obligaciones son inapropiadas en el balance general de una empresa aseguradora, el método de reserva *TPC* proporciona una reserva final mínima para el primer año y primas netas mínimas para el mismo. De acuerdo con (14.7.11), la contribución anual del excedente en el primer año bajo el método *TPC* y el *PNU* es

$$\underset{TPC}{P+c-A^1_{x:\overline{n}|}-e_0=c_0-e_0}>\underset{PNU}{c-e_0}$$

Surge una dificultad porque la magnitud de $P-A^1_{x:\overline{n}|}$ depende del plan del seguro. Ya que $P_{x:\overline{n}|}$ es normalmente más grande que $P^1_{x:\overline{n}|}$, el margen de gastos que se utilizará para compensar los gastos del primer año será también más grande para un seguro dotal a n años que para un seguro temporal a n años. Una escuela de pensamiento sostiene que si $P-A^1_{x:\overline{n}|}$ proporciona un margen de gastos aceptable para pólizas de primas bajas, proporciona un margen excesivo para las de primas altas. Bajo esta línea de razonamiento, las pólizas de primas bajas pueden ser valuadas satisfactoriamente bajo el método *TPC*, pero las de primas altas deberán utilizar un método modificado de reservas que produzca una reserva final positiva para el primer año.

Un plazo preliminar estándar modificado requiere de una regla de decisión mediante la cual las pólizas se separen en dos clases de primas, bajas y altas; se permite el método *TPC* para las pólizas de primas bajas y debe especificarse uno de β, $\beta-\alpha$ o $\alpha>A^1_{x:\overline{n}|}$, junto con la amplitud del periodo de modificación, para las pólizas de primas altas para definir un método de valuación que complete el estándar.

Un objetivo de la regulación gubernamental es reducir a los asegurados el peligro de que una compañía aseguradora no pueda cumplir con sus obligaciones. De acuerdo con este objetivo, las leyes y regulaciones de seguros limitan con frecuencia la elección de los métodos de valuación y sus supuestos. En algunas jurisdicciones, estas leyes y regulaciones de valuación han definido varios estándares de reservas modificadas. Sólo uno de dichos estándares continua siendo de interés directo para los actuarios que practican en Estados Unidos. La ley de Valuación Estándar define la valuación estándar

de los Comisionados para el seguro de vida. Los elementos de dicho estándar son que

- Las pólizas de primas altas se definen como aquellas para las que la prima neta de renovación del *TPC* para una vida a 20 pagos es $\beta^{TPC} > {}_{19}P_{x+1}$;
- Se requiere del método *TPC* como un mínimo para las pólizas de primas bajas.
- Se usa un método de valuación de reservas específico de los Comisionados (*Com*) para las pólizas de primas altas. En éstas, el periodo de pago de las primas es el periodo de modificación.

$$\beta^{Com} - \alpha^{Com} = {}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{h}|}$$

La aplicación de (14.6.3) produce

$$\beta^{Com} = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \qquad (14.8.1)$$

en donde h es el tamaño del periodo de pago de la prima.

Un problema en la aplicación de los estándares de valuación del temporal preliminar modificado es su ampliación al caso de las pólizas con primas e indemnizaciones no uniformes. En la sección 7.4 se discutirá un seguro general utilizando una base totalmente discreta. Este seguro se utilizará para ejemplificar el problema. Recuerde que, con el seguro, se paga una indemnización b_{j+1} por fallecimiento al final del año de la póliza $j+1$, si la muerte ocurriera en ese año. Las primas anuales son pagaderas, dependiendo de la sobrevivencia, al principio de cada año de la póliza durante el periodo de la prima. La prima bruta G_j se paga en el tiempo j; el principio del año de la póliza $j+1$.

Describiremos varias reglas, como la interpretada por **Menge** (1946), para aplicar el estándar de reservas de los Comisionados a este seguro general. Se dan fórmulas para un seguro a plazo, con una descripción de las modificaciones para un seguro dotal. Los cálculos para éste último se ilustran con el ejemplo 14.6.

La primera tarea es determinar el criterio para utilizar el *TPC*. Como primer paso, calculamos un ***monto de renovación uniforme equivalente*** (***ELRA**: En su siglas en Ingles: Equivalent Level Renewal Amount*). Para este seguro tenemos

$$ELRA = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2}\ v^{j+1}\ {}_jp_{x+1}\ q_{x+1+j}}{A^{\frac{1}{x+1:\overline{n-1}|}}} \qquad (14.8.2)$$

El *ELRA* para un seguro dotal se calcula sólo sobre la base de las indemnizaciones por fallecimiento y, por tanto, también está dado por (14.8.2).

Además, la relación promedio de las primas netas de renovación con respecto a las primas brutas de renovación se representa mediante r_F y está determinada por

$$r_F = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2}\ v^{j+1}\ {}_jp_{x+1}\ q_{x+1+j}}{\sum_{j=0}^{h-2} G_{j+1}\ v^j\ {}_jp_{x+1}} \qquad (14.8.3)$$

Para los seguros dotales, las indemnizaciones dotales puras se incluyen en el numerador para r_F.

Bajo la interpretación de **Menge**, se permite el *TPC* si

$$r_F\ G_0 \le ELRA\ {}_{19}P_{x+1} \qquad (14.8.4)$$

Si se satisface esta condición, se interpreta *TPC* en el sentido de que involucra las primas netas $\pi_0 = v\ b_1\ q_x$ y $\pi_j = r_F\ G_j$, $j = 1,2,...,h-1$, en donde h es el

tamaño del periodo de pago de las primas. La reserva modificada, para $k \geq 1$, está dada por

$$ {}_kV^{Mod} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1}\ v^{j+1}\ {}_jp_{x+k}\ q_{x+k+j} - r_F \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j}\ v^j\ {}_jp_{x+k} \qquad (14.8.5) $$

En los casos en donde (14.8.4) no se satisface, el exceso en la asignación de gastos del primer año, comparable con $\beta - \alpha$, está dada por

$$ ELRA\ {}_{19}P_{x+1} - b_1\ A^1_{x:\overline{1}|} $$

Una relación promedio modificada de las primas netas con respecto a las primas brutas, representadas mediante r_C se determina como

$$ r_C = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\ v^{j+1}\ {}_jp_x\ q_{x+j} + \left[ELRA\ {}_{19}P_{x+1} - b_1\ A^1_{x:\overline{1}|} \right]}{\sum_{j=0}^{h-1} G_j\ v^j\ {}_jp_x} \qquad (14.8.6) $$

La reserva modificada, en este caso de primas altas, está determinada por

$$ {}_kV^{Mod} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1}\ v^{j+1}\ {}_jp_{x+k}\ q_{x+k+j} - r_C \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j}\ v^j\ {}_jp_{x+k} \qquad (14.8.7) $$

Para los seguros dotales, el numerador de r_C y el lado derecho de (14.8.5) y de (14.8.7) se ajustan para incluir las indemnizaciones del dotal puro.

Ejemplo 14.6:

Calcule las primas netas anuales con el estándar de los Comisionados para una póliza de dotación especial de 30 años expedida a la edad de 35. La indemnización es de 150,000 para los primeros 20 años y 100,000 de ahí en adelante con una indemnización por maduración de 100,000. La prima bruta es de un nivel de 2,500 para 10 años y de ahí en adelante es de 1,250. Utilice la Tabla de Vida Ilustrativa con $i = 0.06$.

Solución:

El *ELRA* se basa en la indemnización por fallecimiento y se calcula como

$$ELRA = 50{,}000\frac{3M_{36} - M_{55} - 2M_{65}}{M_{36} - M_{65}}$$
$$= 130{,}153.30$$

El factor r_F está determinado por

$$r_F = \frac{50{,}000(3M_{36} - M_{55} - 2M_{65} + 2D_{65})}{1{,}250(2N_{36} - N_{45} - N_{65})}$$
$$= 0.91014604$$

y

$${}_{19}P_{36} = 0.0116543$$

Para que aplique el *TPC*, debe satisfacerse (14.8.4). Sin embargo, como

$$r_F\ G_0 = (0.91014604)(2{,}500) = 2{,}275.37 > 1{,}516.85 = ELRA\ {}_{19}P_{36}$$

no se permite el *TPC*. El exceso en la asignación de los gastos del primer año, correspondiente a $\beta - \alpha$, estará determinado por

$$ELRA\ {}_{19}P_{x+1} - b_1\ A^1_{x:\overline{1}|} = 1{,}516.8456 - 284.9395 = 1{,}231.9061$$

y

$$r_C = \frac{50{,}000(3M_{35} - M_{55} - 2M_{65} + 2D_{65}) + 1{,}231.9061D_{35}}{1{,}250(2N_{36} - N_{45} - N_{65})}$$
$$= 0.88223578$$

Por lo tanto, las primas netas de renovación son

$$r_C(2{,}500) = 2{,}205.59 \qquad \textit{años } 2,3,...,10$$
$$r_C(1{,}250) = 1{,}102.79 \qquad \textit{años } 11,12,...,30$$

y la prima neta del primer año $= r_C(2{,}500) - 1{,}231.9061 = 973.68$

14.9 Estándar canadiense

El Decreto de Seguros Canadiense prescribe un método de reservas modificadas (*CAN*) que permite la valuación actuarial con discreción amplia en la elección de los supuestos. Matemáticamente, existen formas equivalentes para definir un método de modificación de reservas. La definición del método de modificación de reservas canadiense se presentará en formas alternativas para poder obtener mayores conocimientos.

Primero, sea E^{Can} la asignación extra para gastos del primer año medida con respecto a la prima neta uniforme. Es decir,

$$\alpha^{Can} = P - E^{Can} \tag{14.9.1}$$

y utilizando (14.6.2), donde el periodo de modificación es el periodo de pago de la prima, tenemos.

$$\beta^{Can} = P + \frac{E^{Can}}{a_{x:\overline{h-1}|}} \tag{14.9.2}$$

donde

$$E^{Can} = \min\left[(a),(b),(c)\right]$$

(a) = 150% de la prima neta uniforme.
(b) = gastos reales de adquisición
(c) = el valor presente actuarial de los gastos recuperables en el segundo y años posteriores, mientras que continúa proporcionando para gastos administrativos y dividendos de los tenedores de pólizas.

Multiplicando (14.9.2) por $a_{x:\overline{h-1}|}$ y sumando el resultado a (14.9.1) produce

$$\alpha^{Can} + \beta^{Can}\, a_{x:\overline{h-1}|} = A$$

Se deducen las reservas,

$$ {}_0V^{Can} + \alpha^{Can} = P - E^{Can} \tag{14.9.3A} $$

$$ {}_kV^{Can} = A(k) - \beta^{Can}\, \ddot{a}_{x+k\overline{|h-k|}} \tag{14.9.3B} $$

$$ = {}^h_kV - \frac{E^{Can}\, \ddot{a}_{x+k\overline{|h-k|}}}{\ddot{a}_{x\overline{|h-1|}}} \tag{14.9.3C} $$

en donde $A(k)$ representa el valor presente actuarial de las indemnizaciones futuras en la duración k y se obtiene (14.9.3C) sustituyendo (14.9.2)

Se considerará un enfoque equivalente en las discusiones preliminares a la adopción del método de reserva modificada canadiense. Con ese enfoque, la reserva final en el tiempo 0 se define como $-E^{Can}$, la prima del primer año es P y β^{Can} se define al igual que en (14.9.2). En cada uno de estos enfoques, la reserva inicial en el tiempo 0 es $P - E^{Can}$ y las reservas finales subsecuentes estarán determinadas mediante (14.9.3B).

14.10 Notas y referencias

En este capítulo hemos utilizado la expresión "primas incrementadas para cubrir gastos" o " recargadas por gastos" para lo que algunos llamarían primas brutas. El uso del término más largo es intencionado como una advertencia de que el tema de las primas contiene muchos tópicos diferentes a las primas netas discutidas en capítulos anteriores y de los recargos por gastos introducidos aquí. Estos tópicos incluyen consideraciones de competitividad, recargos por ganancias en seguros de no participación, dividendos esperados en los seguros de participación, factores de riesgo y el impacto del retiro de indemnizaciones. Guertin (1965) discute muchos de estos tópicos.

Fassel (1956) discute las materias involucradas en la estimación y asignación de gastos por póliza. Hasta la época del documento de Fassel, la mayoría de los gastos por póliza se incluían (suponiendo un tamaño promedio de póliza) en los recargos por gastos que varían con el monto del seguro. De hecho el uso ya sea de tarifas de póliza o el sistema de banda fue visto, durante muchos años, como una asignación inequitativa de los cargos por gastos.

Noback (1969) escribió un tratado sobre la contabilidad de los seguros de vida. Horn (1971) estudió el impacto de varios sistemas de reservas sobre el tiempo de incidencia del ingreso neto reportado.

Las reservas del temporal preliminar completo también se denominan reservas Zillmerizadas por el actuario suizo que desarrolló el método. El método de los Comisionados y las recomendaciones asociadas fueron desarrollados por dos comités de la Asociación Nacional de Comisionados de Seguros (NAIC: Siglas en Ingles: Nacional Association of Insurance Committees) con membresía casi idéntica: el Comité para el estudio de la necesidad de una nueva tabla de mortalidad y temas relacionados (1939) y el Comité para el estudio de las Indemnizaciones sin pérdida y asuntos relacionados (1941). En reconocimiento a su presidente común, estos comités fueron conocidos popularmente, como los Comités Guertin. Menge (1946) escribió un documento muy completo sobre los aspectos técnicos del método de los Comisionados.

Ejercicios

Sección 14.2

14.1 a. Una empresa de juegos de azar cobra 0.55 a cada uno de un total de 1000 clientes el 1° de julio del año A. Inmediatamente invierte los fondos en una cuenta de ahorros que gana 3% de interés cada 6 meses. El 1° de julio del año $A+1$, se tirarán 1000 monedas, cada una asignada a un cliente específico. Si la moneda del cliente cae en cara, el cliente recibe un premio de 1. Si la moneda cae en cruz, el premio es 0. Proporcione las cantidades del balance general y el estado de ingresos de la empresa para el 31 de diciembre del año A. Utilice valores presentes actuariales para las obligaciones.

Balance general	
Activos	Obligaciones
Cuenta de ahorros	Reservas
	Excedente
Estado de ingresos	
Ingresos por primas	
Ingreso por intereses	
Incremento en las reservas	

b. La variable aleatoria Y es el monto de los pagos hechos el 1° de julio del año $A+1$ y tiene una distribución binomial. Utilizando una aproximación normal, evalúe

$$\Pr\left[Y(1.03)^{-1} - A > 0 \right]$$

en donde A representa los activos para el 31 de diciembre del año A.

c. Si la empresa tenía sólo un cliente, la escala de la operación hubiese sido 0.001 de aquella de la parte (a). Demuestre que la probabilidad exhibida en (b) es igual a $1/2\,W$ para la empresa reducida.

14.2 En un modelo totalmente continuo, la variable de pérdidas incrementada con gastos para usarse con una póliza de vida entera, está determinada por

$$L_e = L + X$$

donde

$$L = v^T - \bar{P}\,(\bar{A}_x)\,\bar{a}_{\overline{T}|}$$

y

$$X = c_0 + (g - e)\,\bar{a}_{\overline{T}|}$$

En estas expresiones, L se interpreta como la variable de pérdidas asociada con la porción de indemnización de la póliza y X con los gastos. El símbolo c_0 representa los gastos iniciales no aleatorios, g la tasa del gasto de mantenimiento continuo, y e el recargo por gastos en la prima. Se adoptará el principio de equivalencia y $E[L] = E[X] = 0$. Demuestre que

a) $X = c_0\, L$

b) $Var[L_e] = (1 + c_0)^2\, Var[L]$

Sección 14.3

14.3 Un seguro dotal de 1000 otorgado a edad 65, es expedido para una persona de edad 40, la prima anual es determinada con los siguientes supuestos:

- La comisión en el primer año por recargo por gastos (ventas) es del 40% sobre la prima;
- Las comisiones del 2° al 10° año por renovación por recargo por gastos sobre la póliza es del 5%;
- El impuesto para cada año con recargo por gastos sobre la prima, es del 2%;
- El gasto de mantenimiento en el primer año es de 12.50 por cada 1000 de suma asegurada y de 4.00 por cada 1000 de suma asegurada de ahí en adelante;
- La prima neta debe proporcionar lo suficiente para el pago inmediato de las reclamaciones por fallecimiento sin ajuste de primas al fallecimiento;
- Debe utilizarse una tabla de mortalidad selecta y última a 15 años.

Escriba una expresión para la prima con recargo por gastos.

14.4 Se tiene un seguro dotal a n años a prima única, la cual considera como recargo por gastos los siguientes:

- Impuestos del $2\frac{1}{2}\%$ sobre la prima;
- La comisión es 4% de la prima;
- Otros gastos: 5% para el primer año y 2.50% para cada año de renovación, por cada 1,000 de suma asegurada.

Desarrolle una fórmula para la prima con recargo por gastos expedido a (x) para una póliza de seguro por 1,000 de indemnización. Considere que las reclamaciones se pagan inmediatamente y los gastos incurridos al principio de cada año de la póliza.

14.5 Para una póliza de vida entera por la cantidad de 1 u.m sobre una base de pago totalmente discreta, la prima anual con recargo por gastos se basa en el siguiente esquema de gastos:

- Un gasto inicial de e_0
- Para cada año de la póliza, incluyendo el primero, un gasto de $e_1 + e_2 P_x$
- El costo de financiamiento de reclamaciones, pagado junto con la reclamación, de e_3 por unidad de seguro.

Si $G = a P_x + c$ determine a y c.

Sección 14.4

14.6 Sea

$$G(b) = \frac{b(a + c/b)}{1 - f}$$

y

$$R(b) = \frac{a}{1 - f} + \frac{c}{b - bf}$$

Dado que $a/(1-f) = 25$, $c/(1-f) = 7.50$ y m (el monto mínimo de seguro medido en miles) = 2, trace la gráfica de $R(b)$.

14.7 Usando los hechos establecidos en el ejercicio 14.6, sea $t = 5$ y demuestre que

a. $R(t) = 26.50$

b. $R(b) = R(t) + Z(b)$

en donde $Z(b) = c/(1-f)b - c/(1-f)t$.

c. Trace $Z(b)$

En este problema t se llama el ***pivote*** con $Z(b) > 0$ cuando $b < t$, y $Z(b) < 0$ cuando $b > t$

14.8 La *f.d.p.* del monto del seguro expedido sobre una póliza individual para un plan particular de seguro está determinada por

$$f(b) = k\, b^{-3} \qquad b > 10$$

en donde b se mide en miles. Calcule

a. La constante k normalizadora
b. El monto esperado de la póliza
c. La mediana de la distribución de los montos de seguro

Sección 14.5

14.9 El análogo continuo de (14.5.5) es la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x\left[{}_t\overline{V}(\overline{A}_x)+\overline{u}(t)\right] = {}_tp_x\left[\overline{P}(\overline{A}_x)+\delta\ {}_t\overline{V}(\overline{A}_x)+\overline{c}-\overline{e}(t)+\delta\ \overline{u}(t)-\mu_{x+t}\right]$$

Usando esta ecuación, y (7.11.5) reacomodada para expresar

$$\frac{d}{dt}\left[{}_tp_x\ {}_t\overline{V}(\overline{A}_x)\right]$$

demuestre que

$${}_tp_x\ \overline{u}(t) = \int_0^t e^{\delta(t-y)}\ {}_yp_x\left[\overline{c}-\overline{e}(y)\right]\,dy$$

Sección 14.6

14.10 Para un método modificado de reservas el periodo de modificación es igual al periodo de pago de las primas.

Demuestre que

$${}_kV^{Mod}_{x:\overline{n}|} = 1-(\beta+d)\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

14.11 Un método modificado de reservas para un seguro de vida entera, de base totalmente continua, está definido por

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{t}{m}\bar{\beta} \qquad 0 \le t < m$$

en donde $\bar{\beta}$ es la prima uniforme para $t \ge m$.

a. Escriba una fórmula para $\bar{\beta}$

b. Escriba una fórmula prospectiva para ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)^{Mod}$, $t < m$.

14.12 Calcule α_x^{Mod} y β_x^{Mod} con un método modificado de reservas para un seguro de vida entera totalmente discreto en donde ${}_1V_x^{Mod} = K$. El periodo de modificación es el periodo de pago de las primas.

14.13 Con un método modificado de reservas para una póliza de vida entera totalmente discreta, las primas netas anuales, P_x, son reemplazadas (con propósitos de reserva) por las primas anuales de α_x^{Mod} para los primeros n años y β_x^{Mod} de ahí en adelante. Demuestre que

$$\frac{\beta_x^{Mod} - P_x}{P_x - \alpha_x^{Mod}} = \frac{\ddot{a}_x}{{}_{n|}\ddot{a}_x} - 1$$

14.14 Demuestre que

$${}_kV - {}_kV^{Mod} = \left(\frac{\beta - \alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|}$$

en donde j es el tamaño del periodo de modificación. Nótese que esta diferencia puede interpretarse como la porción sin amortización de la asignación extra de gastos para el primer año

Sección 14.7

14.15 Demuestre que

$${}_kV_{x\overline{n}|}^{TPC} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x+1\overline{n-1}|}} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

14.16 La ***reserva terminal año-2 preliminar*** se define con tres valuaciones de primas netas:

Primer año: $A^1_{x:\overline{1}|}$

Segundo año: $A^1_{x+1:\overline{1}|}$

De ahí en adelante: Prima neta uniforme para la edad $x+2$, sin cambio en las indemnizaciones o periodo de pago de primas.

Demuestre que, para este método, la reserva sobre una póliza de vida entera de (x) está determinada mediante

$$ {}_1V^{Mod} = {}_2V^{Mod} = 0 $$

$$ {}_kV^{Mod} = {}_kV_x - (P_{x+2} - P_x)\,\ddot{a}_{x+k} \qquad k = 3,4,5,... $$

(Este tipo de sistema de reservas es común en los seguros médicos.)

14.17. Un método de valuación de reservas propuesto tiene una prima neta del primer año α y una prima neta de renovación β aplicable en todos los años de renovación. La prima del primer año tiene la restricción de ser al menos igual a $A^1_{x:\overline{1}|}$. Esta previsión permite el uso de *TPC* para algunas pólizas y algunas edades. El exceso de β sobre α no puede exceder de 0.05. Suponga que en una base de valuación particular $d = 0.03$, $\ddot{a}_x = 17$, $\ddot{a}_{x:\overline{12}|} = 9$, $A^{\frac{1}{}}_{x:\overline{12}|} = 2/3$ y $A^1_{x:\overline{1}|} = 0.01$.

a. Calcule β para un seguro de vida entera expedido a (x).

b. Calcule ${}_{12}V^{Mod}_x$ por este método.

c. Suponiendo que $\alpha = A^1_{x:\overline{1}|} = 0.01$, calcule un valor de prueba para β para un seguro dotal sobre (x) a 12 años. Confirme que este valor para β es inadmisible ya que $\beta - \alpha > 0.05$.

d. Usando el resultado de (c), calcule β para un seguro dotal sobre (x) a 12 años.

e. Calcule ${}_1V^{Mod}_{x:\overline{12}|}$

14.18 Escriba fórmulas para las primas del primer año y de renovación con el método de reservas de los Comisionados para una dotación expedida a (x), a 15 años, con 15 pagos, sobre una base de pago totalmente discreta.

14.19 Una reserva estándar modificada temporal preliminar se describe en la siguiente forma:

- Las pólizas se dividen en dos clases: Clase I, si la prima neta de renovación *TPC* es mayor que ${}_{19}P_{x+1}$; Clase II, si la póliza no pertenece a la Clase I.

- Para las pólizas de Clase I, la prima neta del primer año es la misma que la definida por el método de reserva de los Comisionados. La prima neta de renovación es tal que la reserva de la prima neta uniforme se alcanza al final del periodo de primas o 15 años, lo que suceda primero.

- Para las pólizas de Clase II, se prescribe el método *TPC*.

Para una dotación expedida a (x) a 20 años, con 20 pagos, sobre una base de pago totalmente discreta, escriba una expresión para α y β bajo este estándar.

14.20 Si $\beta^{TPC} > {}_{19}P_{x+1}$, la reserva terminal k para un seguro totalmente discreto que se expide a un individuo de edad (x), por el método de los comisionados, esta escrita como:

$$ {}_kV^{Com} = \frac{A^1_{x:\overline{1|}}}{{}_kE_x} + {}_{19}P_{x+1}\,\ddot{s}_{x+1:\overline{k-1|}} + T\,\ddot{s}_{x:\overline{k|}} - \frac{A^1_{x:\overline{k|}}}{{}_kE_x} $$

Determine una expresión para T

14.21 Si $\beta^{TPC} > {}_{19}P_{x+1}$ y

$$b_{j+1} = 1 \qquad j = 0,1,...,n-1$$

$$G_j = P(1+\lambda) \qquad j = 0,1,...,h-1$$

Demuestre que (14.8.7) se reduce a la fórmula para la reserva k-ésima mediante el estándar de los Comisionados.

Sección 14.9

14.22 El estándar canadiense fue definido en la ley canadiense, antes de la adopción del método canadiense modificado de reservas, Las pólizas con primas altas se definieron como aquellas que satisfacían $P > P_x$. Para dicha póliza, el periodo de modificación y el periodo de pago de la póliza coincidía y $P - \alpha = P_x - A^1_{x:\overline{1}|}$. Para las otras pólizas se permitirá el *TPC*.
Demuestre que para un seguro dotal a n años

$$\beta = P_{x:\overline{n}|} + \frac{P_x - A^1_{x:\overline{1}|}}{a_{x:\overline{n-1}|}}$$

Misceláneos

14.23. a. Calcule alternativas a los ingresos netos en la columna (2) del cuadro 14.5 mediante la ecuación
Ingreso neto = (ingreso por intereses sobre el excedente)
+ (Recargos netos por ganancias más intereses).

b. Compare la expresión del ingreso neto de la parte (a) con la expresión correspondiente (14.5.9), y haga algún comentario cerca de la diferencia de los puntos de vista.

INDEMNIZACIONES Y DIVIDENDOS SIN PÉRDIDA LEGAL

15.1 Introducción.

En los capítulos 6 y 7 se construirá un modelo de decremento simple para un seguro de vida individual con primas y reservas netas anuales. En este modelo la medida del tiempo y, quizá, el monto de los pagos por indemnización y beneficios se determinaron por el tiempo del fallecimiento del asegurado, y las primas se pagarán hasta el momento del fallecimiento o hasta el fin del periodo de las primas de acuerdo a lo especificado en la póliza. En la práctica, no hay forma de prevenir la interrupción de los pagos de las primas antes de la muerte o del final del periodo de pago de la prima. En esta circunstancia surge el tema acerca de cómo reconciliar los intereses de las partes que intervienen en la póliza. Para examinarlo es apropiado recurrir a un modelo derivado de la teoría de decremento múltiple. Desde los primeros tiempos del seguro, las consideraciones de pólizas públicas que deberán guiar la reconciliación de los intereses del sistema de seguros y los asegurados que suspendan los pagos, han estado sujetas a una gran discusión.

Antes de que las primas y reservas puedan determinarse, debe adoptarse un principio rector. De la misma forma, se requiere un principio rector para la determinación de las ***indemnizaciones sin pérdida legal***, aquellas indemnizaciones que no se perderán debido a la suspensión prematura de los pagos de las primas. En la presente sección adoptaremos un principio operacional simple, uno que es, en realidad, aproximado al adoptado en la reglamentación de seguros en Estados Unidos. El principio es que el asegurado que deja de pagar debe recibir un valor tal que la estructura de la indemnización, las primas y las reservas, construida utilizando el modelo de decremento simple, permanezca apropiada para el contexto del decremento múltiple.

Este principio es motivado por un concepto particular de equidad acerca del tratamiento de las dos clases de tenedores de pólizas, aquellos que interrumpen los pagos de las primas antes que el contrato de seguro básico se cumpla totalmente y los que continúan. Es posible, que existan varios conceptos de lo que constituyen la equidad, desde los que consideran que los tenedores de pólizas que dejan de pagar no han cumplido el contrato y, por lo tanto, no tienen derecho a las indemnizaciones sin pérdida legal, hasta los que afirman que los tenedores de pólizas que no terminan de pagar deberán regresarse a su posición original mediante el reembolso del valor acumulado de todas las primas, menos, tal vez, un cargo por el seguro. El concepto de equidad, que es el fundamento del principio adoptado en Estados Unidos, es un punto intermedio. Es decir, los tenedores de pólizas que se retiran del seguro de vida tienen derecho a las indemnizaciones sin pérdida legal, pero estas indemnizaciones no deberán forzar un cambio en la estructura precio-indemnización para los tenedores de pólizas que continúan.

Para ilustrar algunas de las implicaciones de este principio, desarrollaremos un modelo para una póliza de vida entera sobre una base de pago totalmente continua con indemnizaciones para el fallecimiento y el retiro. Se hará el supuesto de que la introducción de los retiros en el modelo no cambia la fuerza de la mortalidad, representados en este desarrollo por $\mu^{(1)}_{x+t}$ en los modelos de decremento simple y doble. La fuerza del retiro se representa mediante $\mu^{(2)}_{x+t}$ con

$$\mu^{(\tau)}_{x+t} = \mu^{(1)}_{x+t} + \mu^{(2)}_{x+t}$$

Para los modelos de decremento múltiple, es necesario que

$$\int_0^\infty \mu^{(\tau)}_{x+t} dt = \infty$$

Para que

$$\lim_{t\to\infty} {}_tp^{(\tau)}_x = 0$$

Pero no es necesario que $\mu^{(2)}_{x+t}$ tenga esta propiedad.

Empezamos nuestro modelo especializándonos en el caso de un seguro de vida entera con primas y reservas de decremento simple,

$$\frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x) + \delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - \mu^{(1)}_{x+t}\left[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\right] \qquad (15.1.1)$$

Recordando de la sección 9.2 que

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{(\tau)} = -\,{}_tp_x^{(\tau)}\left(\mu^{(1)}_{x+t} + \mu^{(2)}_{x+t}\right)$$

podemos expresar la siguiente derivada como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\right] &= v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\left[\bar{P}(\bar{A}_x) + \delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - \mu^{(1)}_{x+t}(1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x))\right] \\ &\quad - v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\left[\delta + \mu^{(1)}_{x+t} + \mu^{(2)}_{x+t}\right] \\ &= v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\left[\bar{P}(\bar{A}_x) - \mu^{(1)}_{x+t} - \mu^{(2)}_{x+t}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)\right]. \end{aligned} \qquad (15.1.2)$$

El progreso de las reservas para un seguro de vida entera que incluye indemnizaciones por retiro ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ usando primas y reservas derivadas de un modelo de decremento doble, es similar a (15.1.1) y se muestra a continuación (15.1.3). En esta expresión, el subíndice 2 representa las primas y reservas basadas en el modelo de decremento doble:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left({}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2\right) &= \bar{P}(\bar{A}_x)^2 + \delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 - \mu^{(1)}_{x+t}\left[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2\right] \\ &\quad - \mu^{(2)}_{x+t}\left({}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2\right)\end{aligned} \qquad (15.1.3)$$

El último término en (15.1.3) es el costo neto del retiro cuando la reserva ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2$ se trata como un fondo de ahorros disponible para compensar las indemnizaciones [véase (7.11.5)].

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[v^t\, {}_tp_x^{(\tau)}\, {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 \right] &= v^t\, {}_tp_x^{(\tau)} \left\{ \bar{P}(\bar{A}_x)^2 + \delta\, {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 \right. \\ &\quad \left. - \mu^{(1)}_{x+t} \left[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 \right] - \mu^{(2)}_{x+t} \left[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 \right] \right\} \\ &\quad - v^t\, {}_tp_x^{(\tau)}\, {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 \left[\delta + \mu^{(1)}_{x+t} + \mu^{(2)}_{x+t} \right] \\ &= v^t\, {}_tp_x^{(\tau)} \left[\bar{P}(\bar{A}_x)^2 - \mu^{(1)}_{x+t} - \mu^{(2)}_{x+t}\, {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) \right]\end{aligned} \tag{15.1.4}$$

Combinando (15.1.2) y (15.1.4) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left[v^t\, {}_tp_x^{(\tau)} \left({}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) \right) \right] = v^t\, {}_tp_x^{(\tau)} \left[\bar{P}(\bar{A}_x)^2 - \bar{P}(\bar{A}_x) \right] \tag{15.1.5}$$

Ahora integramos (15.1.5) desde $t = 0$ hasta $t = \omega - x$ para obtener

$$0 = \bar{a}_x^{(\tau)} \left[\bar{P}(\bar{A}_x)^2 - \bar{P}(\bar{A}_x) \right] \tag{15.1.6}$$

implicando que

$$\bar{P}(\bar{A}_x)^2 = \bar{P}(\bar{A}_x) \tag{15.1.6}$$

Por tanto (15.1.5) se reduce a

$$\frac{d}{dt}\left\{ v^t\, {}_tp_x^{(\tau)} \left[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^2 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) \right] \right\} = 0,$$

lo que implica que

$${}_s\bar{V}(\bar{A}_x)^2 = {}_s\bar{V}(\bar{A}_x) \qquad s \geq 0 \tag{15.1.7}$$

De ahí que, si la indemnización por retiro en un modelo de decremento doble para un seguro de vida entera, con base de pago totalmente continua, es la reserva bajo el modelo de decremento simple, las primas y reservas bajo el modelo de decremento doble son iguales a las primas y reservas bajo el modelo de decremento simple. Este resultado no se aplicará directamente al problema práctico de la definición de las indemnizaciones sin pérdida legal. Sin embargo, se sugiere la idea básica de cómo minimizar el impacto del retiro, o de las indemnizaciones sobre las primas, sin pérdida legal, (determinadas con el modelo de decremento simple) y se encontrará presente en lo que resta de este capítulo.

15.2 Valores en efectivo.

El desarrollo que se presentó en la sección anterior no incluye consideraciones de gastos y los recargos correspondientes sobre las primas. En consecuencia, si se adopta el principio general establecido en esa sección para determinar el valor, al momento en que se deja de pagar la prima, de las indemnizaciones sin pérdida legal, se debe hacer alguna asignación para estos factores faltantes. Un método aproximado para ajustar las reservas netas uniformes para las primas para gastos iniciales no recuperados con los recargos sobre las primas y para el riesgo de retiro en un momento financiero inoportuno para el asegurador, es definir

$$ {}_kCV = {}_kV - {}_kSC \tag{15.2.1}$$

En (15.2.1) ${}_kCV$ es el ***valor en efectivo*** de las indemnizaciones sin pérdida legal en el tiempo $k = 1,2,3,...$ subsecuente a la expedición de la póliza, ${}_kV$ es la reserva final y ${}_kSC$ es el ***cargo de rescate***.

La cantidad ${}_kSC$ recibirá su nombre de las prácticas y reglamentaciones iniciales del seguro. Durante muchos años las leyes de algunos estados especificaban un valor máximo para ${}_kSC$, como, por ejemplo, 0.025 por cada unidad de seguro.

En la práctica, no pueden cobrarse valores negativos de ${}_kCV$ a los tenedores de pólizas que se retiran. Por tanto, los valores de (15.2.1), por unidad de seguro, son positivos ó 0.

Continuando el tema de regulación del valor en efectivo de las indemnizaciones sin pérdida legal, ha sido la necesidad del reconocimiento directo del monto e incidencia de los gastos. Una idea, de acuerdo con ese tema, es definir un valor en efectivo mínimo para una unidad de seguro como

$$\begin{aligned} {}_kCV &= A(k) - P^a\,\ddot{a}(k) \\ &= {}_kV - (P^a - P)\,\ddot{a}(k) \end{aligned} \tag{15.2.2}$$

Donde $A(k)$ y $\ddot{a}(k)$ son, respectivamente, los símbolos de la prima neta anual del seguro en general y de las anualidades, apropiados para el tiempo k, donde $k = 1,2,3,...$ subsecuente a la expedición de la póliza, ${}_kV$ representa una reserva final en el mismo tiempo, P es una prima anual neta y P^a se denomina como ***prima ajustada***. (Los símbolos $A(0)$, $\ddot{a}(0)$ se abreviarán como A y $\ddot{a}$,

respectivamente.) El problema de regulación se transforma en definir primas ajustadas.

El Informe del comité de la Sociedad de Actuarios de 1975 que estudiará las indemnizaciones sin pérdida legal y cuestiones relacionadas contendrán consideraciones en torno a dos tipos de gastos al definir las primas ajustadas. Primero, es una cantidad uniforme por unidad de seguro, denotada por E, en la que se incurre cada año durante el periodo de pago de la prima. Segundo, es una asignación adicional para gastos para el primer año de cantidad E_1. La tasa bruta de la prima G se supone compuesta por una prima ajustada y el componente del gasto anual uniforme E. Se supone que el componente de gasto del primer año, E_1, contiene una prima ajustada. Es decir,

$$G = P^a + E \tag{15.2.3a}$$

$$G\ddot{a} = (P^a + E)\ddot{a} = A + E_1 + E\ddot{a} \tag{15.2.3b}$$

De (15.2.3b) obtenemos

$$P^a = \frac{A + E_1}{\ddot{a}} \tag{15.2.4}$$

Al sustituir $\ddot{a} = a + 1$ en la fórmula (15.2.4), $\ddot{a}$ puede reexpresarse como

$$P^a - E_1 + P^a a = A \tag{15.2.5}$$

La fórmula (15.2.5) debe compararse con (14.6.1), mostrando que puede verse como la prima del primer año, α, y P^a como la prima de renovación, β, en un método de modificación de reservas. Tan pronto se define E_1, la previsión para los gastos del primer año por unidad de seguro, se determina una prima ajustada.

La Ley de Estandarización de Indemnizaciones sin Pérdida Legal para Seguros de Vida de NAIC de 1941, especifica E_1 y después define los valores en efectivo mínimos por unidad de seguro utilizando (15.2.2). En su informe de 1975, el comité de la Sociedad de Actuarios recomendó la retención de (15.2.2) como la forma básica para regular los valores en efectivo, pero también recomendó algunos cambios y simplificaciones para la definición de E_1. Estas recomendaciones fueron incorporadas en La Ley de Estandarización de Indemnizaciones sin Pérdida Legal de NAIC, de 1980.

Cuadro 15.1 Definición de E, asignación de los gastos del primer año por unidad de seguro

1941	$0.4\text{mín}\left(P^a, 0.04\right) + 0.25\text{mín}\left(P^a, P_x^a, 0.04\right) + 0.02$
1980	$1.25\text{mín}\left(P, 0.04\right) + 0.01$

Nótese que

- P^a representa la tasa de la prima ajustada para esta póliza.
- P representa la tasa de la prima neta para esta póliza.
- P_x^a representa la tasa de la prima ajustada para una póliza de vida entera de (x).

Para instrumentar las reglamentaciones de NAIC de 1941, se debe primero computar P_x^a. Tenemos

$$P_x^a = \frac{A_x + E_1}{\ddot{a}_x}$$

En donde

$$E_1 = \begin{cases} 0.40P_x^a + 0.25P_x^a + 0.02 = 0.65P_x^a + 0.02 & P_x^a < 0.04 \\ 0.016 + 0.010 + 0.020 = 0.046 & P_x^a \geq 0.04 \end{cases}$$

Estos resultados nos llevan a

$$P_x^a = \begin{cases} \dfrac{A_x + 0.02}{\ddot{a}_x - 0.65} & P_x^a < 0.04 \\ \dfrac{A_x + 0.046}{\ddot{a}_x} & P_x^a \geq 0.04 \end{cases}$$

Uno de los objetivos de la ley de 1980 es la simplificación eliminando la circularidad de las definiciones de 1941. Ello se logra mediante el uso de porcentajes de las asignaciones para gastos sobre las primas netas en lugar de hacerlo sobre las primas ajustadas.

El cuadro 15.2, adaptado de un cuadro del informe de 1941, ilustra el rango de posibilidades para las primas ajustadas de acuerdo al modelo de legislación desarrollado con base en el informe. Es importante tener en cuenta que estas primas ajustadas se usan para definir los valores en efectivo mínimos legales por unidad de seguro. Se permiten valores en efectivo más altos.

Ejemplo 15.1:

Para cada renglón de los cuadros 15.2 y 15.3, calcule la provisión, correspondiente para gastos del primer año, E_1

Cuadro 15.2 Primas ajustadas informe de 1941

Plan de Seguro	**Rango de las primas ajustadas**		**Fórmula para primas ajustadas por unidad de seguro**
	Vida Entera	**Plan de Seguro**	
1. Vida entera	< 0.04	< 0.04	$\frac{A_x + 0.02}{\ddot{a}_x - 0.65}$
2. Vida entera	≥ 0.04	≥ 0.04	$\frac{A_x + 0.046}{\ddot{a}_x}$
3. Otros planes	< 0.04	< 0.04 y $\leq P_x^a$	$\frac{A + 0.02}{\ddot{a} - 0.65}$
4. Otros planes	< 0.04	< 0.04 pero $> P_x^a$	$\frac{A + 0.02 + 0.25P_x^a}{\ddot{a} - 0.4}$
5. Otros planes	≥ 0.04	< 0.04	$\frac{A + 0.02}{\ddot{a} - 0.65}$
6. Otros planes	< 0.04	≥ 0.04	$\frac{A + 0.036 + 0.25P_x^a}{\ddot{a}}$
7. Otros planes	≥ 0.04	≥ 0.04	$\frac{A + 0.046}{\ddot{a}}$

Cuadro 15.3 Primas ajustadas, Ley de 1980

Plan de Seguro	Rango de Primas Netas	Fórmula para Primas Ajustadas
1. Cualquier Plan	< 0.04	$\dfrac{A + 1.25P + 0.01}{\ddot{a}}$
2. Cualquier Plan	≥ 0.04	$\dfrac{A + 0.06}{\ddot{a}}$

Solución:

Rescribiendo (15.2.4) produce $E_1 = P^a\ddot{a} - A$ ó $E_1 = (P^a - P)\ddot{a}$.

Tabla 15.2 Línea	E_1
1.	$\left[\dfrac{0.65P_x + 0.02}{\ddot{a}_x - 0.65}\right]\ddot{a}_x$
2.	0.046
3.	$\left[\dfrac{0.65P + 0.02}{\ddot{a} - 0.65}\right]\ddot{a}$
4.	$\left[\dfrac{0.4P + 0.25P_x^a + 0.02}{\ddot{a}_x - 0.40}\right]\ddot{a}$
5.	$\left[\dfrac{0.65P + 0.02}{\ddot{a} - 0.65}\right]\ddot{a}$
6.	$0.25P_x^a + 0.036$
7.	0.046

Tabla 15.3 Línea	E_1
1.	$1.25P + 0.01$
2.	0.06

Ejemplo 15.2:

Desarrolle fórmulas, utilizando el informe de 1941 y la ley de 1980, para las primas ajustadas de un seguro dotal a 15 años con 10 pagos, expedido a edad un individuo de edad (20), con los supuestos reales de que $P_{20}^{a} < 0.04$ y que ${}_{10}P_{20:\overline{15}|} \geq 0.04$.

Solución:

El cuadro 15.2, la línea 6 produce

$${}_{10}P^{a}_{20:\overline{15}|} = \frac{A_{20:\overline{15}|} + 0.036 + 0.25P^{a}_{20}}{\ddot{a}_{20:\overline{10}|}}$$

Mientras que el cuadro 15.3, la línea 2 produce

$${}_{10}P^{a}_{20:\overline{15}|} = \frac{A_{20:\overline{15}|} + 0.06}{\ddot{a}_{20:\overline{10}|}}$$

En la sección 14.8, se discutieron algunos de los problemas que surgen al aplicar los estándares de la reserva modificada a las pólizas con primas brutas y montos de beneficios no uniformes. Los temas que surgen con las indemnizaciones sin pérdida legal para dichas pólizas son similares, pero existen diferencias. La ley de 1980 se refiere a un ***monto promedio de seguro*** (MPS) e indica que este monto está basado en los montos de indemnizaciones al principio de los primeros 10 años de la póliza. Por lo tanto, en la notación del seguro general de la sección 7.4,

$$MPS = \frac{\sum_{j=0}^{9} b_{j+1}}{10}$$

Cuando $n \geq 10$. También una prima neta uniforme es

$$P = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\, v^{j+1}\, {}_{j}p_{x}\, q_{x+j}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (15.2.6)$$

Se incluye un término adicional en el numerador de (15.2.6) si se incluyen indemnizaciones para la dotación pura. La fórmula para la asignación de gastos para el primer año depende de P y de MPS, y se define en la siguiente forma:

$$E_1 = \begin{cases} 1.25P + 0.01MPS & P < 0.04MPS \\ 0.06MPS & P \geq 0.04MPS \end{cases} \tag{15.2.7}$$

La prima ajustada para cualquier año de la póliza es un múltiplo, r_N, de la prima bruta correspondiente para ese año de la póliza en donde

$$r_N = \frac{E_1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j}}{\sum_{j=0}^{h-1} G_j\, v^j\, {}_jp_x}. \tag{15.2.8}$$

El valor en efectivo mínimo está determinado como

$${}_kCV = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} - r_N \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j}\, v^j\, {}_jp_{x+k} \tag{15.2.9}$$

Otra vez aquí, tanto (15.2.8) como (15.2.9) deben modificarse si se proporcionan indemnizaciones para dotación pura.

Ejemplo 15.3:

Calcule los valores en efectivo mínimos para las duraciones 1, 2, 10 y 20 para la póliza de dotación especial a 30 años descrita en el ejemplo 14.6. Use (15.2.7) y (15.2.8) con la Tabla de Vida Ilustrativa y 6% de interés.

Solución:

La indemnización por fallecimiento es de 150,000 para los primeros 20 años y de 100,000 de ahí en adelante. Sin embargo, ya que el MPS se basa en los primeros 10 años de la póliza, $MPS = 150{,}000$. La prima neta uniforme para esta póliza a la edad de expedición 35,es

$$P = \frac{50{,}000(3M_{35} - M_{55} - 2M_{65} + 2D_{65})}{N_{35} - N_{65}}$$
$$= 1{,}622.9358$$

Como

$$P = 1{,}622.94 \le 6{,}000 = 0.04MPS,$$

Luego, de acuerdo con (15.2.7),

$$\begin{aligned} E_1 &= 1.25P + 0.01MPS \\ &= 3{,}528.6698 \end{aligned}$$

Las primas brutas son de 2,500 anuales durante 10 años y de 1,250 anuales para los restantes 20 años. El múltiplo de la prima ajustada r_N, es

$$\begin{aligned} r_N &= \frac{E_1 D_{35} + 50{,}000\left[3M_{35} - M_{55} - 2M_{65} + 2D_{65}\right]}{1{,}250\left[2N_{35} - N_{45} - N_{65}\right]} \\ &= 0.9667466 \end{aligned}$$

Se utilizará la fórmula (15.2.9) para obtener los siguientes valores en efectivo para este contrato.

k	${}_kCV$
1	0.00
2	669.73
10	22,519.81
20	48,776.92

La fórmula (15.2.9) da -1,483.53 para ${}_1CV$, sin embargo, los valores negativos de CV no pueden cobrarse a los tenedores de pólizas que se retiran.

Δ

En esta sección hemos discutido el marco para definir los valores en efectivo mínimos. Componentes importantes son la tasa de interés y la tabla de vida que están especificados. Los cambios del marco general en la historia de la reglamentación de los valores sin pérdida legal, no han sido frecuentes. Los cambios legislativos para actualizar las bases del interés y la mortalidad de los valores en efectivo mínimos se han presentado con mayor frecuencia. La ley de 1980 estipula revisiones de la tasa de interés máxima de acuerdo a una fórmula basada, en parte, en un índice de las tasas de interés promedio prevalecientes durante un periodo de tiempo antes de la expedición de la póliza.

Los valores sin pérdida legal desarrollados en esta sección están disponibles típicamente en efectivo o como indemnizaciones del seguro con el mismo valor presente actuarial. En la sección 15.3 se discutirán estas opciones del seguro. Además, los valores en efectivo conforman la base de otra importante disposición de la póliza, la cláusula de préstamo del seguro. Esta disposición estipula que el asegurador garantizará, un préstamo no mayor que el valor en efectivo, con garantía sobre los valores en efectivo de la póliza. Generalmente, la tasa de interés para dichos préstamos, queda establecida en la póliza. Sin embargo, en respuesta a la volatilidad de las tasas de interés, en los años setenta hubo la tendencia de vincular las tasas de interés de los préstamos sobre la póliza a algún mercado de tasas de interés apropiado al tiempo en que se realiza el préstamo. A la cancelación de la póliza debido al fallecimiento, maduración, o rescate del efectivo, la deuda principal se resta de los créditos.

15.3 Opciones del seguro

La sección 15.2 estuvo dedicada a la definición del valor de las indemnizaciones sin pérdida legal, rigiéndose por el principio establecido en la sección 15.1. Estos valores en efectivo están disponibles como una suma global o como un beneficio de igual valor presente actuarial. A continuación, se discutirán tres beneficios comunes del seguro.

15.3.1 Seguro pagado

Para determinar el monto disminuido del seguro pagado se usa el principio de equivalencia de acuerdo a la estipulación de los beneficios de la póliza. La ecuación general para el monto del seguro pagado, que se representa mediante b_k, es

$$
\begin{aligned}
{}_kCV &= b_k\, A(k) \\
b_k &= \frac{{}_kCV}{A(k)}
\end{aligned}
\qquad (15.3.1)
$$

En donde ${}_kCV$ es el valor en efectivo disponible en el momento en que no se cumple con la prima y $A(k)$ es la prima neta única para una unidad de seguro para los beneficios futuros cubiertos por la póliza en el tiempo k, medidos al momento de la expedición de la póliza. Distintas elaboraciones sobre el símbolo $A(k)$ indican, si son apropiadas, que en la práctica se requiere el

pago continuo de las reclamaciones y varios plazos y beneficios de la dotación.

Para una unidad de seguro y, en el caso especial cuando ${}_kCV = {}_kV$, en donde ${}_kV$ es una reserva para primas netas uniformes, puede reexpresarse (15.3.1) para mayor comprensión. Algunas de estas ideas fueron desarrolladas en relación con (7.3.2) y (7.4.7). En este caso especial, se usa el símbolo ${}_kW = b_k = {}_kV/A(k)$ para representar el monto del seguro pagado. En el cuadro 15.4 se registran algunas de las relaciones entre ${}_kW$ y otras cantidades actuariales. En los ejercicios 15.9 y 15.10 se mencionan relaciones adicionales de este tipo.

Cuadro 15.4

Montos de seguro pagado reducido

Caso Especial ${}_kW = b_k = {}_kV/A(k)$	
Base Totalmente Continúa	Totalmente Discreta
Vida Entera	
${}_k\overline{W}(\overline{A}_x) = \dfrac{\overline{A}_{x+k} - \overline{P}(\overline{A})_x \overline{a}_{x+k}}{\overline{A}_{x+k}}$	${}_kW_x = \dfrac{A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k}}{A_{x+k}}$
$= 1 - \dfrac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\overline{P}(\overline{A}_{x+k})}$	$= 1 - \dfrac{P_x}{P_{x+k}}$
Vida a n pagos $k < n$	
${}_k^{n}\overline{W}(\overline{A}_x) = \dfrac{\overline{A}_{x+k} - {}_n\overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{\overline{A}_{x+k}}$	${}_k^{n}W_x = \dfrac{A_{x+k} - {}_nP_x\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{A_{x+k}}$
$= 1 - \dfrac{{}_n\overline{P}(\overline{A}_x)}{{}_{n-k}\overline{P}(\overline{A}_{x+k})}$	$= 1 - \dfrac{{}_nP_x}{{}_{n-k}P_{x+k}}$
Dotal a n años $k < n$	
${}_k\overline{W}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \dfrac{\overline{A}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - \overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil})\overline{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{\overline{A}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}$	${}_kW_{x:\overline{n}\rceil} = \dfrac{A_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - P_{x:\overline{n}\rceil}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{A_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}$
$= 1 - \dfrac{\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil})}{\overline{P}(\overline{A}_{x+k:\overline{n-k}\rceil})}$	$= 1 - \dfrac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{P_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}$

Existe un argumento de razonamiento general que conduce a los resultados del cuadro 15.4. A la edad $x+k$ la prima neta anual para un seguro de vida entera es P_{x+k}. Por lo tanto una prima anual de P_x pagadera comenzando a la edad $x+k$, será suficiente para proveer un seguro de sólo P_x/P_{x+k}. Como P_x es la prima neta que se está pagando realmente por una unidad de seguro, la diferencia en el tiempo k, $1-P_x/P_{x+k}$, debe proveerse mediante la reserva. Este razonamiento puede aplicarse a los otros seguros.

15.3.2 Plazo ampliado (Seguro Prorrogado)

Se utiliza el principio de equivalencia para determinar el tamaño del plazo del seguro pagado para el monto total de la póliza. La ecuación a resolver para s, en relación con un seguro con un monto unitario, es

$$ {}_kCV = \bar{A}^{1}_{\overline{x+k:s}|} \tag{15.3.2} $$

En la práctica, se determina s en días mediante interpolación lineal al día más próximo.

En el caso de un seguro dotal, puede suceder que $s > n-k$, el tiempo restante para la maduración. En ese caso el monto de valores en efectivo no utilizados para comprar un seguro temporal pagado se utiliza para comprar una dotación pura por el monto de

$$ \frac{{}_kCV = \bar{A}^{1}_{\overline{x+k:n-k}|}}{A^{1}_{\overline{x+k:n-k}|}} \tag{15.3.3} $$

Si una póliza de monto b está sujeta a un préstamo principal de la póliza de monto L al momento en que se deja de pagar la prima, las pólizas de seguro usualmente estipulan que el seguro de plazo ampliado será por el monto $b-L$. Sin esta disposición un tenedor de póliza con un préstamo sobre la póliza de monto L y una indemnización corriente por fallecimiento de $b-L$ podría, debido a la falta de prima, incrementar el monto del seguro b. En el caso de un préstamo sobre la póliza de monto L, (15.3.2) se modifica en la siguiente forma

$$ b\ {}_kCV - L = (b-L)\bar{A}^{1}_{\overline{x+k:s}|} $$

15.3.3 Préstamo automático sobre la prima

Algunas personas no clasificarían a la disposición del préstamo automático sobre la prima, que aparece en algunas pólizas de seguros de vida, como una indemnización sin pérdida legal. Esta disposición mantiene la póliza en vigencia total, si ocurre la falta de pago de la prima, durante el tiempo en que el valor en efectivo sea mayor que el balance del préstamo sobre la póliza, que será creciente debido al interés de las primas no pagadas añadido al balance. Por falta de pago en el tiempo k, de una póliza con una base de pago continuo por un monto unitario, el tamaño máximo del periodo de préstamo sobre la prima se determinará resolviendo

$$G\,\bar{s}_{\overline{t}|i} = {}_{k+t}CV \tag{15.3.4}$$

Para t. En (15.3.4),

- G es la prima bruta por unidad de seguro,
- ${}_{k+t}CV$ es el valor en efectivo por unidad de seguro
- i es la tasa de interés del préstamo sobre la póliza.

En la práctica, t algunas veces se toma como un entero tal que

$$G\,\ddot{s}_{\overline{t}|i} \le {}_{k+t}CV$$

y

$$G\,\ddot{s}_{\overline{t+1}|i} > {}_{k+t+1}CV$$

El valor en efectivo remanente, ${}_{k+t}CV - G\,\ddot{s}_{\overline{t}|i}$ se usa para comprar un seguro de plazo ampliado.

Ejemplo 15.4

Un seguro de vida entera totalmente continuo con monto unitario, expedido a edad (x), se permuta por un beneficio sin pérdida legal al final de k años.

a) Si ${}_kCV = {}_k\bar{V}(\bar{A}_x)$, expresa la relación de la varianza de la pérdida futura asociada con el seguro permutado, inmediatamente después del cambio, para los seguros

   i) Seguro pagado
   ii) Seguro de plazo ampliado

¿Cuál es el beneficio sin pérdida legal con respecto a la varianza de la pérdida futura a la duración k sobre el seguro original?

b) Si $x = 35$ y $k = 10$, calcule los cocientes de las partes [a.(i)] y [a.(ii)] con base en la Tabla Ilustrativa de Vida e interés al 6%. (Véanse los ejercicios 6.7 y 7.13)

Solución:

a. (i) Por (7.2.4) la varianza antes del cambio es

$$\left(1+\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right)^2\left[{}^2\overline{A}_{x+k}-(\overline{A}_{x+k})^2\right]=\frac{{}^2\overline{A}_{x+k}-(\overline{A}_{x+k})^2}{(1-\overline{A}_x)^2}$$

Para el seguro pagado, recordamos la definición de U en la sección 7.2 y consideramos a la pérdida

$${}_k\overline{W}(\overline{A}_x)v^U-{}_k\overline{V}(\overline{A}_x)$$

Que tiene una varianza

$$\left[{}_k\overline{W}(\overline{A}_x)\right]^2\left[{}^2\overline{A}_{x+k}-(\overline{A}_{x+k})^2\right]$$

La relación de esto con la varianza antes del cambio es

$$\left[{}_k\overline{W}(\overline{A}_x)\right]^2(1-\overline{A}_x)^2$$

Que es menor que 1.

ii) En el caso del seguro de plazo ampliado, tenemos de (15.3.2) y (4.2.5) donde la varianza antes del cambio es

$${}^2\overline{A}^{\,1}_{\overline{x+k:\overline{n}|}}-\left(\overline{A}^{\,1}_{\overline{x+k:\overline{n}|}}\right)^2$$

Ahora el cociente de las varianzas es

$$\frac{\left[{}^2\overline{A}^{\,1}_{\overline{x+k:\overline{n}|}}-\left(\overline{A}^{\,1}_{\overline{x+k:\overline{n}|}}\right)^2\right](1-\overline{A}_x)^2}{{}^2\overline{A}_{x+k}-(\overline{A}_{x+k})^2}$$

b. (i) $_{10}\overline{W}(\overline{A}_{35}) = {}_{10}\overline{V}(\overline{A}_{35}) / \overline{A}_{45} = 0.08604/0.20718 = 0.41529$

$\overline{A}_{35} = 0.13254$

$\left[0.41529(1-0.13254)\right]^2 = 0.13$

Es decir, la varianza de la pérdida sobre el seguro pagado es 13% de la varianza de la pérdida a la duración 10 sobre el seguro original.

(ii) $$_{10}\overline{V}(\overline{A}_{35}) = 0.08604 = \frac{(i/\delta)(M_{45} - M_{45+s})}{D_{45}}$$

Obteniendo un valor de s entre 19 y 20. Con $s = 19$,

$$\frac{{}^2\overline{A}^1_{45:\overline{19}|} - \left(\overline{A}^1_{45:\overline{19}|}\right)^2}{{}^2\overline{A}_{45} - \left(\overline{A}_{45}\right)^2}\left(1-\overline{A}_{35}\right)^2 = \frac{0.04308}{0.02922}(0.86746)^2 = 1.11$$

Ya que s está entre 19 y 20, la varianza se incrementará aproximadamente a 111% de lo que era anteriormente.

15.4 Participación en los activos

Una póliza de seguro de vida es un contrato de largo plazo que involucra un ingreso para el asegurador proveniente de las primas y de las inversiones y una salida como resultado del fallecimiento y pagos de beneficios por retiro y gastos. Las primas brutas con recargo real por una unidad de seguro están influidas por la competencia y los valores sin pérdida legal están influidos por la ley y la competencia. Es necesario realizar un cálculo del balance, en el sentido de valores presentes actuariales, entre los diversos elementos de la estructura de precio-beneficio. El cálculo de la participación en los activos, que se esboza en esta sección, está diseñado para cubrir esa necesidad. No se trata de un resumen histórico de resultados del pasado, sino que es un cálculo prospectivo de alguna complejidad que intenta capturar la mayor parte de los elementos que influyen el progreso financiero esperado de un grupo de pólizas.

Empezaremos con una elaboración de (14.5.5) para una unidad de seguro,

$$\begin{aligned} {}_{k+1}AS\,p^{(\tau)}_{x+k} &= \left[{}_kAS + G(1-c_k) - e_k\right](1+i) \\ &\quad - q^{(1)}_{x+k} - q^{(2)}_{x+k}\,{}_{k+1}CV \qquad k = 0,1,2,3,... \end{aligned} \tag{15.4.1}$$

donde

${}_kAS$ Representa la participación en los activos esperados k años después de la expedición de la póliza, inmediatamente antes del inicio del año $k+1$ de la póliza,

G Representa la prima bruta,

c_k Representa la fracción de la prima bruta pagada en el tiempo k para gastos,

e_k Representa el monto de los gastos por póliza pagados en el tiempo k,

$q_{x+k}^{(1)}$ Representa la probabilidad de decremento por fallecimiento, antes de alcanzar la edad $x+k+1$, de un asegurado con edad actual $x+k$,

$q_{x+k}^{(2)}$ Representa la probabilidad de decremento por retiro, antes de alcanzar la edad $x+k+1$, de un asegurado con edad actual $x+k$.

La fórmula (15.4.1) se basa en los supuestos de base de pago totalmente discreta, las reclamaciones unitarias por fallecimiento se pagarán al final del año del fallecimiento, y los valores en efectivo de ${}_kCV$ pagados al final del año de retiro.

La fórmula (15.4.1) es una generalización obvia de la relación recurrente que vincula reservas finales sucesivas. Se rescribirá en varias formas que son reminiscencias de manipulaciones similares con las ecuaciones para reservas.

Multiplicando (15.4.1) por $v^{k+1}\ l_{x+k}^{(\tau)}$ produce

$$\Delta\left[l_{x+k}^{(\tau)}\ v^k\ {}_kAS\right] = \left[G(1-c_k)-e_k\right]l_{x+k}^{(\tau)}\ v^k - \left[d_{x+k}^{(1)} + d_{x+k}^{(2)}\ {}_{k+1}CV\right]v^{k+1} \tag{15.4.2}$$

Luego,

$$l_{x+k}^{(\tau)}\ v^k\ {}_kAS\Big|_0^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left[G(1-c_k)-e_k\right]l_{x+k}^{(\tau)}\ v^k - \left[d_{x+k}^{(1)} + d_{x+k}^{(2)}\ {}_{k+1}CV\right]v^{k+1}\right\} \tag{15.4.3}$$

y, si ${}_0AS = 0$, tenemos ${}_nAS$ igual a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[G(1-c_k)-e_k\right]l_{x+k}^{(\tau)}(1+i)^{n-k} - \left[d_{x+k}^{(1)} + d_{x+k\ k+1}^{(2)}CV\right](1+i)^{n-k-1}}{l_{x+n}^{(\tau)}} \tag{15.4.4}$$

También, estableciendo $n = \omega - x$ en (15.4.3) y reacomodando términos, se obtiene

$$G\,\ddot{a}_x^{(\tau)} = A_x^{(1)} + \sum_{k=0}^{\omega-x-1}[G\,c_k + e_k]v^k\,{}_kp_x^{(\tau)} + \sum_{k=0}^{\omega-x-1}{}_kp_x^{(\tau)}\,q_{x+k}^{(2)}\,v^{k+1}\,{}_{k+1}CV \tag{15.4.5}$$

Utilizando el principio de equivalencia la fórmula (15.4.5) puede interpretarse como una fórmula general para una prima con recargo por gastos. Las modificaciones apropiadas pueden alterar la fórmula de un seguro de vida entera a una póliza de dotación o a plazos.

$$p_{x+k}^{(\tau)} = 1 - q_{x+k}^{(1)} - q_{x+k}^{(2)} \tag{15.4.6}$$

Haciendo la sustitución nos permite reescribir (15.4.1) como

$$\begin{aligned} {}_{k+1}AS = &\left[{}_kAS + G(1-c_k) - e_k\right](1+i) - q_{x+k}^{(1)}(1 - {}_{k+1}AS) \\ &- q_{x+k}^{(2)}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}AS) \end{aligned} \tag{15.4.6}$$

Esta forma enfatiza la importancia de la diferencia, ${}_{k+1}CV - {}_{k+1}AS$, en la progresión de la participación en los activos.

El cálculo de la participación en los activos puede verse como un seguimiento del progreso esperado de los activos, por póliza sobreviviente, de un conjunto de pólizas similares. Los cálculos de las primas brutas fijas, las obligaciones de gastos y los valores en efectivo pueden hacerse para verificar el balance entre los distintos componentes de la estructura de precio-beneficio. El objetivo de los cálculos podrá ser determinar si ${}_kAS \geq {}_kV$, para todos los años de la póliza excepto los primeros.

Una aplicación alternativa del cálculo de la participación en los activos será determinar G. En esta aplicación, podrá establecerse, una meta de la participación en los activos, por ejemplo, como $K >_{20} V$. Si ya se hubiesen fijado las obligaciones de gastos y de valores en efectivo, se podrá utilizar

(15.4.4) para determinar G. Selecciónese arbitrariamente un valor de ensayo para la prima bruta, representado por H. Sea ${}_{20}AS_1$ el resultado de utilizar (15.4.4) con esa H y con $n=20$; sea K el resultado utilizando la prima deseada G y $n=20$. Entonces

$$K - {}_{20}AS_1 = \sum_{k=0}^{19} \frac{(G-H)(1-c_k)\, l_{x+k}^{(\tau)}\, (1+i)^{20-k}}{l_{x+20}^{(\tau)}}$$

y la prima bruta deseada G se encuentra mediante

$$G = H + \frac{(K - {}_{20}AS_1)\ {}_{20}p_x^{(\tau)}\ v^{20}}{\sum_{k=0}^{19}(1-c_k)\ {}_{k}p_x^{(\tau)}\ v^{k}} \qquad (15.4.7)$$

El efecto del segundo término en (15.4.7) es producir una corrección a la prima H, que resultará en la meta de la participación en los activos, K, que se deseaba lograr.

Los cálculos de la participación en los activos pueden ser mucho más refinados que lo que se indicó en esta sección. Por ejemplo, si las reclamaciones por fallecimiento se pagan al momento del mismo, el término $q_{x+k}^{(1)}$ en (15.4.1) podrá multiplicarse por i/δ. También se pueden hacer ajustes para el pago de las primas a intervalos diferentes del anual.

Ejemplo 15.5:

Compare la participación en los activos para el ejemplo de la sección 14.2, suponiendo ${}_{k}CV = 1{,}000\,{}_{k}V_{\overline{x:\overline{3}|}} - 10$, $k=1,2$, ${}_{3}CV = 1{,}000$ y la siguiente tabla de decremento doble

k	$p_{x+k}^{(\tau)}$	$q_{x+k}^{(\tau)}$	$q_{x+k}^{(1)}$	$q_{x+k}^{(2)}$
0	0.54	0.46	0.08	0.38
1	0.62	0.38	0.09	0.29
2	0.50	0.50	0.50	0.00

Solución:

Utilizamos (15.4.1) como nuestro modelo.

k	$\{[{}_kAS + G(1-c_k) - e_k](1+i) - 1{,}000\, q^{(1)}_{x+k} - {}_{k+1}CV\, q^{(2)}_{x+k}\} / p^{(\tau)}_{x+k} = {}_{k+1}AS$
0	$\{[0.00 + 332.35(0.80) - 8](1.15) - 80 - (247.41)(0.38)\} / 0.54 = 226.94$
1	$\{[226.94 + 332.35(0.94) - 2](1.15) - 90 - (571.16)(0.29)\} / 0.62 = 584.38$
2	$\{[584.38 + 332.35(0.94) - 2](1.15) - 500 - (1{,}000)(0.00)\} / 0.50 = 1{,}058.01$

En este ejemplo la participación en los activos final, 1058.01, es mayor que la reserva terminal final de 1,000.

15.5 Ajustes derivados de la experiencia

El conjunto de participaciones en los activos como fue computada utilizando (15.4.1), antes de que el conjunto de pólizas sea expedido, casi seguramente no será igual a los activos por sobreviviente asegurado desarrollado por la experiencia. Sin embargo, las fórmulas de la sección 15.4 pueden utilizarse para obtener mayores conocimientos de las fuentes de pérdidas o ganancias financieras, medidas con respecto a los resultados esperados. Suponga que trazamos el progreso de ${}_kAS$ a ${}_{k+1}\widehat{AS}$ en donde el acento circunflejo (sombrero) indica que la participación en los activos $k+1$ se deriva de la k-ésima participación en los activos esperando usar los factores de costos derivados de la experiencia. Un factor de costo basado en la experiencia tendrá añadido un sombrero. Más específicamente, $\hat{i}_{k+1}$ es la tasa de interés derivada de la experiencia ganada en el año de la póliza $k+1$. La participación en los activos derivada de la experiencia estará dada por

$$\begin{aligned} {}_{k+1}\widehat{AS} = [{}_kAS + G(1-\hat{c}_k) - \hat{e}_k](1+\hat{i}_{k+1}) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}\widehat{AS}) \\ - \hat{q}^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}\widehat{AS}) \end{aligned} \qquad (15.5.1)$$

Restando (15.4.6), que rastra el progreso esperado de la participación en los activos, de (15.5.1) produce

$$
\begin{aligned}
a.\ & {}_{k+1}\widehat{AS} - {}_{k+1}AS = ({}_kAS + G)(\hat{i}_{k+1} - i) \\
b.\ & + \left[(Gc_k + e_k)(1+i) - (G\hat{c}_k + \hat{e}_k)(1+\hat{i}_{k+1}) \right] \\
c.\ & + \left[q^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}AS) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}\widehat{AS} \right] \\
d.\ & + \left[q^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}AS) - \hat{q}^{(2)}_{x+k}\left({}_{k+1}CV - {}_{k+1}\widehat{AS}\right) \right]
\end{aligned}
\qquad (15.5.2)
$$

En (15.5.2) la desviación total entre la participación en los activos derivada de la experiencia y la esperada se han dividido en cuatro componentes. El componente (a) estará asociado con la desviación entre las tasas de interés derivadas de la experiencia y las supuestas. El (b) es la diferencia entre los gastos derivados de la experiencia y los esperados, con un ajuste de interés. El (c) es la diferencia entre los costos por mortalidad supuestos y los derivados de la experiencia y el (d) es la diferencia entre los costos por retiro supuestos y los derivados de la experiencia.

La participación en el seguro de vida se basa sobre el principio de que las primas se establecen a un nivel tal que es muy baja la probabilidad de que las primas y el ingreso de inversión asociado resulten insuficientes para cumplir las obligaciones por gastos y beneficios implícitos al expedir un conjunto de pólizas. Con este principio, que puede considerarse como una alternativa de equivalencia, el valor esperado de la variable pérdidas deberá ser negativo para generar márgenes financieros que provean para desviaciones en experiencia desfavorable al sistema de seguros. A medida que la incertidumbre acerca de la experiencia es eliminada por el paso del tiempo, los márgenes para desviaciones adversas construidos en la estructura original de precio-beneficio pueden relajarse y regresarse a los tenedores de pólizas quienes, a través de primas mayores, corrieron con los riesgos. Estos reembolsos de fondos no necesitados para equiparar los riesgos futuros se denominan ***dividendos***. Frecuentemente se utiliza una versión simplificada de (15.5.2) en el análisis que conduce a la determinación de los dividendos.

Empezamos con una modificación de (15.4.6). En este desarrollo ${}_kF$ tomará el lugar de ${}_kAS$. El nuevo símbolo representa una participación en los fondos que ya no es una consecuencia de la operación esperada del sistema de seguros. En su lugar, los valores de ${}_kF$ son cantidades, establecidas con anticipación, en tal forma que, con el ingreso de las primas futuras y de la

inversión, el conjunto de las pólizas bajo consideración tiene una probabilidad más alta de cumplir sus obligaciones de beneficios y gastos. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
{}_{k+1}F = &\left[{}_kF + G(1-c_k) - e_k\right](1+i) - q^{(1)}_{x+k}({}_{1-k+1}F) \\
&- q^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F)
\end{aligned}
\tag{15.5.3}
$$

En (15.5.3), $c_k, e_k, q^{(1)}_{x+k}$, y $q^{(2)}_{x+k}$ típicamente están establecidos a niveles más altos que los esperados, e i se establece a un nivel un poco menor que el esperado para poder proporcionar márgenes que cubran desviaciones adversas. Estos márgenes tienen como resultado una probabilidad menor de recurrir a fondos externos.

La fórmula (15.5.4) describe el progreso de la participación en los fondos para una unidad de seguro en donde los factores de costo derivados de la experiencia se representan con acentos circunflejos.

Es decir,

$$
\begin{aligned}
{}_{k+1}F + {}_{k+1}D = &\left[{}_kF + G(1-\hat{c}_k) - \hat{e}_k\right](1+\hat{l}_{k+1}) \\
&- \hat{q}^{(1)}_{x+k}({}_{1-k+1}F - {}_{k+1}D) \\
&- \hat{q}^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F - {}_{k+1}D)
\end{aligned}
\tag{15.5.4}
$$

En (15.5.4) el dividendo estará representado por ${}_{k+1}D$ y es la diferencia entre la meta de ${}_{k+1}F$ predeterminada y la participación en los fondos generada por la experiencia. Restando (15.5.3) de (15.5.4) se obtiene

$$
\begin{aligned}
a.\ & {}_{k+1}D = ({}_kF + G)(\hat{l}_{k+1} - i) \\
b.\ & \quad + \left[\left(Gc_k + e_k\right)(1+i) - (G\hat{c}_k + \hat{e}_k)(1+\hat{l}_{k+1})\right] \\
c.\ & \quad + ({}_{1-k+1}F)(q^{(1)}_{x+k} - \hat{q}^{(1)}_{x+k}) \\
d.\ & \quad + ({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F)(q^{(2)}_{x+k} - \hat{q}^{(2)}_{x+k}) \\
e.\ & \quad + {}_{k+1}D(\hat{q}^{(1)}_{x+k} + \hat{q}^{(2)}_{x+k})
\end{aligned}
\tag{15.5.5}
$$

Los componentes de (15.5.5) pueden identificarse con los factores derivados de la experiencia que determinan su tamaño. Así, (a) se asocia con el interés, (b) con los gastos, (c) con la mortalidad, (d) con las terminaciones voluntarias

y (e) con el pago de dividendos sólo a los sobrevivientes. Si ${}_{k+1}CV = {}_{k+1}F$ y los dividendos se pagan a los asegurados que murieron o se retiraron y, si $Gc_k + e_k$, se representa por E_k, mientras $G\hat{c}_k + \hat{e}_k$ es denotado por $\hat{E}_k$, entonces (15.5.5) puede reescribirse en una expresión de tres términos,

$$\begin{aligned} {}_{k+1}D = ({}_kF + G)(\hat{i}_{k+1} - i) \\ + \left[E_k(1+i) - \hat{E}_k(1+\hat{i}_{k+1}) \right] \\ + (1 - {}_{k+1}F)(q^{(1)}_{x+k} + \hat{q}^{(1)}_{x+k}) \end{aligned} \tag{15.5.6}$$

15.6 Supuestos y Reservas

En los capítulos precedentes, hemos discutido la variación en los resultados esperados como una consecuencia de la inclusión de las variables aleatorias en los modelos. En la sección 15.5, se analizará un segundo tipo de variación para identificar cada componente fuente de desviación, específicamente, la que se da entre la experiencia real y la experiencia esperada para la participación en los fondos. El proceso se ejemplificará mediante diferentes modelos en (15.5.2), (15.5.5) y (15.5.6). En esta sección, se realiza un tipo de análisis muy relacionado con las ecuaciones recurrentes que relacionan reservas sucesivas con dos diferentes conjuntos de supuestos actuariales. En consecuencia, observaremos un tercer tipo de variación, denominada la variación en los resultados esperados como consecuencia de supuestos diferentes. La meta del análisis que se realiza en esta sección es obtener conocimientos más profundos sobre el tamaño relativo de las reservas.

Presentaremos la teoría de este análisis en términos de un seguro a n años con

- suma asegurada de 1 pagadera al final del año del fallecimiento,
- primas uniformes P al principio de cada año mientras que el asegurado, (x), sobreviva, y
- la reserva, en cualesquier base utilizada, es igual a W al final de m años, $m \leq n$. En la mayoría de los casos, m puede tomarse como igual a n, pero algunas veces el caso $m = n$ deberá ser una excepción.

Dejemos que P y ${}_hV$ representen la prima neta uniforme y la reserva terminal al final de h años sobre una base de tasa de interés i y tasas de mortalidad q_h (abreviatura de q_{x+h}). También, deje que P' y ${}_hV'$ representen, las correspondientes prima neta y reserva sobre una segunda base con tasa de interés i' y tasas de mortalidad q'_h. Por (7.8.5) podemos escribir, con respecto al año de la póliza $h+1$, que

$$({}_hV + P)(1+i) = {}_{h+1}V + q_h(1 - {}_{h+1}V) \tag{15.6.1}$$

y

$$({}_hV' + P')(1+i') = {}_{h+1}V' + q'_h(1 - {}_{h+1}V') \tag{15.6.2}$$

Establecemos ${}_hV' = {}_hV + R_h$ y reacomodamos (15.6.2) como

$$\begin{aligned}({}_hV + P + R_h + P' - P)(1+i') = {}_{h+1}V + R_{h+1} \\ + q'_h(1 - {}_{h+1}V - R_{h+1})\end{aligned} \tag{15.6.3}$$

Después de restar (15.6.1) de (15.6.3) y, juntando los términos que involucren la función R_h en el lado derecho, obtenemos

$$\begin{aligned}({}_hV + P)(i' - i) + (P' - P)(1+i') \\ - (q'_h - q_h)(1 - {}_{h+1}V) = p'_h\ R_{h+1} - R_h(1+i')\end{aligned} \tag{15.6.4}$$

Estos pasos son similares a aquellos que se siguieron al restar (15.5.3) de (15.5.4) para obtener la desviación entre un objetivo del fondo y el fondo alcanzado como resultado de la experiencia.

El lado izquierdo de la ecuación (15.6.4) se representará mediante S_h y la expresión $[({}_hV + P)(i' - i) - (q'_h - q_h)(1 - {}_{h+1}V)]$ mediante c_h. El término $[(P' - P)(1+i')]$ es independiente de h, pero c_h, llamado la ***función crítica***, puede variar con h. Si $i' > i$ y $q'_h > q_h$, entonces la función crítica consiste de interés en exceso sobre la reserva inicial, ${}_hV + P$, menos el costo de la mortalidad en exceso basado en el monto neto al riesgo, $1 - {}_{h+1}V$, en donde en ambas instancias las reservas se establecen con respecto a la primera base con tasa de interés i y tasas de mortalidad q_h.

Con esta notación, (15.6.4) se transforma en

$$S_h = P'_h \; R_{h+1} - R_h(1+i') \tag{15.6.5}$$

Que es una ecuación diferencial lineal para la función diferencial de las reservas, $R_h = {}_hV' - {}_hV$. Además, tenemos $R_0 = {}_0V' - {}_0V = 0$ y $R_m = W - W = 0$. Si multiplicamos toda la expresión (15.6.5) por D'_h (D_{x+h} basado en las tasas i' y q'), obtenemos

$$D'_h \, S_h = (1+i')\left[D'_{h+1} \, R_{h+1} - D'_h \, R_h \right] \tag{15.6.6}$$

Luego

$$\sum_{h=0}^{k-1} D'_h \, S_h = (1+i') D'_k \, R_k$$

Por lo que

$$R_k = v' \, \frac{\sum_{h=0}^{k-1} D'_h \, S_h}{D'_k} \tag{15.6.7}$$

y

$$R_m = 0 = v' \, \frac{\sum_{h=0}^{m-1} D'_h \, S_h}{D'_m} \tag{15.6.8}$$

Si S_h es una constante S, entonces de (15.6.8) $S = 0$. Se sigue de (15.6.7) que $R_k = 0$; es decir, ${}_kV' = {}_kV$, $k = 0,1,2,\ldots,m$. En este caso,

$$\begin{aligned} S_h = 0 &= \left[({}_hV + P)(i' - i) - (q'_h - q_h)(1 - {}_{x+1}V) \right] \\ &\quad + (P' - P)(1+i') \\ &= c_h + (P' - P)(1+i') \end{aligned} \tag{15.6.9}$$

es conocida como la ***ecuación de equilibrio*** para las reservas sobre las dos bases. Aquí la función crítica c_h es constante e igual a $[(P'-P)(1+i')]$, la diferencia de primas acumulada para un año a la tasa de interés i'. En otras palabras, cada año el interés en exceso menos el costo de mortalidad en exceso se equilibran mediante la diferencia de las primas constantes y las reservas permanecen iguales sobre las dos bases.

En todos lo casos, la ecuación (15.6.7) muestra la diferencia de reservas R_k como el valor acumulado actuarial del S_h año por año, $h=0,1,2,...,k-1$, veces v'. Si existe alguna información disponible acerca de S_h (generalmente a partir del examen de la función crítica c_h), entonces uno puede hacer declaraciones acerca de la diferencia de las reservas R_h.

Si S_h disminuye a medida que h aumenta (representado por $S_h\downarrow$), entonces las gráficas de S_h y R_k (continuas más que discretas) tienen la forma que se dibuja en la figura 15.1.

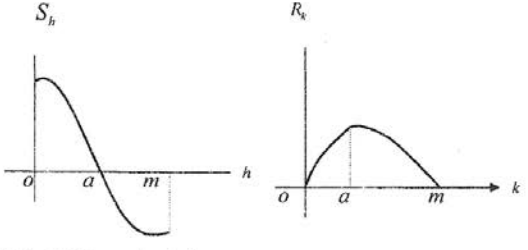


Figura 15.1 Gráficas de $S_h\downarrow$ y

Aquí S_h debe empezar siendo positiva y descender a valores negativos si se satisface (15.6.8). En realidad, no necesitamos estrictamente, que S_h sea decreciente, es suficiente si S_h empieza siendo positiva y más tarde llega a ser negativa y permanece ahí. Mientras que S_h es positiva, R_k aumentará; pero cuando S_h llega a ser negativa, R_k disminuirá como se indica en la figura 15.1. Sin embargo, R_k no puede llegar a ser negativa en cualquier punto

porque con $S_h \downarrow, R_k$ no podrá recuperarse para producir $R_m = 0$. Por lo tanto $R_k > 0$, y ${}_kV'$ excede ${}_kV$ para $k = 1,2,...,m-1$.

Si, al contrario, S_n aumenta a medida que h se incrementa (representada por $S_h \uparrow$), entonces las gráficas de S_h y R_k tienen la forma que se dibuja en la figura 15.2.

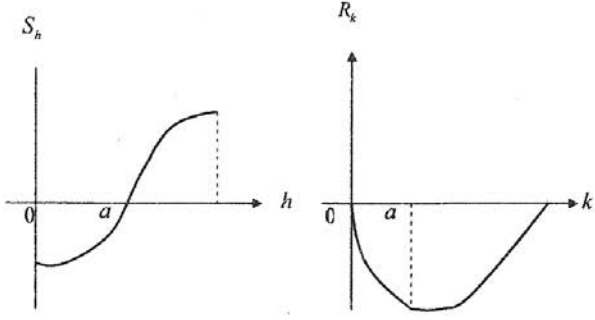


Figura 15.2 Gráficas de $S_h \uparrow$ y R_k

Aquí S_h debe empezar siendo negativa y más tarde llegar a ser positiva y permanecer ahí. Entonces $R_k < 0$ y ${}_kV'$ es menor que ${}_kV$ para $k = 1,2,...,m-1$.

En las aplicaciones, es conveniente reemplazar las condiciones $S_h \downarrow$ y $S_h \uparrow$ por las condiciones equivalentes $c_h \downarrow$ y $c_h \uparrow$. Los anteriores resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 15.1:

Sea

$$c_h = ({}_hV + P)(i' - i) - (q'_h - q_h)(1 - {}_{h+1}V) \qquad 0 \le h < m$$

la función crítica.

Para un seguro a n-años con suma asegurada de una unidad monetaria pagadera al final del año del fallecimiento, con primas anuales uniformes pagaderas durante todos los n años y con reserva W al final de los m años, con $m \le n$, donde

- P y ${}_hV$ representan la prima neta uniforme y la reserva terminal al final de h años sobre una base con tasa de interés i y tasas de mortalidad q_h y
- P' y ${}_hV'$ representen las correspondientes primas netas y reservas sobre una segunda base con tasa de interés i' y tasas de mortalidad q'_h

Entonces si c_h disminuye (aumenta) a medida que h aumenta, las reservas ${}_kV'$ exceden (son menores que) las reservas ${}_kV$ para k entero, $0 < k < m$. Si c_h es constante, las reservas ${}_kV'$ son iguales a las reservas ${}_kV$ para k entero, $0 \le k \le m$.

Si la segunda base difiere de la primera sólo respecto al supuesto de la tasa de interés, por ejemplo, $i' = i + e$, siendo e una constante > 0, y si ${}_hV \uparrow$, entonces $c_h \uparrow$, ya que aquí

$$c_h = ({}_hV + P)e$$

Esto da el siguiente resultado.

Corolario 15.1:

Siempre que las reservas se incrementen con la duración, un incremento constante en la tasa de interés produce una disminución en las reservas en las duraciones k, $0<k<n$, para el seguro descrito en el Teorema 15.1 (con $m=n$).

Si la segunda base tiene la misma tasa de interés que la primera base, $q'_h = q_h + e$, con $e>0$, entonces

$$c_h = -e(1-{}_{h+1}V)$$

si ${}_hV \uparrow$, entonces $c_h \uparrow$ y la aplicación del Teorema 15.1 da el siguiente resultado.

Corolario 15.2:

Siempre que las reservas aumenten con la duración, un incremento constante en las tasas de mortalidad produce disminuciones en las reservas en las duraciones k, $0<k<n$, para el seguro descrito en el Teorema 15.1 (con $m=n$).

Para considerar el efecto de una disminución constante en la tasa de interés o en las tasas de mortalidad, se pueden, simplemente, intercambiar los papeles de ${}_hV$ y ${}_hV'$.

En seguida consideraremos, si $i'=i$, la relación entre q'_h y q_h en tal forma que ${}_kV'={}_kV$, $0\le k\le m$. Necesitamos que

$$S_h=(P'-P)(1+i)-(q'_h-q_h)(1-{}_{h+1}V)=0, \qquad 0\le h<m \tag{15.6.10}$$

En el caso de los seguros dotales unitarios, si ${}_{n-1}V'={}_{n-1}V$, entonces

$${}_{n-1}V'+P'=v={}_{n-1}V+P$$

implica que $P'=P$. Para evitar este caso trivial, supondremos $m\le n-2$, y de (15.6.10) podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 15.3.:

Si $i' = i$, entonces una condición necesaria para ${}_kV' = {}_kV$, $0 \le k \le m$, para el seguro descrito en el Teorema 15.1 (con $m \le n-2$) es

$$q'_h = q_h + \frac{P' - P}{v(1 - {}_{h+1}V)} \qquad 0 \le h < m \tag{15.6.11}$$

Inversamente, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 15.4:

Si $i' = i$, y si para una constante Δ

$$q'_h = q_h + \frac{\Delta}{v(1 - {}_{h+1}V)} \qquad 0 \le h < m,\ m \le n-2 \tag{15.6.12}$$

Entonces $P + \Delta$ es la prima neta anual (basado en las tasas de mortalidad q'_h), la que, para los primeros m años de la póliza, proporciona los beneficios del seguro del Teorema 15.1 y mantiene las reservas iguales a ${}_kV$, $0 \le k \le m$.

Demostración

Al escribir (15.6.12) en la siguiente forma

$$q'_h = q_h + \frac{P + \Delta - P}{v(1 - {}_{h+1}V)}$$

y reacomodando, obtenemos

$$P + \Delta - v\, q'_h (1 - {}_{h+1}V) = P - v\, q_h (1 - {}_{h+1}V) = v\ {}_{h+1}V - {}_hV$$

por (7.8.6). Luego

$$P + \Delta = v\, q'_h (1 - {}_{h+1}V) + v\, {}_{h+1}V - {}_hV \tag{15.6.13}$$

Es decir, $P+\Delta$ es el monto anual uniforme que, con base en las tasas de mortalidad q'_h, proporcionará un seguro temporal de un año para el monto neto a riesgo (si las reservas se mantienen como ${}_kV$) y los depósitos anuales requeridos para construir las reservas ${}_kV$ con base en un fondo de ahorros. En el año $h+1$, el monto neto a riesgo $1-{}_{h+1}V$ más la reserva ${}_{h+1}V$ proporciona la suma asegurada total unitaria. Por tanto $P+\Delta$ proporciona los beneficios del seguro del Teorema 15.1 y mantiene las reservas iguales a ${}_kV$, $0 \le k \le m$, lo que comprueba la declaración del corolario 15.4

Los corolarios 15.3 y 15.4 se aplican a los seguros de vida entera siempre que $m \le \omega - x - 2$.

En algunos casos, la teoría puede ser útil para la comparación de primas netas uniformes sobre dos bases. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.6:

Si $q'_h = q_h$, pero $i' < i$, demuestre que para un seguro dotal a n años

$$P + d - d' > P' > P\frac{v'}{v}$$

Solución:

Aquí

$$S_h = ({}_hV + P)(i' - i) + (P' - P)(1 + i'),$$

Por lo que $S_h \downarrow$, y por tanto $S_0 > 0$. Esto da

$$P(i' - i) + (P' - P)(1 + i') > 0$$
$$P'\ (1 + i') > P(1 + i)$$

o

$$P' > P\frac{v'}{v}$$

De $S_{n-1} < 0$, y notando que ${}_{n-1}V + P = v$, obtenemos

$$v(i' - i) + (P' - P)(1 + i') < 0$$

o

$$P' < P + (i - i')v\ v' = P + d + d'$$

Esta última desigualdad pudo haberse obtenido directamente al notar que

$$P' = \frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - d'$$

$$P = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$$

$$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} > \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

15.7 Notas y referencias

El resultado establecido en la sección 15.1, concerniente al impacto neutro sobre las primas y reservas cuando se introduce un beneficio de retiro igual a la reserva sobre la indemnización por fallecimiento, no es válido para los seguros totalmente discretos. Esto fue señalado por Nesbitt (1964) al hacer un informe sobre el trabajo de Schutte. El problema resulta del hecho de que, en el modelo discreto, la probabilidad de retiro,

$$q_x^{(2)} = \int_0^1 \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu_y^{(\tau)} dy\right] \mu_{x+t}^{(2)} dt$$

depende de la fuerza de mortalidad.

Cummins (1973) bosqueja la historia de los valores de rescate del seguro en Estados Unidos con énfasis sobre el trabajo pionero de Elizur Wright. Los desarrollos en otras naciones siguieron diferentes caminos. El Informe de 1941 de NAIC sobre los beneficios sin pérdida legal proporciona un resumen histórico de la reglamentación en Estados Unidos, un resumen breve de las prácticas en otros países, discusión de las consideraciones filosóficas respecto a la equidad para los tenedóres de pólizas que se retiran y un desarrollo del enfoque de la prima ajustada para definir los valores en efectivo mínimos. El reporte del comité de la Sociedad de Actuarios de 1975, acerca de los requerimientos para el caso en que no hay pérdida legal es especialmente interesante por su discusión de los problemas vinculados con las pólizas que prevén la variación en beneficios después de la expedición. Richardson (1977), complementó este áLáltimo informe con una investigación sobre los gastos con el propósito de definir los factores de recargo para las primas ajustadas.

En dos documentos, uno que cubre la participación en los activos y los valores sin pérdida legal (1939), y otro que trata sobre las primas brutas (1929), Hoskins desarrolló muchas de las ideas contenidas en la sección 15.4. Huffman (1978) discute refinamientos para el cálculo de las participaciones en los activos.

El tema de los dividendos es discutido en detalle por Jackson (1959) y por Maclean y Marshall (1937) en una monografía que también esboza la historia de la distribución del excedente.

El Teorema 15.1 es conocido en la literatura actuarial como el Teorema de Lidstone en reconocimiento de G.J. Lidstone quien presentó los conceptos al Instituto de Actuarios en un documento en 1905. Baillie (1951) discutió varias ampliaciones, en particular, a las políticas de pagos limitados. Promislow (1981) proporcionó mayores ampliaciones a los casos que involucran funciones críticas con patrones de cambio más complejos y los considera para seguros generales con beneficios, tasas de interés y primas variando libremente por duración. La relación entre el Teorema de Lidstone y los dividendos era conocida por Lidstone y fue discutido por Ziock (1978) y por Kabele (1981).

Ejercicios

Sección 15.2

15.1 Dada la siguiente información, $A_x = 03208$, $\ddot{a}_x = 12$, $A_{x:\overline{n}|} = 0.5472$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 8$, calcule la prima ajustada $P^a_{x:\overline{n}|}$ (informe de 1941).

15.2 Dado que $P^a_x > 0.04$ y $i = 0.06$, exprese P^a_x en términos de P_x tanto para el informe de 1941 y para la ley de 1980.

Sección 15.3

15.3 Una compañía esta planeando adoptar una nueva tabla de mortalida. Indique como determinaría usted las edades a la expedición de la póliza y tiempos desde la expedición, para las que los beneficios sin pérdida legal del seguro de vida pagado reducido bajo las pólizas de vida entera sean aumentados y para los que sean disminuidos. Utilice solamente una tabla de las primas netas anuales para las pólizas de vida entera computadas sobre las bases tanto de las antiguas y las nuevas tablas de

mortalidad. Suponga que los valores en efectivo se calculan aplicando el mismo porcentaje de la reserva para las primas netas bajo la nueva tabla al igual que se utilizaron bajo la tabla antigua.

15.4 Un seguro dotal a n años, con n pagos sobre una base de pago totalmente discretoo, con una suma asegurada de una unidad monetaria, es expedido a edad (x). En el caso de falta de pago de las primas, el asegurado tiene la opción de un

- seguro de vida entera (a prima única) o
- un seguro temporal ampliado, al final del periodo del seguro dotal, con una dotación pura reducida, pagada a la edad $x+n$. El valor en efectivo en el tiempo t es ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ y es suficiente para comprar un seguro de vida entera pagado por la cantidad b ó comprar un seguro temporal ampliado de una unidad monetaria junto con un dotal puro a la edad $x+n$ por la cantidad f. Si $A_{x+t:\overline{n-t}|}= 2A_{x+t}$, exprese f en términos de b, $A^{\frac{1}{}}_{x+t:\overline{n-t}|}$ y ${}_{n-t}E_{x+t}$.

15.5 Una dotación a 20 años por un monto unitario sobre una base de pago totalmente continua expedida a (30) ha caducado al final de 10 años cuando se presenta una deuda por el monto L del principal garantizado por el valor en efectivo ${}_{10}CV$. Exprese, en términos de las primas netas únicas,

a. el monto de la dotación pura, E, a la fecha regular de maduración si el seguro temporal ampliado por el monto de la póliza menos la deuda, $1-L$, puede continuarse hasta la fecha de maduración

b. el monto de la reserva sobre el seguro temporal ampliado y del dotal puro a 5 años después de la fecha de caducidad.

15.6 Se ha sugerido que el monto del seguro pagado reducido debería estar en proporción del número de primas anuales pagadas con el número total de primas pagaderas bajo los términos de la póliza. Compare el monto del seguro pagado bajo esta regla sugerida con ${}^{20}_{10}W_{40}$ y ${}_{10}W_{40:\overline{20}|}$ utilizando la Tabla de Vida Ilustrativa y 6% de interés.

15.7 Demuestre que

$$\frac{d}{dt}\left[{}_t\bar{W}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right]=\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})-\mu_{x+t}\left[1-{}_t\bar{W}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right]}{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}$$

e interprete la ecuación. [Sugerencia: utilice (7.11.3) para escribir las derivadas de ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ y $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}$.

15.8 Durante los primeros años del seguro de vida, una compañía definió sus valores en efectivo como

$${}_kCV = h(G_{x+k}-G_x)\ddot{a}(k) \qquad k=1,2,...$$

en donde el símbolo G representa una prima bruta a la edad indicada y $\ddot{a}(k)$ representa una anualidad vitalicia vencida comenzando a la edad $x+k$, que continua sobreviviendo al final del periodo de pago de las primas. En la práctica h fue establecido en 2/3. Si, por la ley de 1980, las primas brutas para una póliza de vida entera se toman como primas ajustadas, y si está determinado que P_x y P_{x+k} son cada una menores que 0.04 y $h=0.9$, demuestre que

$${}_kCV = (0.909+1.125P_x)\,{}_kV_x + 1.125(P_{x+k}-P_x)$$

15.9 Sea ${}_k\hat{W} = {}_kCV/A(k)$ en donde ${}_kCV = A(k)-P^a\ddot{a}(k)$, como en (15.2.2), y P^a es un prima ajustada. Construya una tabla para las tres pólizas mostradas en el cuadro 15.4, con un modelo totalmente discreto, relacionando ${}_k\hat{W}$ a las primas ajustadas y netas uniformes.

15.10 Si ${}_kW^{Mod} = {}_kV^{Mod}/A(k)$, en donde ${}_kV^{Mod}$ es la reserva al final del $k-$ésimo año de la póliza bajo el estándar de los Comisionados, construya una tabla para las tres pólizas mostradas en el cuadro 15.4, con un modelo totalmente discreto, relacionando ${}_kW^{Mod}$ a las primas de renovación y netas uniformes. Suponga que el periodo de pago de las primas en los planes de pago limitados es menor a 20 años.

15.11 Si ${}_{k+t}CV = {}_{k+t}\overline{V}(\overline{A}_x)$,

a. demuestre que la ecuación (15.3.4) para el tamaño del periodo de préstamo automático de la prima puede escribirse como $H(t) = 0$ en donde $H(t) = \overline{a}_x \; G \; \overline{s}_{\overline{t}|_i} + \overline{a}_{x+k+t} - \overline{a}_x$

b. confirme que $H(0) < 0$ para las funciones de sobrevivencia en donde la fuerza de mortalidad está aumentando y que a medida que $t \to \infty$, $H(t)$ llega a ser positivo y sin límites

c. calcule $H'(t)$.

Sección 15.4

15.12 Si, con relación a (15.4.6), ${}_{10}AS_1$ es la participación en los activos al final de 10 años basados en G_1 y ${}_{10}AS_2$ es la cantidad correspondiente basada en G_2, escriba una fórmula para ${}_{10}AS_2 - {}_{10}AS_1$.

Sección 15.5

15.13 Suponga que existe una prima basada en la experiencia, representada mediante $\hat{G}$, basada un la mortalidad real y supuestos de gastos tales que

$$\hat{G} = v \; {}_{k+1}F - {}_{k}F + \hat{g} + v \; \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F)$$

en donde $\hat{g} = G\,\hat{c}_k + \hat{e}_k$. $k = 0,1,2,\ldots$. Adicionalmente, suponga que ${}_{k+1}CV = {}_{k+1}F$ para $k = 0,1,2,3,\ldots$ Demuestre que con estos supuestos

a. ${}_{k+1}F = ({}_{k}F + \hat{G} - \hat{g})(1+i) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F)$

b. si los dividendos se pagan a los asegurados que mueren o se retiran (15.5.4) puede escribirse como

$${}_{k+1}F + {}_{k+1}D = [{}_{k}F + G - \hat{g}](1 + \hat{i}_{k+1}) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F) \qquad \text{y}$$

$${}_{k+1}D = (G - \hat{G})(1 + \hat{i}_{k+1}) + ({}_{k}F + \hat{G} - \hat{g})(\hat{i}_{k+1} - i)$$

Este ejercicio esboza el método de primas derivadas de la experiencia para el cálculo de los dividendos.

15.14 La relación recurrente entre valores sucesivos de la anualidad vitalicia está determinada mediante

$$(\ddot{a}_{x+h} - 1)(1+i) = p_{x+h}\, \ddot{a}_{x+h+1} \qquad h = 0,1,2,...$$

a. Si la tasa de interés de la experiencia real es $\hat{i}_{h+1}$ y la probabilidad de sobrevivencia basada en la experiencia es $\hat{p}_{x+h}$, el progreso del fondo se describirá mediante

$$(\ddot{a}_{x+h} - 1)(1+\hat{i}_{h+1}) = \hat{p}_{x+h}(\ddot{a}_{x+h+1} + \Delta_{h+1})$$

en donde Δ_{h+1} es la participación de los sobrevivientes en las desviaciones. Demuestre que

$$\Delta_{h+1} = \frac{(\hat{i}_{h+1} - i)(\ddot{a}_{x+h+1} - 1) + (p_{x+h} - \hat{p}_{x+h})\, \ddot{a}_{x+h+1}}{\hat{p}_{x+h}}$$

e interprete el resultado. [Esta fórmula es la base de la fórmula de la contribución de dos factores para los dividendos de las anualidades.]

b. Si el ingreso de la anualidad al final del año es ajustado a ser r_{h+1} veces el ingreso del principio del año donde

$$(\ddot{a}_{x+h} - 1)(1+\hat{i}_{h+1}) = \hat{p}_{x+h}(r_{h+1})\ddot{a}_{x+h+1}$$

exprese r_{h+1} en términos de i, $\hat{i}_{h+1}$, p_{x+h}, y $\hat{p}_{x+h}$.

Sección 15.6

15.14 Determine el efecto sobre las reservas para un seguro igual al descrito en el Teorema 15.1 (con $m = n$), suponiendo que

- las reservas se incrementan con la duración y
- p_x disminuye con la edad cuando cada p_x es multiplicado por $(1+k)$, $k > 0$.

15.15 Demuestre que, para el seguro general de la sección 7.4 (previendo un beneficio de b_{h+1} al final del año de la póliza $h+1$, si la muerte ocurre en ese año, y pagada mediante primas netas anuales π_h, $h=0,1,\ldots\ldots$, pagadero al principio de los años de la póliza), la función S_h en (15.6.4) se generaliza a

$$(\pi_h' - \pi_h)(1+i') + ({}_hV + \pi_h)(i'-i) - (q_h' - q_h)(b_{h+1} - {}_{h+1}V)$$

15.16 a. Demuestre que para un seguro de vida entera con un beneficio unitario pagadero al final del año del fallecimiento (15.6.12) se convierte en

$$q_y' = q_y + \frac{c}{v\,\ddot{a}_{y+1}} \qquad x \le y < x+m$$

en donde $y = x+h$, y $c = \ddot{a}_x \Delta$

b. Con base en las tablas de mortalidad q_y' de la parte (a) y tasa de interés i, qué primas netas anuales pagaderas de la edad x hasta $x+m$, proporcionarán los mismos beneficios por fallecimiento y mantendrán las mismas reservas ${}_kV_x$, $0 \le k \le m$, al igual que para el seguro de vida entera con prima neta anual P_x, basado sobre las tasas de mortalidad q_y y tasa de interés i.

ANUALIDADES Y SEGUROS ESPECIALES

16.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos una amplia variedad de pólizas que proporcionan beneficios especiales de anualidades y seguros, con el propósito de determinar sus valores presentes actuariales, primas netas y brutas, y reservas para primas netas. En la sección 16.2 examinaremos un número de contratos de anualidades para una sóla vida en donde el periodo durante el que se hacen los pagos puede ser mayor que el tiempo de vida futuro del responsable de la anualidad, o en donde existen beneficios pagaderos al fallecimiento. Estos contratos pueden surgir del establecimiento de opciones bajo una póliza de seguro de vida, de las previsiones de un plan de pensión o de las de una póliza de anualidad individual. La sección 16.3 cubre el tema, estrechamente relacionado, de la póliza de ingreso familiar. En la sección 16.4 se considera un tipo de póliza que proporciona una anualidad pagadera a la maduración y un beneficio por fallecimiento anterior a la maduración igual al monto nominal, o a la reserva, dependiendo de cual de los dos sea mayor. Los productos variables, en donde los niveles del beneficio y de las reservas dependen de los resultados de la inversión, son los temas por tratar en la sección 16.5. Estos productos adquieren importancia cuando la inflación de precios erosiona el valor de los beneficios establecidos en términos de unidades monetarias fijas. En la sección 16.6 se examinan nuevos tipos de pólizas que proporcionan amplia flexibilidad para montos cambiantes de beneficios y niveles de las primas. En la sección 16.7 describiremos diversas formas de seguros de incapacidad (o de invalidez). Además, se incluye una discusión sobre una aproximación, ampliamente utilizada, al decremento simple para calcular las primas netas y las reservas para primas netas para los seguros de incapacidad (o de invalidez).

16.2 Tipos especiales de beneficios de anualidad

En esta sección nos concentraremos en el cálculo de los valores presentes actuariales de formas especiales de beneficios de anualidades. Dos de los patrones de pago dependen de las primas brutas cobradas y en estos casos determinaremos la prima bruta. Hacemos énfasis en el pago de anualidades continuas y justificamos, por analogía, los resultados correspondientes para los pagos m-ésimos de las anualidades.

Empezamos con un análisis de una ***anualidad vitalicia y fija a plazo de n años***. Esta es una anualidad vitalicia con una garantía de pagos por al menos n años. Si el tiempo del fallecimiento del responsable de la anualidad se representa mediante T, entonces el valor presente de los pagos para esa anualidad de 1 al año, pagadera sobre una base continua, está determinado mediante

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & T \le n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T > n \end{cases} \tag{16.2.1}$$

Para una anualidad expedida a (x), el valor presente actuarial, en forma de pago agregada, está determinado por

$$\int_0^n \bar{a}_{\overline{n-t}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt \tag{16.2.2}$$

Puede usarse la integración por partes para obtener la fórmula equivalente,

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt \tag{16.2.3}$$

Esta es la forma de pago usual del valor presente actuarial, ya que para los primeros n es seguro que se hace el pago, mientras que para tiempos t mayores que n, el pago se realiza sólo si (x) está con vida.

Se pueden derivar otras dos expresiones de la integral de (16.2.3). Primero, la integral puede escribirse como

$$\int_0^{\infty} v^t\, {}_tp_x dt - \int_0^n v^t\, {}_tp_x dt$$

y el valor presente actuarial (16.2.3) se transforma en

$$\overline{a}_{\overline{n}|} + \overline{a}_x - \overline{a}_{x\overline{n}|} \tag{16.2.4}$$

Esto tiene un fuerte semejanza con el tipo de expresión que se encontró en el capítulo 8 con respecto al estatus del último sobreviviente. Sugiere la notación $\overline{a}_{\overline{x:n}|}$ para el valor presente actuarial. Ello es apropiado ya que la anualidad es pagadera hasta que ambos estatus, (x) y $(\overline{n|})$ han fallado.

Segundo, un cambio de variable, reemplazando t por $s+n$, en la integral de (16.2.3) nos da

$$\overline{a}_{\overline{x:n}|} = \overline{a}_{\overline{n}|} + {}_nE_x\overline{a}_{x+n} \tag{16.2.5}$$

Para versiones discretas de esta anualidad tenemos, al igual que (16.2.4) y (16.2.5),

$$\overline{a}^{(m)}_{\overline{x:n}|} = a^{(m)}_{\overline{n}|} + a^{(m)}_x - a^{(m)}_{x\overline{n}|} \tag{16.2.6}$$

$$= a^{(m)}_{\overline{n}|} + {}_nE_x a^{(m)}_{x+n} \tag{16.2.7}$$

Una forma especial de esta anualidad es la ***anualidad reembolsable en pagos***. Se garantiza un número suficiente de pagos de tal forma que el responsable de la anualidad recibe, al menos, igual monto que la prima bruta pagada. Por lo tanto, para dicha anualidad continua con prima bruta G, el valor presente actuarial de los beneficios es

$$\overline{a}_{\overline{G}|} + {}_GE_x\,\overline{a}_{x+G}$$

Si la prima bruta debe contener un recargo de r veces la prima bruta, el principio de equivalencia requiere que G satisfaga

$$G(1-r) = \bar{a}_{\overline{G}|} + {}_{G}E_x \, \bar{a}_{x+G} \tag{16.2.8}$$

La diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de las expresiones anteriores puede evaluarse para valores enteros de G. Luego, se encuentra un valor de G que iguale los dos lados por interpolación lineal. Expresiones similares son válidas para versiones discretas y podrá encontrarse G para aquellas en forma análoga.

Una anualidad relacionada que contiene algunas de las características del seguro es la ***anualidad reembolsable en pagos al contado***. Un beneficio por fallecimiento se define como el excedente, si existe, de las primas brutas pagadas por encima de los pagos de la anualidad recibidos. Si G es la prima bruta única y T es el tiempo al fallecimiento, el valor presente de los beneficios en una base continua es

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} + (G-T)v^T & T \le G \\ \bar{a}_{\overline{T}|} & T > G \end{cases} \tag{16.2.9}$$

El valor presente actuarial de estos beneficios se determina mediante

$$\int_0^\infty \bar{a}_{\overline{n}|t} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt + \int_0^G (G-t) v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$
$$= \bar{a}_x + G \, \bar{A}^{1}_{x\overline{G}|} - \left(\bar{I} \, \bar{A}\right)^{1}_{x\overline{G}|} \tag{16.2.10}$$

Al igual que en el caso de la anualidad reembolsable en pagos a plazos, se usa el principio de equivalencia para determinar G. Si el recargo es r veces la prima bruta,

$$G(1-r) = \bar{a}_x + G \, \bar{A}^{1}_{x\overline{G}|} - \left(\bar{I} \, \bar{A}\right)^{1}_{x\overline{G}|} \tag{16.2.11}$$

Se puede utilizar la interpolación lineal para aproximarse a G después de que se evalúa la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de (16.2.11) para valores enteros de G.

Concluimos esta sección con un ejemplo de una variación de una anualidad vitalicia y fija temporal a n años.

Ejemplo 16.1:

Calcule el valor presente actuarial de una anualidad continua que proporciona pagos hasta n años después del fallecimiento de (x).

Solución:

Sea T el tiempo transcurrido al fallecimiento de (x). Entonces, el valor presente actuarial de los beneficios es

$$Z = \bar{a}_{\overline{T+n}|}$$

y el valor presente actuarial de la anualidad es

$$\int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t+n}|}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

Integrando por partes nos da una integral alternativa,

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \int_0^\infty v^{t+n}\, {}_t p_x\, dt = \bar{a}_{\overline{n}|} + v^n\, \bar{a}_x$$

Si hacemos el cambio de variable $t+n=s$, el valor presente actuarial puede escribirse como

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^s\, {}_{s-n} p_x\, ds$$

Esta formulación de pago corriente reconoce que los pagos son hechos antes del tiempo n con certidumbre y después del tiempo n sólo si (x) estaba con vida en los n años previos.

16.3 Seguros de ingreso familiar

Un ***seguro de ingreso familiar temporal a n años*** proporciona un ingreso desde la fecha del fallecimiento del asegurado, y continúa hasta que han transcurrido n años desde la fecha de expedición de la póliza. Típicamente, se paga mediante las primas por un periodo de n años, o algún periodo más corto que n años, para mantener las reservas finales positivas. Nuevamente, empezamos con una anualidad continua. Si T es el tiempo al fallecimiento del asegurado, el valor presente de los beneficios es

$$Z = \begin{cases} v^T \, \bar{a}_{\overline{n-T}|} & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases} \tag{16.3.1}$$

Usualmente, la tasa de interés involucrada en el factor de la anualidad, $\bar{a}_{\overline{n-T}|}$ es el mismo que el del valor presente del factor, v^T. Una variación de este tipo de contrato es la póliza de protección hipotecaria en donde el factor de la anualidad en la función de beneficios representa el balance principal sobre una hipoteca. La tasa de interés de la hipoteca que se utiliza al evaluar $\bar{a}_{\overline{n-T}|}$ puede entonces ser diferente de la que se usa para evaluar v^T.

El valor presente actuarial para el beneficio del ingreso familiar está determinada mediante

$$\int_0^n v^t \, \bar{a}_{\overline{n-t}|} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \tag{16.3.2}$$

Esta integral de pago agregado puede convertirse, integrando por partes, en una integral de pago corriente

$$\bar{a}_{\overline{n}|} - \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \left(1 - {}_tp_x\right) dt \tag{16.3.3}$$

Aquí la interpretación es que la anualidad es pagadera en el tiempo t para $t < n$ solo si (x) fallece en ese tiempo, la probabilidad de ello es $1 - {}_tp_x$.

Existen dos variaciones posibles cuando consideramos el análogo discreto de la póliza de ingreso familiar continua. Primero, los pagos de anualidad pueden pagarse al final de cada m-ésima parte del año después de la muerte del asegurado midiendo el tiempo desde la fecha de la expedición de la póliza. El valor presente actuarial para dicha anualidad estaría determinado por

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} - a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \tag{16.3.4}$$

El beneficio alternativo tiene la anualidad del m-ésimo lugar empezando en la fecha del fallecimiento y continuando hasta el tiempo n con un pago final fraccionario. El valor presente actuarial para este beneficio es

$$\begin{aligned}\int_0^n v^t \, \ddot{a}_{\overline{n-t}|}^{(m)} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} dt &= \frac{\delta}{d^{(m)}} \int_0^n v^t \, \overline{a}_{\overline{n-t}|} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} dt \\ &= \frac{\delta}{d^{(m)}} \left(\overline{a}_{\overline{n}|} - \overline{a}_{x:\overline{n}|} \right)\end{aligned} \tag{16.3.5}$$

Determinemos ahora el tamaño del pago final fraccionario que sea consistente con (16.3.5). Definimos k como el número de años completos del beneficio y j el número de pagos totales en m-ésimo lugar en el último año. Por tanto, $k = \lfloor n-t \rfloor$ y $j = \lfloor m(n-k-t) \rfloor$ en donde los paréntesis cuadrados se refieren a la función entera más grande y t es el tiempo transcurrido al fallecimiento. Por ejemplo, si $n = 30$, $m = 12$ y $t = 18.8$, entonces $k = 11$ y $j = 2$. Escribiendo $n-t$ como $k + (j/m) + s$, tenemos

$$\ddot{a}_{\overline{n-t}|}^{(12)} = \ddot{a}_{\overline{k+(j/m)+s}|}^{(12)} = \ddot{a}_{\overline{k+j/m}|}^{(12)} + v^{k+j/m} \frac{1-v^s}{d^{(12)}}.$$

Por lo tanto el tamaño del pago final fraccionario es $\left(1-v^s\right)/d^{(12)}$. Esto es muy cercano a s, que es, usualmente, el monto pagado. En nuestro ejemplo numérico, con

$$s = n - t - k - \frac{j}{m} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1-v^s}{d^{(12)}} = 0.033382$$

para $i = 0.06$, difiere desde 1/30 a 0.00005 aproximadamente.

Concluimos esta sección con un ejemplo que combina aspectos de una póliza de ingreso familiar y una anualidad de retiro con un plazo determinado.

Ejemplo 16.2:

Determine el valor presente actuarial de los beneficios bajo la póliza expedida a la edad de 40 años que proporciona los siguientes beneficios de la anualidad pagaderos continuamente a una tasa de 1 u.m. por año:

- en el caso del fallecimiento antes de la edad 65, un beneficio de ingreso familiar que termina en la edad 65 o 10 años después del fallecimiento, si es posterior, y
- en el evento de sobrevivencia hasta la edad de 65 años, una anualidad vitalicia con certeza de 10 años.

Solución:

Nos preparamos para escribir una integral de pago corriente. El siguiente cuadro indica las condiciones requeridas para los pagos en el tiempo t y las probabilidades correspondientes.

Tiempo	Condición	Probabilidad
$0 < t \le 25$	(40) ha fallecido	$1 - {}_tp_{40}$
$25 < t \le 35$	(40) estaba vivo en $t-10$	${}_{t-10}p_{40}$
$t > 35$	(40) está con vida	${}_tp_{40}$

El valor presente actuarial es

$$\int_0^{25} v^t \left(1 - {}_tp_{40}\right) dt + \int_{25}^{35} v^t \, {}_{t-10}p_{40} dt + \int_{35}^{\infty} v^t \, {}_tp_{40} dt$$

Si reemplazamos $t-10$ por s en la integral intermedia, obtenemos

$$\int_{15}^{25} v^{s+10} \, {}_sp_{40} ds = v^{10} \left(\overline{a}_{40:\overline{25}|} - \overline{a}_{40:\overline{15}|}\right)$$

Por lo tanto, el valor presente actuarial del beneficio puede escribirse como

$$\overline{a}_{\overline{25}|} - \overline{a}_{40:\overline{25}|} + v^{10}\left(\overline{a}_{40:\overline{25}|} - \overline{a}_{40:\overline{15}|}\right) + \overline{a}_{40} - \overline{a}_{40:\overline{35}|}$$

16.4 Pólizas de ingresos por retiro

Una ***póliza de ingreso por retiro*** es una póliza de dotación caracterizada por tener un monto de maduración mayor que la cantidad nominal. El monto de maduración se elige, típicamente, para proporcionar un nivel particular de ingreso de la anualidad. Ya que las reservas deben aproximarse al monto de la maduración, existe un tiempo después del cual la reserva excede a la cantidad nominal. Cuando las reservas exceden a la cantidad nominal, el beneficio por fallecimiento se establece igual a la reserva.

Empezamos nuestro análisis con un modelo totalmente continuo. Sea $\bar{P}$ la tasa anual del pago de la prima y sea $1+k$ el monto de maduración en el tiempo n para una póliza con un monto nominal unitario. Sea a el tiempo en el que la reserva es igual a 1. Entonces el monto del beneficio b_t esta determinado como

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \le a \\ {}_t\bar{V} & a < t \le n \end{cases}$$

La reserva en el tiempo a, se sabe que es 1, puede expresarse retrospectivamente como

$$1 = {}_a\bar{V} = \bar{P}\,\bar{s}_{\overline{x:a}|} - {}_a\bar{k}_x = \frac{\bar{P}\,\bar{a}_{\overline{x:a}|} - \bar{A}^1_{\overline{x:a}|}}{{}_aE_x} \tag{16.4.1}$$

la ecuación diferencial para la reserva esta dada por (7.11.3) como

$$\frac{d}{dt}{}_t\bar{V} = \bar{P} + \delta\,{}_t\bar{V} - \mu_{x+t}\left(b_t - {}_t\bar{V}\right)$$

Para $t \ge a$ en donde $b_t = {}_t\bar{V}$, el término que contiene μ_{x+t} desaparece, por lo que la ecuación diferencial involucra sólo la fuerza de interés. Por lo tanto, puede aplicarse la teoría del interés compuesto para producir

$${}_a\bar{V} = v^{n-a}\,{}_n\bar{V} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{n-a}|}$$

Pero ${}_a\bar{V} = 1$ y ${}_n\bar{V} = 1+k$, así que tenemos

$$1 = (1+k)v^{n-a} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{n-a}|} \tag{16.4.2}$$

Finalmente, combinando (16.4.1) y (16.4.2), obtenemos

$$\overline{P} = \frac{\overline{A}^{1}_{x\overline{a}|} + {}_{a}E_{x}\, v^{n-a}(1+k)}{\overline{a}_{x\overline{a}|} + {}_{a}E_{x}\, \overline{a}_{\overline{n-a}|}} \tag{16.4.3}$$

Ahora, de la ecuación (16.4.1), tenemos

$$\overline{P} = \frac{\overline{A}^{1}_{x\overline{a}|} + {}_{a}E_{x}}{\overline{a}_{x\overline{a}|}} = \overline{P}\left(\overline{A}_{x\overline{a}|}\right)$$

en consecuencia

$$\overline{P} = \frac{1}{\overline{a}_{x\overline{a}|}} - \delta \tag{16.4.4}$$

De igual forma (16.4.2) proporciona

$$\overline{P} = \frac{(1+k)v^{n-a}}{\overline{a}_{\overline{n-a}|}} - \frac{1}{\overline{a}_{\overline{n-a}|}} = \frac{k}{\overline{s}_{\overline{n-a}|}} - \left(\frac{1}{\overline{a}_{\overline{n-a}|}} - \frac{1}{\overline{s}_{\overline{n-a}|}}\right) = \frac{k}{\overline{s}_{\overline{n-a}|}} - \delta$$

Combinando ésta con (16.4.4) nos da una condición que a debe satisfacer, es decir

$$\frac{\overline{s}_{\overline{n-a}|}}{\overline{a}_{x\overline{a}|}} = k \tag{16.4.5}$$

El procedimiento, entonces, será calcular a utilizando (16.4.5) y $\overline{P}$ mediante (16.4.3) ó (16.4.4). (Véase la expresión en el ejercicio 16.14 para $\overline{a}_{x\overline{a}|}$)

Las fórmulas para reserva se escriben más fácilmente en forma retrospectiva si $t < a$ y prospectivamente si $t \geq a$. En especial, para $t > a$, se aplica la teoría del interés compuesto para proporcionar prospectivamente

$${}_{t}\overline{V} = (1+k)v^{n-t} - \overline{P}\,\overline{a}_{\overline{n-t}|} \tag{16.4.6}$$

El modelo totalmente discreto es similar, pero a es ahora el único entero tal que ${}_{a}V \leq 1$ y ${}_{a+1}V > 1$. El ejercicio 16.12 se pide que lector desarrolle fórmulas similares a (16.4.3) y (16.4.5) para este caso.

16.5 Productos variables

Consideraremos Aquí diversos productos en donde los niveles de beneficio y las reservas dependen de los resultados de la inversión. Las inversiones asociadas con un producto pueden ser de cualquier tipo. Generalmente, se seleccionan las inversiones para estar de acuerdo con el objetivo anunciado del producto del seguro o de la anualidad. El objetivo original de estos productos era el de participar en las ganancias totales esperadas más altas (dividendos, y ganancias de capital e interés) disponibles en bonos de inversión y, por tanto, proporcionar alguna medida de protección en contra de la inflación. Un contrato típico estipula garantías acerca de los cargos por mortalidad y gastos. De este modo, al tenedor de la póliza no se le cargan los resultados adversos, ni se beneficia de los resultados favorables en estas dos áreas. Examinaremos los mecanismos del cambio de nivel de los beneficios para una póliza individual.

16.5.1 Anualidad variable

Consideraremos aquí la ***anualidad variable***. Durante el periodo de pago de las primas o ***periodo de acumulación***, se acumula un fondo promedio de contribuciones únicas, o mediante depósitos periódicos, a tasas de interés que dependen del funcionamiento de la inversión del fondo. Normalmente, las anualidades variables constituyen garantías sobre ventas máximas, cargos por gastos administrativos y de inversión y, sobre la base de la mortalidad en uso. El beneficio por fallecimiento durante el periodo de acumulación comúnmente es igual a la participación del fondo de acumulación, mientras que el beneficio por retiro es, con frecuencia, el beneficio por fallecimiento menos un cargo por rescate. Si se ignoran los retiros, el crecimiento de la participación del fondo está determinada por

$$\left[F_k + \pi_k\left(1-c_k\right) - e_k\right]\left(1+i'_{k+1}\right) = F_{k+1} + q_{x+k}\left(b_{k+1} - F_{k+1}\right) \qquad (16.5.1)$$

[véase (15.5.3)]. Aquí F_k es la participación en el fondo en el tiempo k; π_k es el tamaño del depósito en el tiempo k; c_k es la fracción de la prima, π_k, con recargo por los gastos en el tiempo k que son proporcionales a la prima pagada en ése tiempo; e_k es el cargo en el tiempo k debido a los gastos no proporcionales de la prima; b_{k+1} es el beneficio pagado en el tiempo $k+1$ por fallecimiento entre el tiempo k y $k+1$; i'_{k+1} es el rendimiento de inversión real, neto de gastos de inversión, para el año siguiente al tiempo k. El

segundo término de la derecha es igual a 0 durante el periodo de acumulación, por lo que tenemos que el crecimiento del fondo se debe únicamente al interés.

Cuando ocurre el retiro, la participación en el fondo existente se utiliza para comprar una anualidad pagada en su totalidad, las tasas de compra se computan sobre una base de mortalidad predeterminada y ***un rendimiento de inversión supuesto*** (RIS). Si el RIS es bajo, entonces el pago inicial de la anualidad será bajo con respecto a la participación en el fondo, pero el contrato puede, como veremos, estipular un patrón de pagos creciente que compensa algunos de los efectos de la inflación. Sea RIS representado por i y, nuevamente, sea el rendimiento de inversión neto real i'_{k+1} en el año siguiente al tiempo k. Si el beneficio de la anualidad se paga únicamente a los que viven al principio de cada año, con un pago de la anualidad uniforme en el tiempo k igual a b_k, la reserva es $b_k\ \ddot{a}_{x+k}$, exactamente antes del pago, con x la edad del retiro. La ecuación para el incremento de la participación en el fondo sería

$$\left(b_k\ \ddot{a}_{x+k} - b_k\right)\left(1+i'_{k+1}\right) = b_{k+1}\ p_{x+k}\ \ddot{a}_{x+k+1} \tag{16.5.2}$$

Pero de (5.8.4), tenemos

$$\left(\ddot{a}_{x+k} - 1\right)\left(1+i\right) = p_{x+k}\ \ddot{a}_{x+k+1} \tag{16.5.3}$$

Al dividir las últimas dos ecuaciones tenemos

$$b_{k+1} = b_k \frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{16.5.4}$$

De esta manera, si $i'_{k+1} > i$, el nivel del beneficio se incrementará. Nótese que un RIS alto puede conducir a una situación en la que los montos de beneficios, frecuentemente, se disminuyen.

El resultado (16.5.4), es válido para otras opciones de pago. Este está indicado para la anualidad vitalicia a n años del ejercicio 16.15. También tiene validez para los pagos en m-ésimo lugar en formas ligeramente modificadas. Primero, consideremos el ajuste del monto pagado mensualmente. La fórmula que vincula los valores de la anualidad para el primero y segundo mes de un contrato de un año es

$$\left(\ddot{a}^{(12)}_{x+k} - \frac{1}{12}\right)\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right) = {}_{1/12}p_{x+k}\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1/12}$$

mientras que el incremento de la participación en el fondo se expresaría mediante

$$\left(b_k\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k} - \frac{b_k}{12}\right)\left(1+\frac{i'^{(12)}_{k+1}}{12}\right) = {}_{1/12}p_{x+k}\ b_{k+1/12}\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1/12}$$

La división produce

$$b_{k+1/12} = \frac{b_k\left(1+i'^{(12)}_{k+1}/12\right)}{1+i^{(12)}/12} \tag{16.5.5}$$

Alternativamente, podríamos ajustar el tamaño del pago a una base anual aunque el pago sea mensual. Primero, la fórmula para las reservas anuales sucesivas de una anualidad mensual es

$$\left(\ddot{a}^{(12)}_{x+k} - \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|}\right)(1+i) = p_{x+k}\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1}$$

[véase (5.8.1)]. La ecuación del crecimiento de la participación en el fondo sería

$$\left(b_k\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k} - b_k\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|}\right)\left(1+i'_{k+1}\right) = p_{x+k}\ b_{k+1}\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1}$$

En consecuencia, hacemos un cargo $b_k\ \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|}$, por los pagos de la anualidad del presente año. Dividiendo las dos últimas expresiones se obtiene, otra vez, (16.5.4)

$$b_{k+1} = b_k\frac{1+i'_{k+1}}{1+i}$$

Existe un gran número de diseños posibles para un ***seguro de vida variable***. Examinaremos tres diferentes proyectos, todos con base en un seguro de vida entera. Cada uno de ellos es adaptado fácilmente a seguros de vida de pago limitado o seguros dotales. Cada uno se basará en primas anuales con pago inmediato de las reclamaciones. Los montos de los beneficios se cambian al principio de cada año.

16.5.2 Seguro de Vida Totalmente Variable

El primer proyecto es lo que llamaremos seguro de vida totalmente variable. Los montos de los beneficios cambian con los resultados de la inversión y las primas se mantienen proporcionales a los montos de los beneficios. Iniciamos con un monto de beneficio unitario y prima neta $P(\bar{A}_x)$. La reserva final en el tiempo k es igual al producto de ${}_kV(\bar{A}_x)$ y b_k, el monto de los beneficios se pagará en el año siguiente al tiempo k. La prima neta pagadera en el tiempo k es $b_k\,P(\bar{A}_x)$. Al recibirse la prima neta, se compra un seguro a plazo para el beneficio del año, el costo es $b_k\,\overline{A}^{\,1}_{x+k\rceil}$. La ecuación que vincula el tamaño del fondo al principio y al final del año, y que se utiliza para definir el beneficio para el año subsiguiente, es

$$\left[b_k\;{}_kV(\bar{A}_x)+b_k\,P(\bar{A}_x)-b_k\,\overline{A}^{\,1}_{x+k\rceil}\right](1+i'_{k+1})=p_{x+k}\;b_{k+1}\;{}_{k+1}V(\bar{A}_x) \tag{16.5.6}$$

Pero sabemos que

$$\left[{}_kV(\bar{A}_x)+P(\bar{A}_x)-\overline{A}^{\,1}_{x+k\rceil}\right](1+i)=p_{x+k}\;{}_{k+1}V(\bar{A}_x) \tag{16.5.7}$$

Dividiendo (16.5.6) por (16.5.7), obtenemos

$$b_{k+1}=b_k\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{16.5.8}$$

Esta es la misma relación que es válida durante la fase de pago de una anualidad variable, es decir, (16.5.4).

16.5.3 Seguro de vida variable con prima fija

A continuación examinaremos un ***seguro de vida variable con prima fija***. La principal diferencia con el proyecto totalmente variable, como su nombre lo sugiere, es que la prima neta permanece constante. Nuevamente, empezamos con un monto de beneficios unitario y escribimos la ecuación que vincula el tamaño de los fondos,

$$\left[b_k \, {}_kV\left(\overline{A}_x\right) + P\left(\overline{A}_x\right) - b_k \, \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|} \right]\left(1+i'_{k+1}\right) = p_{x+k} \; b_{k+1} \; {}_{k+1}V\left(\overline{A}_x\right) \tag{16.5.9}$$

Combinándolo con (16.5.7) se obtiene

$$b_{k+1} = b_k \left[\frac{{}_kV\left(\overline{A}_x\right) + P\left(\overline{A}_x\right)/b_k - \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}}{{}_kV\left(\overline{A}_x\right) + P\left(\overline{A}_x\right) - \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}} \right] \frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{16.5.10}$$

El primer factor del lado izquierdo de (16.5.9) puede escribirse como

$$\left(b_k - 1\right) {}_kV\left(\overline{A}_x\right) + {}_kV\left(\overline{A}_x\right) + P\left(\overline{A}_x\right) - b_k \; \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}$$

Esto demuestra que la prima neta fija sostiene tanto al monto nominal inicial de 1 como al beneficio adicional, $b_k - 1$, generado por los rendimientos reales de la inversión. De ahí que, los cambios en el monto de los beneficios, en este plan, son pagados por la prima.

16.5.4 Incrementos del seguro pagado totalmente

Consideramos aquí una alternativa utilizada en el tercer proyecto. Consideremos los cambios en el monto de los beneficios como pagados y usemos la prima para sostener únicamente al nivel original de beneficios. La ecuación que vincula las participaciones en el fondo se transforma en

$$\begin{aligned} &\left[\left(b_k - 1\right) \overline{A}_{x+k} + {}_kV\left(\overline{A}_x\right) + P\left(\overline{A}_x\right) - b_k \, \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|} \right]\left(1+i'_{k+1}\right) \\ &\qquad = p_{x+k}\left[\left(b_{k+1} - 1\right) \overline{A}_{x+k+1} + {}_{k+1}V\left(\overline{A}_x\right) \right] \end{aligned} \tag{16.5.11}$$

El lado izquierdo de (16.5.11) puede transformarse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\left(b_k\left(\overline{A}_{x+k}-\overline{A}^{\frac{1}{x+k}:\overline{1|}}\right)-\left[\overline{A}_{x+k}-{}_kV\left(\overline{A}_x\right)-P\left(\overline{A}_x\right)\right]\right)\left(1+i'_{x+k}\right)\\
&=\left[b_k\ {}_1E_{x+k}\ \overline{A}_{x+k+1}-P\left(\overline{A}_x\right)\left(\ddot{a}_{x+k}-1\right)\right]\left(1+i'_{k+1}\right)\\
&=\left[b_k\ {}_1E_{x+k}\ \overline{A}_{x+k+1}-P\left(\overline{A}_x\right)\left({}_1E_{x+k}\ \ddot{a}_{x+k+1}\right)\right]\left(1+i'_{k+1}\right)\\
&=p_{x+k}\ \overline{A}_{x+k+1}\left[b_k-\frac{P\left(\overline{A}_x\right)}{P\left(\overline{A}_{x+k+1}\right)}\right]\frac{1+i'_{k+1}}{1+i}
\end{aligned}$$

El lado derecho de (16.5.11) se transforma más fácilmente usando la fórmula para la reservas del seguro pagado. Se convierte en

$$\begin{aligned}
&p_{x+k}\left[\left(b_{x+1}-1\right)\overline{A}_{x+k+1}+\overline{A}_{x+k+1}\left(1-\frac{P\left(\overline{A}_x\right)}{P\left(\overline{A}_{x+k+1}\right)}\right)\right]\\
&=p_{x+k}\ \overline{A}_{x+k+1}\left[b_{k+1}-\frac{P\left(\overline{A}_x\right)}{P\left(\overline{A}_{x+k+1}\right)}\right]
\end{aligned}$$

En consecuencia, la fórmula recurrente para el monto de los beneficios es

$$b_{k+1}-\frac{P\left(\overline{A}_x\right)}{P\left(\overline{A}_{x+k+1}\right)}=\left[b_k-\frac{P\left(\overline{A}_x\right)}{P\left(\overline{A}_{x+k+1}\right)}\right]\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \qquad (16.5.12)$$

Este tercer proyecto tiene la ventaja de que si, después de un periodo de años con rendimientos de inversión favorables que resultan en $b_k>1$, los rendimientos de inversión se nivelan con el RIS, entonces los montos de los beneficios permanecerán fijos. Esto no es verdadero para el segundo proyecto que condujo a (16.5.10).

16.6 Productos de planes flexibles

Al inicio de la década de los setenta las compañías aseguradoras empezaron a ofrecer diverso tipos de pólizas que pretendían proporcionar al tenedor de la póliza una amplia gama de opciones para cambiar los montos de los beneficios, las primas y el plan de seguro. Las compañías permitían pequeños incrementos en los montos de los beneficios sin nueva evidencia de protección, pero los incrementos más grandes si la requerían. Los planes de seguro generalmente incluían todo tipo de primas uniformes, planes a plazos con beneficios uniformes, que incluían, como caso límite, el seguro de vida entera. Los planes más caros que se ofrecían fueron los planes vitalicios con pago limitado o planes de dotales. Estaban disponibles versiones tanto participantes como no participantes. Se ideó una opción especial de dividendo para permitir que éste fuese añadido a las tasas netas directamente relacionadas con el valor en efectivo. Este valor en efectivo mayor se utilizó después para ampliar la fecha de expiración en los planes a plazo o para incrementar los montos de los beneficios en los planes permanentes. Nos referiremos a dichos productos como planes flexibles y ejemplificaremos una versión particularmente simple que muestra algunas de las complejidades inherentes. Concluiremos la sección describiendo un segundo proyecto que hace menos énfasis en el plan de seguro y que tiene algunas características en común con los planes de vida variables, como fueron descritos en la sección anterior.

16.6.1 Ejemplo de plan flexible

La fórmula utilizada para el cálculo de las reservas que relaciona la prima bruta con la prima neta es básica para el diseño del tipo de plan que se considerará aquí. Utilizaremos la siguiente relación muy simple aplicada a ambos, los planes de vida de pago limitado y los de pago a plazos, esta última corresponde a nuestra elección para la cobertura permanente,

$$0.8G = P. \tag{16.6.1}$$

Aquí G es la prima bruta y P es la prima neta.

Otra decisión básica es determinar la forma del cargo por gastos totales y la cuestión relativa al ajuste de las reservas a los tiempos de cambio del plan. En nuestro ejemplo, utilizaremos reservas a plazo totalmente preliminares y valores sin pérdida legal. Debe indicarse que las leyes de valores sin pérdida

legal y de valuación pueden requerir valores mínimos más altos, especialmente, para los planes de vida de pago limitado. Definimos ${}_0V = -E$, en donde E es el exceso en la asignación de gastos del primer año. Luego, debido a nuestra adopción de reservas a plazo totalmente preliminares, tenemos que ${}_1V = 0$ y, suponiendo una base totalmente discreta,

$$ {}_0V + P = v\, q_x\, b $$

en consecuencia

$$ E = -{}_0V = P - v\, q_x\, b \tag{16.6.2} $$

La ecuación que vincula el monto de beneficios inicial b, la prima neta inicial P y el plan de seguro inicial con h, representando el plazo de pago de las primas, es

$$ {}_0V + P\, \ddot{a}_{x:\overline{h}|} = b\, A^1_{x:\overline{j}|} \tag{16.6.3} $$

Aquí j es igual ya sea a h (en caso de un plan temporal) ó $\omega - x$ (en caso del seguro de vida de pago limitado). Las reservas se determinan más fácilmente mediante fórmulas retrospectivas ya que, como veremos, generalmente, se requieren ajustes menores de los beneficios en el año final de una póliza. Por lo tanto

$$ {}_kV = \frac{{}_0V + P\, \ddot{a}_{x:\overline{k}|} - b\, A^1_{x:\overline{k}|}}{{}_kE_x}. \tag{16.6.4} $$

Ilustraremos las aplicaciones de estas fórmulas con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.3:

Considere una póliza expedida a la edad de 35 años con una prima bruta inicial de 1,000 y un monto de beneficios inicial de 120,000. Utilice la Tabla de Vida Ilustrativa con 6% de interés para determinar el exceso en la asignación de gastos para el primer año, el quinto año de la reserva y el plan de seguro.

Solución:

De (16.6.1), tenemos que $P = 800$. Por consiguiente, el exceso en la asignación de gastos para el primer año es

$$-_0V = P - 120{,}000\ v\ q_{35} = 572.05$$

y la reserva del quinto año está determinada por

$$\begin{aligned} {}_5V &= \frac{-572.05 + 800\ \ddot{a}_{35:\overline{5}|} - 120{,}000 A^1_{35:\overline{5}|}}{{}_5E_{35}} \\ &= 2{,}491.24 \end{aligned}$$

La prina neta de renovación para un seguro de vida entera por 120,000 a la edad de 35 años sobre una base totalmente preliminar es $120{,}000P_{36} = 1{,}057.37$. Ya que nuestra prima neta es de sólo 800, el plan de seguro es uno de los planes a plazo. Puede verificarse que, mediante el uso de fórmulas retrospectivas,

$${}_{39}V = 3{,}375.72$$

y

$${}_{40}V = -1{,}313.14$$

En consecuencia el plan de seguro se termina a la edad de 74 años. La reserva restante en el tiempo 39 normalmente se usaría para proporcionar un seguro a plazo por una fracción del siguiente año. En nuestro ejemplo, el número de días está dado por

$$\frac{{}_{39}V}{120{,}000\ A^1_{74:\overline{1}|}} 365 = 230$$

Δ

En el momento en que se presenta un cambio del monto de los beneficios o de las primas, se calcula una nueva prima neta junto con cualquier cambio en la reserva que podría resultar de, por ejemplo, un cambio del exceso en la asignación para gastos del primer año asumido. Para nuestro plan simplificado, las primas netas son un porcentaje constante de las primas brutas y supondremos que la reserva revisada en el tiempo del cambio, ${}_kV'$, es igual a la reserva, qué esté a la mano, a plazo totalmente preliminar. La relación entre la reserva revisada, la nueva prima neta, P' y el nuevo monto de beneficios b', es de la misma forma que (16.6.3), es decir,

$$ {}_kV' + P'\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h}|} = b'\,A^{\,1}_{\,x+k:\overline{j}|} \tag{16.6.5} $$

Aquí j y h, en general, cambiarían con la nueva relación entre primas y montos de beneficios. Nuevamente, j es igual ya sea h ó $\omega - x - k$, y es muy conveniente evaluar las reservas mediante una fórmula retrospectiva. Por lo tanto, para $g = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos

$$ {}_{k+g}V' = \frac{{}_kV' + P'\,\ddot{a}_{x+k:\overline{g}|} - b'\,A^{\,1}_{\,x+k:\overline{g}|}}{{}_gE^{\,x}_{\,x+k}}. \tag{16.6.6} $$

Proseguiremos con tres ejemplos que son continuaciones del ejemplo 16.3. Estos ilustran diferentes tipos de cambios y muestran algunos cálculos característicos.

Δ

Ejemplo 16.4

El tenedor de la póliza del ejemplo 16.3 desea, 5 años después de la expedición, cambiar la prima bruta de la póliza a 2,000 y el monto de los beneficios a 150,000. Determine la reserva 10 años después de la expedición original y el nuevo plan de seguro.

Solución:

$P' = 1{,}600$ y ${}_5V' = 2{,}491.24$ $({}_5V' = {}_5V$ en el ejemplo 16.3). Por lo tanto, debido a (16.6.6),

$$ {}_{10}V' = \frac{2{,}491.24 + 1{,}600\ddot{a}_{40:\overline{5}|} - 150{,}000A^{1}_{40:\overline{5}|}}{{}_5E_{40}} $$

$$ = 10{,}319.89 $$

Sabemos que el plan de seguro es uno de los planes de vida de pago limitado ya que $2{,}491.24 + 1600\,\ddot{a}_{40}$ excede a $150{,}000A_{40}$. Puede determinarse que la reserva a la edad de 69 años es la primera que excede el valor presente actuarial de 150,000 del seguro de vida entera a la misma edad. En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
{}_{34}V' &= \frac{2,491.24 + 1,600\ddot{a}_{40:\overline{29}|} - 150,000A^{1}_{40:\overline{29}|}}{{}_{29}E_{40}} \\
&= 75,597.32
\end{aligned}
$$

mientras que $150,000A_{69} = 74,954.44$. Cuando el tenedor de la póliza alcance la edad 69, la póliza probablemente será cambiada a una póliza de vida pagada por la cantidad nominal de

$$\frac{75,597.32}{A_{69}} = 151,287$$

Δ

Ejemplo 16.5:

El tenedor de la póliza del ejemplo 16.3 desea cambiar la póliza después de 5 años a una de vida totalmente pagada a la edad de 60 con una prima bruta de 2,000. Determine el nivel de beneficios que resulta de estos cambios.

Solución:

$P = 0.8(2,000) = 1,600$ por consiguiente con (16.6.5) se obtiene

$$2,491.24 + 1,600\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = b'\,A_{40}$$

Resolviendo para b' se obtiene $b' = 132,090$

Δ

Ejemplo 16.6:

Después de 5 años, el tenedor de la póliza del ejemplo 16.3 desea cambiar su póliza a temporal a edad 65 con una cobertura de 150,000. Determine la prima bruta apropiada después del cambio.

Solución:

$P = 0.8G$; por consiguiente de (16.6.5) se obtiene

$$2,491.24 + 0.8G\ \ddot{a}_{40:\overline{25}|} = 150,000A^{1}_{40:\overline{25}|}$$

La solución de esta ecuación es $G = 895.00$.

Δ

16.6.2 Un diseño alternativo

Un segundo diseño combina aspectos del seguro de vida variable con el diseño precedente de una póliza de plan flexible. En este diseño el énfasis sobre el plan de seguro no es tan fuerte como lo era en el primero. Adicionalmente, el énfasis está sobre ***el monto de riesgo*** (al que nos referimos previamente como el monto neto al riesgo), más que sobre el monto de los beneficios. Éste puede determinarse al principio del año de la póliza $k+1$ y una ecuación de crecimiento del fondo escrita en términos de este factor, al que representaremos mediante r_k. Nuestro análisis estará en términos de un modelo anual pero, en la práctica, un cálculo mensual o de mayor frecuencia es más común. La ecuación básica de crecimiento para la participación en el fondo, la análoga de (15.5.3) sin asignación para retiros, es

$$\left({}_kF + G - E - r_k\ \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}\right)\left(1+i'_{k+1}\right) = {}_{k+1}F \tag{16.6.7}$$

Nótese que la acumulación se da únicamente por el interés y, en caso de fallecimiento, el tenedor de la póliza recibe tanto la participación en el fondo, es decir, el fondo al principio del año, ${}_kF + G - E - r_k\ \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}$ y el monto del riesgo ajustado con el interés a la fecha del fallecimiento. El monto del riesgo puede seleccionarse para mantener un nivel aproximado del monto del beneficio total. Se le otorga al tenedor de la póliza una gran flexibilidad en la elección de la prima bruta G y el monto del riesgo r_k. El asegurador, usualmente, constituye un número de garantías. Generalmente, i'_{k+1} es un rendimiento de inversión que debe ser al menos igual a alguna tasa mínima i. El cargo por riesgo está generalmente, garantizado para no ser mayor que $r_k\ \overline{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}$, en donde la prima única del seguro a plazo de 1 año se calcula sobre la base de la tasa de interés i y una tabla de mortalidad utilizada en los cálculos de la reserva estatutaria.

Los cargos por gastos, E en (16.6.7), utilizados corrientemente son de varias formas incluyendo

- un cargo porcentual constante sobre todas las primas brutas,
- cargos de vencimiento tales como un porcentaje grande pero decreciente (con la duración) de la prima del primer año o un cargo por transacción tal como 25 por cada retiro,

- un monto nominal por póliza ya sea sólo en el primer año o una cantidad menor por cada año de la póliza, y

- un cargo en el primer año expresado como una cantidad por 1,000 de beneficio.

Los cargos más sujetos a reglamentación son los cargos en exceso por gastos del primer año y los cargos por riesgo. Los gastos se cubren por el asegurador, además de lo establecido por la fórmula de cargos, mediante un número de dispositivos. Algunos de éstos son

- acreditamiento reducido de interés, limitado a la tasa de garantía, para un corredor inicial de los valores en efectivo de la póliza, por ejemplo, los primeros 1000 de los valores en efectivo,

- una tasa de interés ampliada desde 1 a $1\frac{1}{2}\%$ entre la inversión neta producida y la tasa aplicada a los valores en efectivo, y

- reconociendo que parte del cargo por riesgo en realidad contiene alguna previsión para gastos, igual a lo que se hace en las primas regulares de los seguros a plazo.

Como ya se mencionó, el énfasis sobre el plan de seguro no es pronunciado.

16.7 Beneficios por incapacidad para un seguro de vida individual

En cualquier momento, se podría realizar un cálculo paralelo al empleado en los ejemplos 16.3 y 16.4 para determinar el plan que está implícito en cualquier patrón específico de primas y beneficios, cargos por riesgos corrientes, cargos por gastos, tasas de interés y reserva.

En la sección 10.5 discutimos los beneficios por incapacidad que se encuentran, comúnmente, junto con el seguro de vida individual. Se pueden hacer previsiones para el desistimiento de las primas del seguro de vida durante los periodos de incapacidad. Alternativamente, las pólizas pueden contener provisiones para un ingreso mensual de 5 o 10 por 1,000 del monto nominal si ocurre la incapacidad.

La cláusula de incapacidad normal provee un beneficio para la incapacidad total. La incapacidad total puede requerir una invalidez suficientemente severa que impida dedicarse a ninguna ocupación que genere ingresos, o puede exigir sólo la incapacidad para dedicarse a la propia ocupación. La incapacidad total que se continúa por un periodo de tiempo especificado en la póliza, denominado el ***periodo de espera***, permite que el tenedor de la póliza reciba los pagos del beneficio. El periodo de espera puede ser de 3, 4, 6 o 12 meses. En las pólizas con desistimiento de las primas, es común hacer ***retroactivos los beneficios***, es decir, reembolsar cualquier prima pagada por el asegurado durante el periodo de espera. La cobertura por la contingencia de incapacidad puede expirar antes de la fecha de maduración de una póliza de seguro de vida. Las edades de expiración del beneficio de incapacidad son, generalmente, 60 o 65 años; sin embargo, los beneficios en forma de una anualidad, ya sea como ingreso por incapacidad o como desistimiento de las primas cesarán, frecuentemente, a una mayor edad normalmente, a la fecha de maduración o a la fecha de pago total de la póliza de seguro de vida.

16.7.1 Beneficios de ingreso por incapacidad

Empecemos por expresar el valor presente actuarial del beneficio de ingreso por incapacidad de 1,000 al mes expedido a (x) bajo una cobertura que expira a la edad y y con un ingreso que seguirá hasta la edad u. Suponemos que el periodo de espera es de m meses. Utilizando las notaciones de los capítulos 9 y 10, podemos expresar el valor presente actuarial como

$$12{,}000 \sum_{k=0}^{u-x-1} v^{k}\, {}_{k}p_{x}^{(\tau)}\, v^{1/2}\, q_{x+k}^{(i)}\, v^{m/12}\, {}_{m/12}p_{[x+k+1/2]}^{i}\, \ddot{a}_{[x+k+1/2]+m/12:\overline{u-x-k-(1/2)-m/12}|}^{(12)\ i}$$

(16.7.1)

En el seguro de vida, $x+k+1/2$ se relaciona con la ***edad a la incapacidad***, mientras que $x+k+(1/2)+m/12$ representa la edad a la que ocurre la calificación para el beneficio.

En la práctica, se han utilizado varias simplificaciones de la fórmula anterior. Primera, el decremento i (por incapacidad) se supone que ocurre sólo si la persona incapacitada sobrevive al final del periodo de espera de m meses; si ocurre el fallecimiento durante ese periodo, el decremento se considera como

fallecimiento. Esto significa que el factor de sobrevivencia ${}_{m/12}p^{i}_{[x+k+1/2]}$, es innecesario ya que ha sido tomado en cuenta en la definición de $q^{(i)}_{x+k}$.
Una segunda simplificación es utilizar anualidades continuas para vidas incapacitadas, mediante la forma de aproximación

$$\bar{a}^{\,i}_{[x+k+1/2]+m/12:\overline{u-x-k-(1/2)-m/12|}} + \frac{1}{24} \qquad (16.7.2)$$

para el valor de la anualidad temporal mensual para la vida incapacitada en (16.7.1). En la práctica, la tasa de decremento total para una vida recientemente incapacitada estará compuesta de una tasa de mortalidad alta pero declinante y una tasa de recuperación sustancial que puede alcanzar un máximo y después disminuir. Bajo estas circunstancias, será mejor justificar (16.7.2) señalando que, en relación con la anualidad mensual, la anualidad continua pierde aproximadamente 1/2 interés mensual en cada pago mensual del tamaño 1/12. También, en caso de terminación por fallecimiento o recuperación hay una pérdida parcial del pago. En caso de sobrevivir a la edad u, esta pérdida parcial no ocurre. En consecuencia, es conveniente y quizás, conservador realizar un ajuste de la anualidad continua por 1/2 del pago mensual.

La tercera simplificación es usar una tabla de vida de decremento estándar simple para la sobrevivencia de vidas activas en lugar de una tabla de decremento doble con mortalidad e incapacidad. Esto tiene el efecto de aumentar el valor presente actuarial de los beneficios. La misma simplificación se usa al evaluar los valores de la anualidad de vida activa con el propósito de determinar las primas netas anuales y las reservas. También se usa una aproximación para el factor $q^{(i)}_{x+k}$. Empezamos con

$$q^{(i)}_{x+k} = \int_0^1 {}_t p^{(\tau)}_{x+k}\ \mu^{(i)}_{x+k+t}\ dt$$

$$= \int_0^1 {}_t p'^{(d)}_{x+k}\ {}_t p'^{(i)}_{x+k}\ \mu^{(i)}_{x+k+t}\ dt$$

Ahora reemplazamos ${}_t p'^{(d)}_{x+k}$ por su valor en $t = 1/2$ y escribimos esta función de decremento simple como ${}_{1/2}p_{x+k}$. Por lo tanto

$$q^{(i)}_{x+k} = {}_{1/2}p_{x+k} \int_0^1 {}_t p^{\prime(i)}_{x+k}\ \mu^{(i)}_{x+k+t}\ dt$$
$$= {}_{1/2}p_{x+k}\ \ q^{\prime(i)}_{x+k} \qquad (16.7.3)$$

Estas simplificaciones, conocidas como la ***aproximación de Phillips***, se produce sólo una ligera distorsión en las primas netas y en las reservas para primas netas. Haciendo todas estas simplificaciones podemos escribir (16.7.1) como

$$12{,}000 \sum_{k=0}^{y-x-1} v^{k+1/2}\ {}_k p_x\ {}_{1/2}p_{x+k}\ q^{\prime(i)}_{x+k}\ v^{m/12} \left(\overline{a}^{\,i}_{[x+k+1/2]+m/12\,:\,\overline{u-x-k-(1/2)-m/12|}} + \frac{1}{24} \right) \qquad (16.7.4)$$

Queda el problema de calcular los valores de las anualidades continuas para las vidas incapacitadas. Las referencias que se mencionan en la sección 16.8 proporcionan fuentes de información acerca de ello.

Pueden definirse funciones conmutativas similares a las que se introdujeron en el capítulo 10. Sea l_x un valor de una tabla de vida de decremento simple. Luego con $D_x = v^x\ l_x$ definimos

$$\overline{C}^{\,i}_x = v^{1/2}\ {}_{1/2}p_x\ q^{\prime\ (i)}_x D_x \qquad (16.7.5)$$

$${}^{u}\overline{C}^{\,i}_x = \overline{C}^{\,i}_x\ v^{m/12}\ \overline{a}^{\,i}_{[x+1/2]+m/12\,:\,\overline{u-x-(1/2)-m/12|}} \qquad (16.7.6)$$

Si el ingreso debe continuar para el resto de la vida, se reemplaza u en la notación con ω. Definimos

$${}_y\overline{M}^{\,i}_x = \sum_{z=x}^{y-1} \overline{C}^{\,i}_z \qquad (16.7.7)$$

$${}^{u}_{y}\overline{M}^{\,i}_x = \sum_{z=x}^{y-1} {}^{u}\overline{C}^{\,i}_z \qquad (16.7.8)$$

En esta notación, si la cobertura continua hasta la edad u, en tal forma que $y = u$, el subíndice y en la notación se suprimen (16.7.8).

Ahora podemos escribir el valor presente actuarial para el beneficio del ingreso por incapacidad en (16.7.4) como

$$\frac{12{,}000\,{}^{u}_{y}\overline{M}^{\,i}_{x} + 500\,v^{m/12}\,{}_{y}\overline{M}^{\,i}_{x}}{D_x} \tag{16.7.9}$$

16.7.2 Desistimiento del beneficio de las primas.

Vayamos a través del mismo proceso para un desistimiento general del beneficio de las primas. Suponemos que la prima P, que será desistida es pagadera g veces al año de por vida. Suponemos, además, que el beneficio es retroactivo por lo que las primas pagadas durante el periodo de espera son reembolsadas al final del periodo de espera. La diferencia primordial entre este y el beneficio de ingreso por incapacidad es que el beneficio desistido es el g-ésimo pago de una anualidad que empieza en la fecha de la primera prima vencida después del término del periodo de espera. Si suponemos que las incapacidades ocurren uniformemente durante el año, existirá un periodo promedio de $1/(2g)$ entre el final del periodo de espera y la primera fecha subsecuente de vencimiento de la prima. En consecuencia, el valor de la anualidad a ser usado en la fórmula del valor presente actuarial es

$$1/(2g)\,|\,\ddot{a}^{(g)\,i}_{[x+k+1/2]+m/12}$$

Pero esto se puede aproximar razonablemente mediante

$$\overline{a}^{\,i}_{[x+k+1/2]+m/12} \tag{16.7.10}$$

que tiene la ventaja de ser independiente de la frecuencia, g, de los pagos de primas al año.

El monto del beneficio retroactivo puede considerarse como el promedio $(m/12)P$, que es claramente el caso si las primas son pagaderas continuamente ó si m es un entero múltiplo de g. Para ver que sucede en otros casos, considere primas semestrales y un periodo de espera de 4 meses. Si el periodo de espera termina 2 meses después del siguiente pago de prima, no se paga la prima durante el periodo de espera. De otra manera, $(1/2)P$ se paga durante el periodo de espera. Si suponemos una distribución uniforme de las incapacidades en el año, entonces llegamos a

$$\left[\frac{2}{6}(0)+\left(\frac{4}{6}\right)\frac{1}{2}\right]P=\frac{4}{12}P$$

como la media del monto de beneficio retroactivo.

Haciendo uso de varias simplificaciones discutidas aquí y en la subsección precedente sobre beneficios de ingreso por incapacidad, expresamos ahora el valor presente actuarial del beneficio desistido como

$$P\sum_{k=0}^{y-x-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_x\;{}_{1/2}p_{x+k}\;q'^{(i)}_{x+k}\;v^{(m/12)}\left(\bar{a}^{(i)}_{\overline{[x+k+1/2]+m/12}}+\frac{m}{12}\right) \qquad (16.7.11)$$

En términos de las funciones conmutativas definidas en (16.7.5) a (16.7.8), este valor presente actuarial puede escribirse como

$$\frac{P\left({}^{\omega}_{y}\overline{M}^{i}_{x}+(m/12)v^{m/12}\,{}_{y}\overline{M}^{i}_{x}\right)}{D_x} \qquad (16.7.12)$$

16.7.3 Primas y reservas netas anuales.

Las primas netas anuales para estos beneficios se encuentran mediante el principio de equivalencia, al igualar el valor presente actuarial de los beneficios al valor presente actuarial de las primas netas. Para un beneficio desistido de una póliza de vida pagada hasta la edad 75 con primas y cobertura sobre el beneficio de desistimiento que continua a la edad 65, la prima neta anual, ${}_{65-x}\pi_x$, estaría determinada mediante

$${}_{65-x}\pi_x\;\ddot{a}_{x:\overline{65-x}|}=\frac{P\left({}^{75}_{65}\overline{M}^{i}_{x}+(m/12)v^{(m/12)}\,{}_{65}\overline{M}^{i}_{x}\right)}{D_x}$$

O bien

$${}_{65-x}\pi_x=\frac{P\left({}^{75}_{65}\overline{M}^{i}_{x}+(m/12)v^{(m/12)}\,{}_{65}\overline{M}^{i}_{x}\right)}{N_x-N_{65}} \qquad (16.7.13)$$

en donde P representa la prima a la que se renunciará.

Las reservas finales de vida activa se expresan más convenientemente mediante una fórmula de diferencia de primas,

$$ {}_kV = \left({}_{65-x-k}\pi_{x+k} - {}_{65-x}\pi_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{65-x-k}|} \qquad (16.7.14) $$

La reserva final para una vida incapacitada es el valor presente actuarial de los beneficios por incapacidad futuros, calculados bajo el supuesto de que el asegurado ha incurrido en una incapacidad calificada. El monto de la prima renunciada, o tasa de ingreso por incapacidad, se multiplica por el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia por incapacidad apropiada. Este valor toma en cuenta la edad a la incapacidad, la duración desde la incapacidad y la edad final para los beneficios.

16.8 Notas y Referencias.

Las pólizas individuales de ingreso por retiro se han usado en los seguro de vida e ingreso por retiro de beneficios de fondos de empleados. Estas pólizas han constituido el tema de muchos documentos actuariales. Fassel (1930) proporciona un importante documento temprano. Smith (1961) usa un modelo continuo.

Las bases para las anualidades variables se construyeron en un documento de Duncan (1952). Desde 1969 ha existido una conmoción sobre el seguro de vida variable. El documento de Fraser, Millar y Sternhell (1969), y su amplia discusión, es la referencia básica. Miller (1971) proporciona una introducción menos formal y algunos ejemplos numéricos. Los documentos de Biggs (1969) y Macarchuk (1969), y su discusión, generaron información adicional sobre las anualidades variables.

Es difícil discutir los planes flexibles de seguro en un libro dedicado a los modelos actuariales básicos. Los temas relacionados con estos planes son primordialmente reglamentarios y administrativos. El tipo de póliza descrito en la subsección 16.6.1 fue estudiado por Chapin (1976). El tipo de póliza de la subsección 16.6.2 es el tema del documento de Chalke y Davlin (1983).

El tema de los beneficios por incapacidad vinculados al seguro de vida individual se cubre en una monografía de Hunter y Phillips (1932) y en el libro de texto, *Individual Health Insurance*, de O'Grady (1987). Cueto (1954) revisa la notación y los procesos numéricos y proporciona valores monetarios para estos beneficios. Véase también la publicación de la Sociedad de Actuarios "*Monetary Tables for Disability Benefits based on 1952 Disability Study CSO Period 2 combined with the 1958 CSO Mortality Table (1962).*"

Ejercicios.

Sección16.2

16.1 Utilice los resultados del capítulo 5, acerca de la distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, para expresar el valor presente actuarial en (16.2.6) como

$$\frac{i}{i^{(m)}}\left[a_{\overline{n}|}+v^n\,{}_np_x\;a_{x+n}+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d^{(m)}}\right)v^n\,{}_np_x\;A_{x+n}\right]$$

[Sugerencia: refiérase al ejercicio 5.17.]

16.2 Demuestre que Z como se define en (16.2.1) tiene la misma varianza que la variable aleatoria del valor presente Y para una anualidad vitalicia continua diferida 1 al año, y por tanto Var[Z] está dada por (5.3.20) o por la expresión equivalente del ejercicio 5.40.

16.3 Considere una anualidad de reembolso de pago al contado parcial con la variable aleatoria del valor presente definida como

$$Z^*=\begin{cases}\bar{a}_{\overline{T}|}+(\rho\,G-T)v^T & T<\rho\,G,\ 0<\rho<1\\ \bar{a}_{\overline{T}|} & T\geq\rho\,G\end{cases}$$

a. Demuestre que (16.2.11) puede rescribirse para una anualidad de reembolso de pago al contado parcial como

$$G(1-r)=\bar{a}_x+\rho\;G\;\bar{A}^{1}_{x\overline{\rho\,G}|}-\left(\bar{I}\;\bar{A}^{1}_{x\overline{\rho\,G}|}\right)$$

b. Forme $H(G) = G(1-r) - \overline{a}_x - \rho\, G\, \overline{A}^1_{x\overline{\rho\, G}|} + \left(\overline{I}\ \overline{A}^1_{x\overline{\rho\, G}|}\right)$ con el propósito de determinar G tal que $H(G) = 0$.

(i) Exhiba $H'(G)$ y $H''(G)$

(ii) Discuta el signo de $H'(G)$ y $H''(G)$ en la vecindad de una raíz.

16.4 Demuestre que, para Z determinada en el ejemplo 16.1,

$$Var[Z] = \frac{v^{2n}\left[{}^2\overline{A}_x - \overline{A}_x{}^2\right]}{\delta^2}$$

Sección16.3

16.5 Use los resultados del capítulo 5, respecto a la distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, para expresar el valor presente actuarial en (16.3.4) como

$$\frac{i}{i^{(m)}}\left[a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d^{(m)}}\right)A^1_{x:\overline{n}|}\right]$$

[Sugerencia: refiérase al ejercicio 5.17.]

16.6 Si Z se define como en (16.3.1), demuestre que

$$Var[Z] = \frac{{}^2\overline{A}_{x:\overline{n}|} - \overline{A}_{x:\overline{n}|}{}^2}{\delta^2}$$

16.7 Pruebe que el valor presente actuarial de un seguro de ingreso familiar continuo a n años con el valor de la anualidad calculada a una fuerza de interés δ' es

$$\frac{\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} - e^{-\delta' n}\, {}''\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\delta'}$$

en donde ${}''\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}$ es evaluado a una fuerza de interés $\delta'' = \delta - \delta'$.

16.8 Una póliza prové una anualidad cierta continua de 1 al año empezando en la fecha de la muerte de (x). Si la muerte ocurre dentro de los primeros 15 años contados a partir de la fecha de la expedición de la póliza, esta anualidad será pagada hasta el final del año 20 contado también desde la fecha de expedición de la póliza. Si la muerte ocurre entre los años 15 y 20, contabilizados desde la fecha de expedición de la póliza, la anualidad se pagadera con seguridad durante 5 años. La cobertura cesa a los 20 años de la expedición de la póliza. Escriba una expresión que determine la prima neta única de este proceso.

16.9 Un contrato estipula el pago de 1000 u.m. al final de 20 años si el asegurado está vivo o un ingreso de 10 u.m. al mes, a partir del evento del fallecimiento y hasta antes del aniversario número 20 de la póliza. El primer pago de ingreso es vencido al final del mes de la póliza del fallecimiento, pero no se hacen pagos después de 20 años desde la fecha de la expedición de la póliza. Escriba la fórmula para la prima neta anual a la edad x.

16.10 Demuestre que

$$\overline{a}_{\overline{n}|} - \overline{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - v^{n}{}_{n}q_{x}}{\delta}$$

16.11 a. En relación con el ejemplo 16.2, construya el valor presente de los beneficios como una función del tiempo transcurrido hasta que se presenta la muerte.

b. Exprese el valor presente actuarial de los beneficios mediante la técnica del pago agregado.

c. Verifique que la integración por partes en la respuesta de (b) produce la expresión obtenida en el ejemplo 16.2.

Sección16.4

16.12 Para una póliza de ingreso por retiro totalmente discreta, definimos a como el único entero tal que ${}_{a}V \le 1$ y ${}_{a+1}V > 1$. Complete el análisis para la póliza de ingreso por retiro totalmente discreta en la siguiente forma:

a. Determine ${}_aV$ retrospectivamente en términos de la prima neta anual P.

b. Determine ${}_aV$ prospectivamente en términos de P usando la teoría del interés compuesto.

c. Resuelva para P igualando las dos expresiones para ${}_aV$.

d. A partir de lo anterior y de las desigualdades ${}_aV \le 1$, $P \le P_{\overline{x:a|}}$, ${}_{a+1}V > 1$ y $P > P_{\overline{x:a+1|}}$, demuestre que a es el mayor entero tal que

$$\frac{\overline{s}_{\overline{a}|}}{\ddot{a}_{\overline{x:a|}}} \ge k$$

16.13 Una versión ampliada del teorema de Hattendorf para un seguro general totalmente continuo es

$$\int_0^n \left(v^t b_t - \overline{P}\,\overline{a}_{\overline{t|}}\right)^2 {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt + \left(v^n b_n - \overline{P}\,\overline{a}_{\overline{n|}}\right)^2 {}_np_x$$
$$= \int_0^n v^{2t}(b_t - {}_t\overline{V})^2\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

en donde n es el periodo de pago de la prima y también el plazo del seguro, b_t es el beneficio por fallecimiento en caso de la muerte en el tiempo t y b_n es el beneficio de maduración (véase el ejercicio 7.45). Mediante lo anterior, demuestre que para un seguro de ingreso por retiro, sobre una base totalmente continua, la varianza de la variable de pérdidas es igual a la varianza de la variable de pérdidas para un seguro dotal a un año de un monto unitario, y por tanto es igual

$$\frac{{}^2\overline{A}_{x\overline{a}|} - \overline{A}_{x\overline{a}|}^2}{\left(\delta\,\overline{a}_{x\overline{a}|}\right)^2}$$

16.14 Demuestre que si, para una póliza de ingreso por retiro con $a = h + r$ en donde $h = [a]$ y $0 < r < 1$, entonces con el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en el año de la póliza $h+1$, $\overline{a}_{x\overline{a}|}$ puede se expresado como:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{h}|} + {}_hE_x \frac{(\delta - q_{x+h})\bar{a}_{\overline{n}|} + v^r r\, q_{x+h}}{\delta}$$

Sección16.5

16.15 a. Verifique que

$$\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1\right)(1+i) = p_x\, \ddot{a}_{\overline{x+1:n-1}|} + q_x\, \ddot{a}_{\overline{n-1}|}$$

b. Verifique que (16.5.4) es válida para una anualidad variable con el pago realizado sobre una base de vida cierta a n años.

16.16 a. Reacomode (16.5.10) para la siguiente forma equivalente

$$b_{k+1} = \left[b_k - \frac{(b_k - 1)P(\bar{A}_x)}{{}_1E_{x+k}\ {}_{k+1}V(\bar{A}_x)} \right] \frac{1+i'_{k+1}}{1+i}$$

b. Si para la fórmula de la parte (a), $i'_{k+1} = i$, $k = 0,1,2,\ldots$, y $b_0 = 1$, demuestre que $b_{k+1} = 1$, $k = 0,1,2,\ldots$

c. Si para la fórmula en la parte (a) $i'_{k+h} = i$ para alguna $k > 0$ y $h = 1,2,\ldots$, demostrar que b_{k+h} se restringirá hacia 1.

16.17 Vuelva a trabajar sobre el ejercicio 15.14(b) suponiendo que $p'_{x+h} = p_{x+h}$ y demuestre que $r_{h+1} = b_{h+1}/b_h$ como se proporciona en (16.5.4).

16.18 Un seguro de vida entera fijo con prima variable, modelo discreto, tiene un beneficio por fallecimiento en el año $k+1$ igual a $F_{k+1} + (1 - {}_{k+1}V_x) = 1 + (F_{k+1} - {}_{k+1}V_x)$, en donde la participación en el fondo F_k satisface la ecuación recurrente

$$(F_k + P_x)(1 + i'_{k+1}) = q_{x+k}\ b_{k+1} + p_{x+k}\ F_{k+1}.$$

Aquí i'_{k+1} es la tasa de interés ganada en las inversiones respectivas en el año $k+1$, y la prima P_x y reserva ${}_kV_x$ se basan sobre la tasa de interés i.

a. Demuestre que la ecuación recurrente puede reacomodarse como

$$(F_k + P_x)(1+i'_{k+1}) - q_{x+k}(1 - {}_{k+1}V_x) = F_{k+1}$$

e interprete esta ecuación.

b. Si $i'_{k+1} = i$, $k = 0,1,2,\ldots$, demuestre que $F_{k+1} = {}_{k+1}V_x$ en tal forma que b_{k+1} es constante en 1.

c. Demuestre que

$$b_{k+1} = b_k + (F_k + P_x)i'_{k+1} - ({}_kV_x + P_x)i.$$

[Note que en este proyecto el beneficio por fallecimiento para el año $k+1$ es b_{k+1} en lugar de b_k, como en (16.5.9). Adicionalmente, el costo del seguro a plazo de un año, a partir del inicio del año $k+1$, es aquí $b_{k+1}q_{x+k}/(1+i'_{k+1})$ en lugar de $b_k q_{x+k}/(1+i)$, como en (16.5.9).]

Sección 16.6

16.19 El tenedor de la póliza del ejemplo 16.3 desea cambiar la póliza después de 5 años a un seguro dotal a la edad de 65 con una prima bruta anual de 5,000. Determine el nivel del beneficio que resulta de estos cambios.

16.20 a. El tenedor de la póliza del ejercicio 16.19 decide elegir sólo 160,000 de seguro dotal a la edad de 65, pero pagará todavía una prima bruta anual de 5,000 hasta que sea pagadera una prima fraccionaria final un año después de la fecha de la última prima total. ¿A qué edad es pagadera la prima fraccionaria?

b. Para la póliza de la parte (a), ¿Cuál será la reserva al final de 10 años, después del cambio de la forma de dotación?

Sección 16.7

16.21 a. Exprese, en términos de las funciones conmutativas, la prima neta anual, pagadera a la edad de 60, para un seguro de ingreso por incapacidad expedido a (35) de 1,000 al mes pagadera a la edad de 65 en caso de que (35) se incapacite antes de la edad 60 y sobreviva un periodo de espera de 6 meses.

b. Escriba una fórmula para la reserva final de una vida activa al final de 10 años para el seguro de la parte (a).

16.22 Una cláusula de incapacidad, inscrita a la expedición de una póliza de vida entera sobre (x), si (x) llega a estar totalmente incapacitado antes de la edad y y permanece incapacitado durante un periodo de espera de 6 meses, proporciona los siguientes beneficios:

- un ingreso mensual que se inicia al final del periodo de espera y pagadero de por vida durante la continuación de la incapacidad y
- desistimiento de las primas del seguro de vida que quedaron vencidas durante o después de la fecha inicial de la incapacidad y durante la continuación de la incapacidad.

Determine el monto del ingreso mensual y el monto de la prima anual que será desistida (suponiéndola pagadera continuamente) si la prima neta anual para la claúsula de incapacidad es

$$\frac{1720\,{}_{y}^{\omega}\bar{M}_{x}^{i} + 200v^{1/2}\,{}_{y}\bar{M}_{x}^{i}}{N_x - N_y}.$$

TEORÍA AVANZADA DE VIDAS MULTIPLES

17.1 Introducción

En el Capítulo 8, definimos los estatus de vida conjunta y del último sobreviviente, expresando sus variables aleatorias del tiempo transcurrido hasta la interrupción en términos de las vidas individuales. Con esto, se ampliaron los conceptos de los Capítulos 3-5 para obtener funciones actuariales para estatus de sólo dos vidas. Bajo el supuesto de que los tiempos de vida futuros de las dos vidas eran independientes, se expresaron las funciones actuariales para vidas múltiples en términos de las funciones de una sola vida, haciendo con ello posible calcularlas utilizando directamente las tablas de vida disponibles para vidas simples. En el Capítulo 8 también se discutieron las probabilidades, anualidades y seguros, contingentes sobre el orden de los fallecimientos de las dos vidas.

En este capítulo ampliaremos estas ideas a más de dos vidas. De hecho, con más de dos vidas, puede generalizarse la idea del estatus de sobrevivencia. (Véanse las Secciones 17.2 y 17.3.) Teniendo como meta final la evaluación numérica de estas funciones, se usa el Teorema 17.1 para expresar las funciones de sobrevivencia de estos estatus en términos únicamente de las funciones de sobrevivencia para vidas conjuntas. Nuevamente, con el supuesto de los tiempos de vida independientes, estas funciones de sobrevivencia de vidas conjuntas se evalúan como productos de probabilidades de sobrevivencia de una vida individual. El Teorema 17.1 es una forma de un teorema general de la teoría de la probabilidad utilizada en el llamado método de inclusión-exclusión. En el Apéndice de este capítulo se presenta la expresión y demostración de este teorema más general.

Las probabilidades y funciones de contingencia también se generalizan para cubrir más de dos vidas. Además, en la Sección 17.6 se discuten anualidades reversibles, que pueden ofrecerse como beneficios por fallecimiento posterior al retiro, en los planes de retiro.

Se desarrollan los modelos de primas anuales de los Capítulos 6 y 7 para estatus de vidas múltiples en la Sección 17.7.

17.2 Estatus más generales

Para m vidas, $(x_1),(x_2),...,(x_m)$, el ***estatus del sobreviviente*** k, representado por

$$\left(\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}\right)$$

existe durante todo el tiempo en el que al menos k de las m vidas sobrevivan y se interrumpe hasta el primer $m-k+1$ fallecimiento entre las m vidas. Las anteriores definiciones de estatus de vida conjunta y del último sobreviviente son el estatus de m sobreviviente y el estatus de un sobreviviente respectivamente. Cuando hagamos referencia a cualquiera de estos estatus, utilizaremos su símbolo especial en lugar de la forma general del sobreviviente k. El tiempo de vida futuro del estatus del sobreviviente k es el k-ésimo máximo del conjunto de m tiempos de vida $T(x_1),T(x_2),...,T(x_m)$. Al igual que los tiempos de vida futuros de los Capítulos 3 y 8, éste para el estatus del sobreviviente k es el periodo de existencia desde un tiempo inicial fijo hasta un tiempo de terminación aleatorio. Con sólo un cambio en la notación para indicar el estatus

$$\left(\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}\right)$$

la distribución de probabilidad y las funciones de las tablas de vida del Capítulo 3 son aplicables a los tiempos de vida futuros de este estatus.

Los beneficios de la anualidad y del seguro se definen en términos del tiempo de vida futuro de un estatus del sobreviviente k exactamente, como lo fueron para (x) en los Capítulos 4 y 5. Para una anualidad continua de una unidad monetaria pagadera anualmente durante todo el tiempo en el que al menos k de m vidas sobrevivan, tenemos de (5.3.2B) que el valor presente actuarial es

$$\overline{a}_{\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}} \, dt \qquad (17.2.1)$$

El seguro que paga una unidad al primer $m-k+1$ fallecimiento entre m vidas tendrá la prima neta única determinada por (4.2.6), es decir,

$$\overline{A}\,\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m} = \int_0^\infty v^t\,{}_t p\,\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}\,\mu\,\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}(t)\,dt \qquad (17.2.2)$$

Definiremos un nuevo tipo de estatus para el análisis y evaluación de probabilidades y valores presentes actuariales para estos beneficios (y otras combinaciones de beneficios). Existe para las m vidas $(x_1),(x_2),\ldots,(x_m)$, el ***estatus diferido del sobreviviente*** $[k]$, mientras sobrevivan exactamente k de las m vidas; es decir, empieza a existir al $m-k$ ésimo fallecimiento y continúa existiendo hasta el siguiente fallecimiento. La notación para este estatus será

$$\left(\frac{[k]}{x_1 x_2 \cdots x_m}\right)$$

Para $k=m$, el estatus diferido del sobreviviente $[k]$ coincide con el estatus de m sobreviviente. Para $k=0$, el estatus diferido del sobreviviente $[0]$ existe siempre siguiendo al m-ésimo fallecimiento.

La postergación de la existencia de

$$\left(\frac{[k]}{x_1 x_2 \cdots x_m}\right)$$

lo hace diferente del estatus general, (u), del Capítulo 8. Por ejemplo, para $k<m$, ${}_t p\,\frac{[k]}{x_1 x_2 \cdots x_m}$, que es la probabilidad de que exactamente k de las m vidas sobrevivan en el tiempo t, no es igual a 1 en $t=0$ y, por tanto, no cumple con los requisitos de una función de sobrevivencia como las que se dan en el Cuadro 3.1. Para $k=0$ a medida que $t\to\infty$, ${}_t p\,\frac{[0]}{x_1 x_2 \cdots x_m}$ tiende a 1, lo que también viola aquellos requisitos. Más aún, para un estatus diferido del sobreviviente $[k]$, el periodo de existencia y el periodo desde el tiempo inicial hasta el tiempo de interrupción no son iguales, como lo son para el estatus general. Esto significa que los beneficios de la anualidad deben definirse

cuidadosamente para este nuevo estatus. Se define que la anualidad con valor presente actuarial $\overline{a}_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{[k]}$ será pagadera durante el tiempo de vida futuro del estatus diferido del sobreviviente $[k]$, de aquí que es una anualidad diferida con un periodo de postergación aleatorio. Ya que el tiempo de interrupción del estatus diferido del sobreviviente $[k]$ es igual al tiempo de la interrupción del estatus del sobreviviente k, los beneficios del seguro pagaderos a la interrupción del estatus diferido son, esencialmente, aplicaciones del estatus del sobreviviente k.

Ejemplo 17.1

Una anualidad continua es pagadera durante el tiempo en que cualquiera de $(w),(x),(y)$ y (z) estén con vida. A cada fallecimiento la tasa anual de pago se reduce en 50%. Exprese el valor presente actuarial de dicha anualidad en términos de $\overline{a}_{\overline{wxyz}}^{[k]}$, $k=1,2,3,4$. Suponga una tasa de beneficio inicial de una unidad.

Solución:

El valor presente actuarial es

$$\overline{a}_{\overline{wxyz}}^{[4]}+\frac{1}{2}\overline{a}_{\overline{wxyz}}^{[3]}+\frac{1}{4}\overline{a}_{\overline{wxyz}}^{[2]}+\frac{1}{8}\overline{a}_{\overline{wxyz}}^{[1]}$$

En el Ejemplo 17.2 se continúa la discusión de esta anualidad (después del Teorema 17.1) ∇

En el Capítulo 8, expresamos las probabilidades del último sobreviviente y los valores presentes actuariales relacionados, en términos de aquéllas para los estatus simples y de vidas conjuntas. Utilizaremos el siguiente teorema para ayudar a obtener los mismos resultados para los estatus generales del sobreviviente k. En el Apéndice de este capítulo se proporciona una proposición más general de este teorema para eventos arbitrarios, así como su demostración.

Teorema 17.1:

Sea ${}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}^{\overline{\quad [j] \quad}}$ la probabilidad de que exactamente j de las m vidas estén con vida en el tiempo t. Sea

$$ {}_tB = \sum {}_tP_{x_{(1)}x_{(2)}\cdots x_{(j)}} $$

en donde la suma se hace sobre todas las combinaciones de j de m vidas. Luego para números arbitrarios, $c_0, c_1, \ldots, c_m$

$$ \sum_{j=0}^{m} c_j \, {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}^{\overline{\quad [j] \quad}} = c_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^j c_0 \, {}_tB_j \qquad (17.2.3) $$

El Teorema 17.1 es aplicable a vidas con variables aleatorias del tiempo de vida futuro dependientes. Sin embargo, en las aplicaciones supondremos tiempos de vida futuros mutuamente independientes y calcularemos los términos de las ${}_tB_j$'s como productos de probabilidades de sobrevivencia individuales.

Ejemplo 17.2

Exprese el valor presente actuarial de la anualidad que se describió en el Ejemplo 17.1 en términos de los valores presentes actuariales para anualidades con estatus simple y de vida conjunta.

Solución:

El valor presente actuarial es

$$ \int_0^{\infty} v^t \left(\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{4-j} {}_tp_{wxyz}^{\overline{\quad [j] \quad}} \right) dt $$

Los coeficientes y sus diferencias se presentan a continuación.

j	c_j	Δc_j	$\Delta^2 c_j$	$\Delta^3 c_j$	$\Delta^4 c_j$
0	0	1/8	0	1/8	0
1	1/8	1/8	1/8	1/8	-
2	1/4	1/4	1/4	-	-
3	1/2	1/2	-	-	-
4	1	-	-	-	-

En consecuencia, la integral es igual a

$$\int_0^\infty v^t \left(\frac{1}{8} {}_tB_1 + \frac{1}{8} {}_tB_3 \right) dt$$
$$= \frac{1}{8}\left(\bar{a}_w + \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z \right) + \frac{1}{8}\left(\bar{a}_{wxy} + \bar{a}_{wxz} + \bar{a}_{wyz} + \bar{a}_{xyz} \right)$$

Puede examinarse la racionalidad de dichas expresiones por medio de la interpretación de la forma final en términos de un conjunto de anualidades para las que, en cualquier resultado, el total de sus tasas de pago es igual a la tasa de pago de la anualidad original. Por ejemplo, en este caso particular la anualidad original comienza a pagarse a una tasa de 1, mientras que la forma final se relaciona con un conjunto de anualidades de cuatro vidas únicas y cuatro vidas conjuntas pagando todas una tasa de 1/8. En el tiempo que media entre la primera y la segunda muerte, la tasa original de la anualidad será 1/2, mientras tres de las anualidades de vida únicas y una de las anualidades de vida conjunta estarán todavía en estatus de pago, cada una con una tasa de 1/8. Las tasas para otros tiempos pueden compararse en una forma similar. ∇

Tenemos una expresión para ${}_tp_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\quad\quad\quad

Demostración:

En el Teorema 17.1, establezca $c_k = 1$ y $c_j = 0$ para $j \neq k$. Para estas c_j's, $\Delta^j c_0 = (E-1)^j c_0 = (-1)^{j-k}\binom{j}{k}$, $j = k, k+1, \ldots, m$.

Ejemplo 17.3

Exprese el valor presente actuarial de una anualidad continua de 1 u.m. al año mientras exactamente tres de cinco vidas sobrevivan, en términos de valores presentes actuariales de anualidades de vidas conjuntas.

Solución:

Utilizando (5.3.2B) y luego (17.2.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x_1x_2x_3x_4x_5}^{[3]} &= \int_0^\infty {}_tp_{x_1x_2x_3x_4x_5}^{[3]}\, dt \\
&= \int_0^\infty v^t \left({}_tB_3 - 4\,{}_tB_4 + 10\,{}_tB_5\right) dt \\
&= \bar{a}_{x_1x_2x_3} + \bar{a}_{x_1x_2x_4} + 8 \text{ más valores de la anualidad de tres vidas conjuntas} \\
&\quad - 4\left(\bar{a}_{x_1x_2x_3x_4} + \bar{a}_{x_1x_2x_3x_5} + 3 \text{ más valores de la anualidad de cuatro vidas conjuntas}\right) \\
&\quad + 10\,\bar{a}_{x_1x_2x_3x_4x_5}
\end{aligned}$$

De la relación

$$ {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}^{h} = \sum_{j=h}^{m} {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}^{[j]} \tag{17.2.5}$$

tenemos el siguiente corolario al Teorema 17.1.

Corolario 17.2:

Para números arbitrarios $d_0, d_1, , d_m, \ldots, d_m$

$$\sum_{j=0}^{m} d_j\, {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}^{j} = d_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1\, {}_tB_j \tag{17.2.6}$$

Demostración:

Utilizando (17.2.5) empezamos con

$$\sum_{h=0}^{m} d_h \, {}_tp\overline{\frac{h}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \sum_{h=0}^{m} \sum_{j=h}^{m} d_h \, {}_tp\overline{\frac{[j]}{x_1 x_2 \cdots x_m}}$$

Intercambiando las sumatorias, podemos escribir

$$\sum_{j=0}^{m} d_j \, {}_tp\overline{\frac{j}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{h=0}^{j} d_h \right) {}_tp\overline{\frac{[j]}{x_1 x_2 \ldots x_m}}$$

las que, al definir $c_j = \sum_{h=0}^{j} d_h$ para $j = 0,1,...,m$, está en la forma de (17.2.3). Para estas c 's, $c_0 = d_0$ y $\Delta c_j = d_{j+1}$ para $j = 0,1,...,m-1$, por lo tanto $\Delta^j c_0 = \Delta^{j-1}(\Delta c_0) = \Delta^{j-1} d_1$ para $j = 1,2,...,m$. Entonces tenemos, del lado derecho de (17.2.3),

$$\sum_{j=0}^{m} d_j \, {}_tp\overline{\frac{j}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = d_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 \, {}_tB_j \qquad \nabla$$

El Corolario 17.2 puede utilizarse para expresar la función de sobrevivencia del estatus del sobreviviente k en términos de funciones de sobrevivencia de vida conjunta y de una sola vida.

Corolario 17.3:

$${}_tp\overline{\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \sum_{j=k}^{m} \left[(-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} \right] {}_tB_j \qquad (17.2.7)$$

Demostración:

En el Corolario 17.2, establezca $d_k = 1$ y $d_j = 0$, para $j \neq k$. Para estas d 's, $\Delta^{j-1} d_1 = (E-1)^{j-1} d_1 = (-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1}$, $j = k, k+1, ..., m$ ∇

De la expresión para su función de sobrevivencia en (17.2.7) podemos obtener, por diferenciación, una expresión paralela para la *f.d.p.* del tiempo de vida futuro T del estatus del sobreviviente k, como

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - {}_tp\frac{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}\right)$$
$$= \sum_{j=k}^{m}(-1)^{j-k}\binom{j-1}{k-1}\left(-{}_tB_j'\right) \qquad (17.2.8)$$

El valor presente actuarial y otras características de la distribución de probabilidad del valor presente de un conjunto de pagos que dependen de T pueden determinarse usando (17.2.7) o (17.2.8). Para dichas determinaciones usaremos el hecho de que $-{}_tB_j'$ es la suma de las f.d.p.'s de los tiempos de vida futuros de las $\binom{m}{j}$ combinaciones de los estatus de j-vidas conjuntas de m vidas.

Ejemplo 17.4

Sea T que representa el tiempo de vida futuro del estatus del último sobreviviente de tres vidas. Muestre en términos de las funciones de vida conjunta y simple

a. la función de sobrevivencia

b. $E\left[v^T\right]$

c. $E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right]$

Solución:

a. Por (17.2.7),

$${}_tp_{\overline{x_1x_2x_3}} = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}\binom{j-1}{0}{}_tB_j$$
$$= {}_tB_1 + (-1){}_tB_2 + {}_tB_3$$

en donde

$${}_tB_1 = {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_3}$$
$${}_tB_2 = {}_tp_{x_1x_2} + {}_tp_{x_1x_3} + {}_tp_{x_2x_3}$$
$${}_tB_3 = {}_tp_{x_1x_2x_3}$$

b. Representamos $E\left[v^T\right]$ mediante $\overline{A}_{\overline{x_1x_2x_3}}$ y usamos (17.2.8) para obtener

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\overline{x_1x_2x_3}} &= \int_0^\infty v^t(-1)\left({}_tB_1' - {}_tB_2' + {}_tB_3'\right)dt \\ &= \overline{A}_{x_1} + \overline{A}_{x_2} + \overline{A}_{x_3} - \left(\overline{A}_{x_1x_2} + \overline{A}_{x_1x_3} + \overline{A}_{x_2x_3}\right) + \overline{A}_{x_1x_2x_3}\end{aligned}$$

c. Reemplazando v^T por $\overline{a}_{\overline{T}|}$ en la parte (b) y representando $E\left[\overline{a}_{\overline{T}|}\right]$ mediante $\overline{a}_{x_1x_2x_3}$ tenemos

$$\overline{a}_{x_1x_2x_3} = \overline{a}_{x_1} + \overline{a}_{x_2} + \overline{a}_{x_3} - \left(\overline{a}_{x_1x_2} + \overline{a}_{x_1x_3} + \overline{a}_{x_2x_3}\right) + \overline{a}_{x_1x_2x_3}$$

Para cualquier estatus general, $v^T + \delta\overline{a}_{\overline{T}|} = 1$, así que podemos calcular cualquiera de los valores esperados a partir de los otros usando

$$\overline{A}_{\overline{x_1x_2x_3}} + \delta\,\overline{a}_{\overline{x_1x_2x_3}} = 1 \qquad \nabla$$

Diferenciando ambos lados de (17.2.6), podemos ampliar la relación a las *f.d.p.*'s correspondientes. Esto puede usarse para seguros que pagan una cantidad sobre cada uno de los fallecimientos entre las *m* vidas.

Ejemplo 17.5

Considere un seguro sobre $(x),(y)$ y (z) que paga 1 u.m. al primer fallecimiento, 2 u.m. sobre el segundo fallecimiento y 3 u.m. sobre el tercer fallecimiento. Exprese la prima neta única para el seguro en términos de primas netas únicas para seguros de monto unitario sobre estatus simples y de vida conjunta.

Solución:

Sea $f_j(t)$ la *f.d.p.* para el tiempo de vida futuro del estatus del sobreviviente j. La prima neta única es

$$\int_0^\infty v^t\left[1f_3(t) + 2f_2(t) + 3f_1(t)\right]dt$$

En la notación de (17.2.6) tenemos lo siguiente.

j	d_j	Δd_j	$\Delta^2 d_j$	$\Delta^3 d_j$
0	0	3	-4	4
1	3	-1	0	-
2	2	-1	-	-
3	1	-	-	-

En consecuencia la prima neta única es

$$\int_0^\infty v^t(-1)\left(3\,{}_tB_1' - {}_tB_2'\right)dt = 3\left(\overline{A}_x + \overline{A}_y + \overline{A}_z\right) - \left(\overline{A}_{xy} + \overline{A}_{xz} + \overline{A}_{yz}\right)$$

∇

17.3 Estatus Compuestos

En la Sección anterior definimos estatus para varias vidas mediante el estatus general del sobreviviente k. Otros estatus pueden definirse mediante composición. Se dice que existe un ***estatus compuesto*** si el estatus está basado en una combinación de estatus, y, que al menos, uno de ellos sea en sí mismo un estatus que involucre más de una vida. Examinaremos algunas posibilidades en el Ejemplo 17.6.

Ejemplo 17.6

Describa las condiciones de pago para las anualidades y seguros correspondientes a los siguientes símbolos de valores presentes actuariales y primas netas únicas

a. $\overline{a}_{\overline{wx}:\overline{yz}}$ b. $\overline{a}_{\overline{wx:(yz)}}$ c. $\overline{a}_{\overline{(x:n)}:\overline{(yz:n)}}$

d. $\overline{A}_{\overline{wx}:\overline{yz}}$ e. $\overline{A}_{\overline{(wx):(yz)}}$ f. $\overline{A}_{\overline{(wx):y:z}}$

Solución:

a. La anualidad es pagadera continuamente a una tasa de 1 al año mientras, al menos, uno de (w) y (x) y, al menos, uno de (y) y (z) sobrevivan. Por tanto, la anualidad es pagadera mientras que, tres o cuatro vidas sobrevivan

y mientras que, dos sobrevivan si una es del par (w), (x) y la otra del par (y), (z).

b. La anualidad es pagadera continuamente a una tasa de 1 al año mientras que, al menos, dos de cuatro vidas sobrevivan y, también, mientras que, sólo una sobreviva si ese sobreviviente es ya sea (w) o (x).

c. La anualidad es pagadera continuamente a una tasa de 1 al año mientras que, (x) esté vivo y no haya pasado un periodo de n años o mientras que, ambos (y) y (z) estén vivos y no haya pasado un periodo de m años.

d. Un monto unitario es pagadero al momento del primer fallecimiento si (y) o (z) muere primero y, de otra forma, al segundo fallecimiento.

e. Un monto unitario es pagadero al momento del segundo fallecimiento si las dos muertes consisten de uno del grupo (w), (x) y el otro del grupo (y), (z). Si no, el pago se hace al momento del tercer fallecimiento.

f. Un monto unitario es pagadero sólo después de que (y), (z) y uno de (w), (x) han fallecido. En otras palabras, es pagadero al momento del tercer fallecimiento si (w) o (x) permanecen vivos, de otra forma, al momento del cuarto fallecimiento. ∇

En las aplicaciones, muy posiblemente se obtendría un valor numérico para cualquiera de estos valores presentes actuariales o primas netas únicas, expresándolo primero en términos de aquellos para los estatus simples y de vida conjunta. Las relaciones en (8.3.5) entre $T(xy)$, $T(\overline{xy})$, $T(x)$ y $T(y)$, y en (8.5.6) y (8.5.7) entre $K(xy)$, $K(\overline{xy})$, $K(x)$ y $K(y)$, son válidas para los estatus generales (u), (v). Por ejemplo,

$$v^{T(uv)} + v^{T(\overline{uv})} = v^{T(u)} + v^{T(v)} \tag{17.3.1}$$

Empleando partes del Ejemplo 17.6, ilustraremos el proceso de utilizar (17.3.1) e identidades similares. Primero, consideremos la parte (e).

$$\overline{A}_{\overline{(wx):(yz)}} = \overline{A}_{wx} + \overline{A}_{yz} - \overline{A}_{wxyz}$$

Aquí, $(u)=(wx)$ y $(v)=(yz)$. Para escribir $\overline{A}_{(wx):(yz)}$ como $\overline{A}_{wx:yz}$ hemos usado

$$\begin{aligned}&\min\left\{\min\left[T(w),T(x)\right],\min\left[T(y),T(z)\right]\right\}\\&=\min\left[T(w),T(x),T(y),T(z)\right]\end{aligned}\qquad(17.3.2)$$

Para la parte (c) del Ejemplo 17.6, tenemos

$$\overline{a}_{\overline{(x:\overline{n}|)(yz:\overline{m}|)}}=\overline{a}_{x:\overline{n}|}+\overline{a}_{yz:\overline{m}|}-\overline{a}_{xyz:\overline{n}|}$$

en donde el último término se obtiene de

$$\min\left[T(x),T(y),T(z),T\left(\overline{n}|\right),T\left(\overline{m}|\right)\right]=\min\left[T(x),T(y),T(z),T\left(\overline{n}|\right)\right]$$

para el caso de $n\le m$.

Otros arreglos, como los de las partes (a), (b), (d) y (f) del Ejemplo 17.6, requieren el uso de otras relaciones. Para la parte (a), queremos que

$$\overline{a}_{\overline{wx:yz}}=E\left[\overline{a}_{\overline{T}|}\right]\qquad(17.3.3)$$

en donde

$$\begin{aligned}T&=\min\left[T\left(\overline{wx}\right),T\left(\overline{yz}\right)\right]\\&=\min\left\{\max\left[T(w),T(x)\right],\max\left[T(y),T(z)\right]\right\}\end{aligned}$$

Una respuesta simple, como la de (17.3.2), no está disponible para esta variable aleatoria. Para proceder, supongamos primero que $T\left(\overline{wx}\right)$ y $T\left(\overline{yz}\right)$ son independientes y observemos a la función de sobrevivencia de T, $s(t)$. Por tanto

$$\begin{aligned}s(t)&=\Pr\left[T>t\right]=\Pr\left\{\min\left[T\left(\overline{wx}\right),T\left(\overline{yz}\right)\right]>t\right\}\\&=\Pr\left\{T\left(\overline{wx}\right)>t,T\left(\overline{yz}\right)>t\right\}\\&=\Pr\left\{T\left(\overline{wx}\right)>t\right\}\Pr\left\{T\left(\overline{yz}\right)>t\right\}\\&={}_tp_{\overline{wx}}\,{}_tp_{\overline{yz}}\end{aligned}\qquad(17.3.4)$$

$$= \left({}_tP_w + {}_tP_x - {}_tP_{wx}\right)\left({}_tP_y + {}_tP_z - {}_tP_{yz}\right)$$

$$= {}_tP_{wy} + {}_tP_{wz} + {}_tP_{xy} + {}_tP_{xz} - {}_tP_{wyz} - {}_tP_{xyz}$$
$$- {}_tP_{wxy} - {}_tP_{wxz} + {}_tP_{wxyz}$$

para el caso independiente. Ahora utilizando (17.3.4) obtenemos

$$\overline{a}_{\overline{wx:yz}} = \int_0^\infty v^t\, s(t)\, dt \tag{17.3.5}$$
$$= \overline{a}_{wy} + \overline{a}_{wz} + \overline{a}_{xy} + \overline{a}_{xz} - \overline{a}_{wyz} - \overline{a}_{xyz} - \overline{a}_{wxy} - \overline{a}_{wxz} + \overline{a}_{wxyz}$$

Regresemos a (17.3.4) y demostremos que es válida una relación paralela para las variables aleatorias y luego que (17.3.4) es verdadera sin el supuesto de independencia. Empezamos con la afirmación de que para todos los resultados posibles,

$$\begin{aligned} T\left(\overline{wx}:\overline{yz}\right) &= T(wy) + T(wz) + T(xy) + T(xz) \\ &\quad - T(wyz) - T(xyz) - T(wxy) - T(wxz) \\ &\quad + T(wxyz) \end{aligned} \tag{17.3.6}$$

Los resultados se pueden reunir en 24 eventos mutuamente excluyentes de acuerdo con el orden de $T(w), T(x), T(y)$ y $T(z)$. Ya que la afirmación hecha es simétrica en w y x y simétrica en y y z, sólo requieren de verificación 6 diferentes resultados. Como ejemplo, considere $T(w) < T(x) < T(y) < T(z)$ para las que el lado izquierdo de (17.3.6) es $T\left(\overline{wx}:\overline{yz}\right) = T(x)$ y el lado derecho es, en base de término por término,

$$T(w) + T(w) + T(x) + T(x) - T(w) - T(x) - T(w) - T(w) + T(w) = T(x)$$

como se requería. Los otros casos pueden verificarse en la misma forma.

Puede establecerse una expresión en anualidades que es paralela a (17.3.6) mediante un razonamiento similar. Por tanto,

$$\begin{aligned} \overline{a}_{\overline{T(wx:yz)}|} &= \overline{a}_{\overline{T(wy)}|} + \overline{a}_{\overline{T(wz)}|} + \overline{a}_{\overline{T(xy)}|} + \overline{a}_{\overline{T(xz)}|} \\ &\quad - \overline{a}_{\overline{T(wyz)}|} - \overline{a}_{\overline{T(xyz)}|} - \overline{a}_{\overline{T(wxy)}|} - \overline{a}_{\overline{T(wxz)}|} + \overline{a}_{\overline{T(wxyz)}|} \end{aligned} \tag{17.3.7}$$

Tomando esperanzas en ambos lados de esta expresión tenemos (17.3.5).

Para este caso, enfatizamos dos aspectos del supuesto de independencia. Que no fuera utilizado para establecer (17.3.7), que no se requiriera en el cálculo de la esperanza para obtener (17.3.5) de (17.3.7). Sin embargo, nuevamente, para obtener funciones de estatus de vida conjunta de tablas de vida para una vida, asumimos, por conveniencia, que los tiempos de vida futuros individuales son independientes.

17.4 Probabilidades y Seguros Contingentes

En esta sección ampliaremos la noción de las funciones contingentes (Sección 8.8) a más de dos vidas. Empezaremos con una expresión integral para la probabilidad requerida, o prima neta única, la que después puede reescribirse en términos de probabilidades o de primas netas únicas definidas sobre el primer fallecimiento. Entonces es posible utilizar alguna de las técnicas de la Sección 8.9 para completar la evaluación. En cualquier caso, se pueden utilizar métodos numéricos de integración.

Para obtener una expresión integral para una probabilidad, usamos

$$\Pr(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(A|T=t) f_T(t)\, dt \tag{17.4.1}$$

en donde T significará, generalmente, el tiempo del fallecimiento de una vida individual.

Ejemplo 17.7

Exprese ${}_n q_{wxyz}^{\ 2}$ en términos de funciones contingentes del primer fallecimiento.

Solución:

Aquí A es el evento de que (y) es la segunda vida entre $(w),(x),(y)$ y (z) que fallece y acontece dentro de n años. Ya que A se define mediante $T(y)$, usamos $T(y)$ como T en (17.4.1) para obtener

$${}_n q_{wxyz}^{\ 2} = \int_0^n \Pr\left(A|T(y)=t\right)\, {}_t p_y\, \mu_{y+t}\, dt$$

Los límites de la integral se siguen de

$$f_{T(y)}(t) = 0 \qquad t < 0$$

y

$$\Pr\left(A \middle| T(y) = t\right) = 0 \qquad t > n$$

Ahora (y) será el segundo en morir, si y sólo si, hay exactamente dos de $(w),(x)$ y (z) sobreviviendo en ese tiempo. Si suponemos que $T(y)$ es independiente de $T(w), T(x)$ y $T(z)$, entonces

$$\Pr\left(A \middle| T(y) = t\right) = {}_tp\frac{[2]}{wxz} \qquad t < n$$

y

$${}_nq_{wxyz}^{\ 2} = \int_0^n {}_tp\frac{[2]}{wxz}\, {}_tp_y\, \mu_{y+t}\, dt$$

$$= \int_0^n \left({}_tB_2 - 3\,{}_tB_3\right) {}_tp_y\, \mu_{y+t}\, dt$$

$$= {}_nq_{wxy}^{\ 1} + {}_nq_{wyz}^{\ 1} + {}_nq_{xyz}^{\ 1} - 3\,{}_nq_{wxyz}^{\ 1}$$

(La segunda integral viene de aplicar el Teorema 17.1) ∇

La similitud de la expresión final del Ejemplo 17.7 con resultados previos que no requirieron independencia sugiere que el supuesto de independencia no era necesario. Derivaciones alternativas en los Ejercicios 17.18 y 17.40 verificarán que éste es el caso.

Un seguro contingente puede analizarse mediante un procedimiento similar basado en

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[Z \middle| T = t\right] f_T(t)\, dt \tag{17.4.2}$$

Ejemplo 17.8

Exprese $\overline{A}_{wxy}^{\ 2}$ en términos de primas netas únicas para seguros dependientes sólo del primer fallecimiento.

Solución:

Sea Z la variable aleatoria que representa el valor presente a la expedición de un beneficio del seguro. Como el seguro es pagadero sobre el fallecimiento de (y), seleccionamos $T(y)$ para desempeñar el papel de T en la esperanza condicional de (17.4.2):

$$\overline{A}_{wxy}^{2} = E[Z] = \int_0^\infty E\left[Z \middle| T(y) = t\right] {}_tp_y \, \mu_{y+t} \, dt$$

Si, al fallecimiento de (y) a la duración t, hay exactamente uno de (w) y (x) sobreviviendo, el beneficio unitario se pagará; de otra forma, ningún beneficio será pagado. Por tanto, tenemos

$$E\left[Z \middle| T(y) = t\right] = v^t {}_tp \frac{[1]}{wx}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{wxy}^{2} &= \int_0^\infty v^t {}_tp \frac{[1]}{wx} {}_tp_y \, \mu_{y+t} \, dt \\
&= \int_0^\infty v^t \left({}_tB_1 - 2{}_tB_2\right) {}_tp_y \, \mu_{y+t} \, dt \\
&= \overline{A}_{xy}^{1} + \overline{A}_{wy}^{1} - 2\overline{A}_{wxy}^{1}
\end{aligned}$$

La Var[Z] puede obtenerse mediante el principio del Teorema 4.1. ∇

17.5 Funciones Contingentes Compuestas

Las funciones de esta sección pueden distinguirse de aquéllas de la sección anterior mediante especificaciones acerca del orden de los fallecimientos previos al fallecimiento cuando los beneficios son pagados, o el evento es definido. Estas especificaciones sobre los fallecimientos previos se indican mediante números colocados debajo de los símbolos para las vidas involucradas. Examinaremos dos de dichos símbolos y se señalarán las distinciones posibles en la notación.

Los símbolos ${}_nq_{\substack{xy\\1}}^{\ \ 2}{}_z$ y ${}_nq_{\substack{xy\\1}}^{\ \ 3}{}_z$ se refieren ambos a eventos en los que $T(x) < T(y) < T(z)$. Difieren, por tanto, en que el segundo fallecimiento debe

ocurrir antes del tiempo n en el primer evento, mientras que el tercer fallecimiento debe preceder al tiempo n en el segundo evento.

No siempre es posible expresar totalmente funciones contingentes compuestas en términos de funciones que dependen solamente del primer fallecimiento. Por otra parte, la función puede expresarse siempre como una o más integrales múltiples de la *f.d.p.* conjunta de las variables aleatorias de los tiempos de vida futuros de las vidas involucradas. El ejemplo de este procedimiento general (Ejemplo 17.9) es más complejo que otros de esta sección.

Ejemplo 17.9

Derive una expresión para la probabilidad de que $(w),(x),(y)$ y (z) mueran en ese orden con menos de 10 años entre los fallecimientos de (w) y (z) y menos de 5 años entre los fallecimientos de (x) y (y).

Solución:

Primero definimos el evento A para usarlo en una versión multivariada de (17.4.1):

$$A=\left\{\begin{array}{c} T(w)<T(x)<T(y)<T(z) \\ T(z)-T(w)<10 \\ T(y)-T(x)<5 \end{array}\right\} \tag{17.5.1}$$

Escogemos la condición sobre $T(w)$ y $T(x)$ porque éstas están ambas involucradas en los límites superiores e inferiores para $T(y)$ y $T(z)$. Es decir,

$$\Pr(A)=\int_0^\infty \int_0^\infty \Pr\left[A\middle|T(w=r)\cap\left(T(x)=s\right)\right] g(r,s)\, ds\, dr \tag{17.5.2}$$

en donde $g(r,s)$ es la *f.d.p.* de $T(w)$ y $T(x)$. Ahora $\Pr[A|T(w=r)\cap (T(x)=s)]$ es igual a $\Pr(A^*)$ en donde

$$A^*=\left\{\begin{array}{c} r<s<T(y)<T(z)<r+10 \\ T(y)<s+5 \end{array}\right\}$$

y la probabilidad se calcula mediante la distribución condicional de $T(y)$ y $T(z)$, dado que $T(x)=s$ y $T(w)=r$. Por tanto $\Pr(A^*)$ puede establecerse en el espacio muestral de las variables aleatorias $T(y)$ y $T(z)$. Se muestran dos casos en la Figura 17.1.

Por tanto, representando $h(t,u)$ la *f.d.p.* condicional de $T(y)$ y $T(z)$ dado que $T(w)=r$ y $T(x)=s$, tenemos

$$\Pr(A^*)=\begin{cases}\int_s^{s+5}\int_t^{r+10} h(t,u)\,du\,dt & r<s<r+5\\ \int_s^{r+10}\int_t^{r+10} h(t,u)\,du\,dt & r+5<s<r+10\\ 0 & s>r+10 \text{ "o" } s<r\end{cases}$$

Sustituyendo en (17.5.2), tenemos

$$\Pr(A)=\int_0^{\infty}\int_r^{r+5}\int_s^{s+5}\int_t^{r+10} h(t,u)g(r,s)\,du\,dt\,ds\,dr + \int_0^{\infty}\int_{r+5}^{r+10}\int_s^{r+10}\int_t^{r+10} h(t,u)\,g(r,s)\,du\,dt\,ds\,dr$$

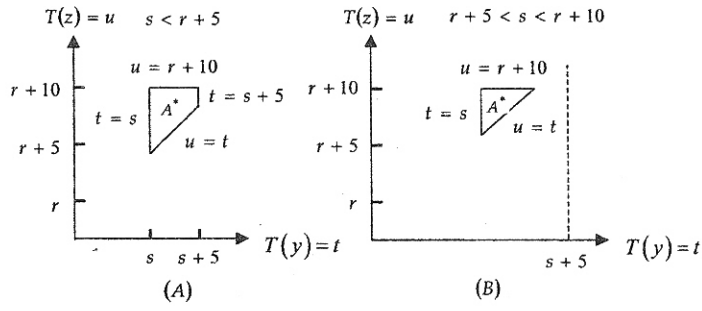


Figura 17.1 Casos (A), $s<r+5$, y (B), $r+5<s<r+10$

Con el supuesto de tiempos de vida futuros mutuamente independientes el integrando puede reemplazarse por

$$ {}_rp_w \; \mu_{w+r} \; {}_sp_x \; \mu_{x+s} \; {}_tp_y \; \mu_{y+t} \; {}_up_z \; \mu_{z+u} \qquad \nabla $$

Examinaremos ahora algunas probabilidades contingentes compuestas que pueden escribirse en términos de integrales simples. Primero obtenemos formas equivalentes para una probabilidad mediante la aplicación de (17.4.1).

Ejemplo 17.10

Escriba tres integrales diferentes para ${}_{n}q_{\substack{x\,y\,z \\ 1}}^{\;\;\;3}$ y reduzca una de ellas a funciones de probabilidad dependientes sólo del primer fallecimiento.

Solución:

Aquí $A = \{T(x) < T(y) < T(z) < n\}$. Establecemos tres integrales condicionando cada uno de los tiempos de vida futuros:

$$ {}_{n}q_{\substack{x\,y\,z \\ 1}}^{\;\;\;3} = \int_0^{\infty} \Pr\left[A \middle| T(x) = t \right] {}_tp_x \; \mu_{x+t} \; dt $$

y

$$ \Pr\left[A \middle| T(x) = t \right] = \begin{cases} 0 & t > n \\ {}_tp_{yz} \; {}_{n-t}q_{y+t:z+t}^{\;\;\;2} & t \le n \end{cases} $$

por tanto

$$ {}_{n}q_{\substack{x\,y\,z \\ 1}}^{\;\;\;3} = \int_0^{n} {}_tp_{yz} \; {}_{n-t}q_{y+t:z+t}^{\;\;\;2} \; {}_tp_x \; \mu_{x+t} \; dt $$

igualmente

$$ \begin{aligned} {}_{n}q_{\substack{x\,y\,z \\ 1}}^{\;\;\;3} &= \int_0^{\infty} \Pr\left[A \middle| T(y) = t \right] {}_tp_y \; \mu_{y+t} \; dt \\ &= \int_0^{n} {}_tq_x \; {}_tp_z \; {}_{n-t}q_{z+t} \; {}_tp_y \; \mu_{y+t} \; dt \end{aligned} $$

y

$$ \begin{aligned} {}_{n}q_{\substack{x\,y\,z \\ 1}}^{\;\;\;3} &= \int_0^{\infty} \Pr\left[A \middle| T(z) = t \right] {}_tp_z \; \mu_{z+t} \; dt \\ &= \int_0^{n} {}_tq_{x\,y}^{\;\;\;2} \; {}_tp_z \; \mu_{z+t} \; dt \end{aligned} $$

La segunda de estas integrales puede expresarse en términos de probabilidades del primer fallecimiento, en la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
{}_{n}q_{\overset{1}{x}\,y\,z}^{\;3} &= \int_0^n \left(1-{}_{t}p_x\right)\left({}_{t}p_z-{}_{n}p_z\right){}_{t}p_y\;\mu_{y+t}\;dt \\
&= {}_{n}q_{y\,z}^{\;1}-{}_{n}q_{\underset{1}{x}\,y\,z}^{\;1}-{}_{n}p_z\left({}_{n}q_y-{}_{n}q_{\underset{1}{x}\,y}^{\;1}\right)
\end{aligned}
$$

∇

Ejemplo 17.11

Utilice (17.4.1) para escribir cuatro expresiones integrales diferentes para ${}_{n}q_{\underset{1\;2}{w\,x}\,y\,z}^{\;3}$

Solución:

Aquí $A=\left\{T(w)<T(x)<T(y)<T(z)\text{ y }T(y)<n\right\}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
{}_{n}q_{\underset{1\;2}{w\,x}\,y\,z}^{\;3} &= \int_0^n {}_{t}p_{xyz}\;{}_{n-t}q_{\underset{1}{x+t}:y+t:z+t}^{\;2}\;{}_{t}p_w\;\mu_{w+t}\;dt \\
&= \int_0^n {}_{t}q_w\;{}_{t}p_{yz}\;{}_{n-t}q_{y+t:z+t}^{\;1}\;{}_{t}p_x\;\mu_{x+t}\;dt \\
&= \int_0^n {}_{t}q_{wx}^{\;2}\;{}_{t}p_z\;{}_{t}p_y\;\mu_{y+t}\;dt \\
&= \int_0^n {}_{t}q_{\underset{1}{w\,x}\,y}^{\;3}\;{}_{t}p_z\;\mu_{z+t}\;dt+q_{\underset{1}{w\,x}\,y}^{\;3}\;{}_{n}p_z
\end{aligned}
\qquad (17.5.3)
$$

La última línea, obtenida al condicionar sobre $T(z)$, requiere una expresión para $T(z)<n$ y otra para $T(z)>n$. ∇

En la aplicación de (17.4.1) a los ejemplos de esta sección hemos utilizado el supuesto de tiempos de vida futuros independientes al escribir los factores de la $\Pr\left[A|T=t\right]$ de los integrandos. Ahora consideraremos la evaluación numérica de estas probabilidades cuando se usa una ley de mortalidad simple de Gompertz para cada vida involucrada.

Ejemplo 17.12

Con la ley de Gompertz, demuestre que

$$
{}_{\infty}q_{\underset{1\;2}{w\,x}\,y\,z}^{\;3} = {}_{\infty}q_{w\,x\,y\,z}^{\;1}\;{}_{\infty}q_{x\,y\,z}^{\;1}\;{}_{\infty}q_{y\,z}^{\;1}
$$

Solución:

Permitiendo que $n \to \infty$ en (17.5.3) tenemos

$$ {}_{\infty}q_{\substack{w\\1}}{}_{\substack{x\\2}}{}^{3}y\,z = \int_0^{\infty} {}_t q_w \; {}_t p_{yz} \; {}_{\infty}q^{1}_{y+t:z+t} \; {}_t p_x \; \mu_{x+t} \, dt \qquad (17.5.4) $$

En el Ejemplo 8.8(b) se demostró que, con la ley de mortalidad de Gompertz,

$$ {}_n q^{1}_{xy} = \frac{c^x}{c^w} \, {}_n q_w \qquad (17.5.5) $$

en donde $c^w = c^x + c^y$. Adaptando esto y sustituyéndolo por ${}_{\infty}q^{1}_{\overline{y+t:z+t}}$ en el integrando de (17.5.4), obtenemos

$$ \begin{aligned} {}_{\infty}q_{\substack{w\\1}}{}_{\substack{x\\2}}{}^{3}y\,z &= \int_0^{\infty} \frac{c^{y+t}}{c^{y+t}+c^{z+t}} \, {}_t q_w \; {}_t p_{yz} \; {}_t p_x \; \mu_{x+t} \, dt \\ &= \frac{c^y}{c^y + c^z}\left({}_{\infty}q^{1}_{x\,y\,z} - {}_{\infty}q_{w\,x\,y\,z}{}^{1} \right) \end{aligned} $$

La Fórmula (17.5.5) puede ampliarse para más de dos vidas y después usada en esta expresión; en consecuencia,

$$ \begin{aligned} {}_{\infty}q_{\substack{w\\1}}{}_{\substack{x\\2}}{}^{3}y\,z &= \frac{c^y}{c^y + c^z}\left(\frac{c^x}{c^x + c^y + c^z} - \frac{c^x}{c^w + c^x + c^y + c^z} \right) \\ &= \left(\frac{c^w}{c^w + c^x + c^y + c^z} \right)\left(\frac{c^x}{c^x + c^y + c^z} \right)\left(\frac{c^y}{c^y + c^z} \right) \\ &= {}_{\infty}q^{1}_{w\,x\,y\,z} \; {}_{\infty}q^{1}_{x\,y\,z} \; {}_{\infty}q^{1}_{y\,z} \end{aligned} $$

∇

17.6 Anualidades reversibles.

Una ***anualidad reversible*** es pagadera durante la existencia de un estatus (u), pero sólo después de la interrupción de un segundo estatus (v). Dicha anualidad se usa como un beneficio de fallecimiento posterior al retiro en algunos planes de pensión. La notación básica para el valor presente actuarial de esta anualidad es $a_{\overline{v|}u}$ con subíndices para indicar la frecuencia y temporalidad de los pagos. Si (v) es un plazo fijo, la anualidad reversible se

reduce a una anualidad vitalicia diferida a (u). Si (u) es un plazo fijo, la anualidad reversible es un seguro de ingreso familiar.

Empezaremos con una anualidad de 1 al año pagadera continuamente a (y) después de fallecimiento de (x). El valor presente en el tiempo 0, representado por Z, es

$$Z = \begin{cases} {}_{T(x)|}\bar{a}_{\overline{T(y)-T(x)|}} & T(x) \le T(y) \\ 0 & T(x) > T(y) \end{cases} \qquad (17.6.1)$$

Luego, para tiempos de vida futuros independientes, el valor presente actuarial de esta anualidad es

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x|y} = E[Z] &= \int_0^\infty \int_t^\infty {}_t|\bar{a}_{\overline{s-t}|}\, {}_s p_y\, \mu_{y+s}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, ds\, dt \\ &= \int_0^\infty v^t\, {}_t p_y \left[\int_t^\infty \bar{a}_{\overline{s-t}|}\, {}_{s-t} p_{y+t}\, \mu_{y+s}\, ds \right] {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= \int_t^\infty v^t\, {}_t p_y\, \bar{a}_{y+t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt \end{aligned} \qquad (17.6.2)$$

Esta última expresión está en la forma de (17.4.2) condicionada a $T(x)$.

La Fórmula (17.6.1) puede rescribirse como

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(y)|}} - \bar{a}_{\overline{T(x)|}} & T(x) \le T(y) \\ 0 & T(x) > T(y) \end{cases}$$

o como

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(y)|}} - \bar{a}_{\overline{T(x)|}} & T(x) \le T(y) \\ \bar{a}_{\overline{T(y)|}} - \bar{a}_{\overline{T(y)|}} & T(x) > T(y) \end{cases}$$

lo que implica que

$$Z = \bar{a}_{\overline{T(y)|}} - \bar{a}_{\overline{T(xy)|}} \qquad (17.6.3)$$

De (17.6.3)

$$\bar{a}_{x|y} = E[Z] = E\left[\bar{a}_{\overline{T(y)|}}\right] - E\left[\bar{a}_{\overline{T(xy)|}}\right] = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy} \qquad (17.6.4)$$

Si (17.6.4) se expresa en la forma de (5.3.2B), tenemos

$$\overline{a}_{x|y} = \overline{a}_y - \overline{a}_{xy} = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_y \, dt - \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{xy} \, dt = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_y \left(1 - {}_tp_x\right) dt$$

lo que demuestra que, para cualquier tiempo t cuando se realiza un pago, (y) debe estar con vida y (x) debe estar muerto.

Las Fórmulas (17.6.3) y (17.6.4) son válidas para estatus arbitrarios (u) y (v).

Por ejemplo,

$$\overline{a}_{x:\,\overline{n}|y} = \overline{a}_y - \overline{a}_{xy:\,\overline{n}|}$$

$$\overline{a}_{x|y:\,\overline{n}|} = \overline{a}_{y:\,\overline{n}|} - \overline{a}_{xy:\,\overline{n}|}$$

$$\overline{a}_{\overline{xy}|z} = \overline{a}_z - a_{\overline{xy:z}} = \overline{a}_z - \overline{a}_{xz} - \overline{a}_{yz} + \overline{a}_{zyz}$$

En los ejemplos anteriores, el plazo fijo se mide desde el tiempo 0. Para una anualidad reversible que paga una anualidad temporal de n años a (y) después del fallecimiento de (x), el plazo fijo es un estatus diferido, por lo tanto, regresamos a los primeros principios. El valor presente a la expedición de la póliza, Z, es

$$Z = \begin{cases} 0 & T(y) \le T(x) \\ v^{T(x)} \, \overline{a}_{\overline{T(y)-T(x)}|} & T(x) < T(y) \le T(x) + n \\ v^{T(x)} \, \overline{a}_{\overline{n}|} & T(y) > T(x) + n \end{cases}$$

Usando (17.4.2) condicionada a que $T(x) = t$, podemos escribir el valor presente actuarial como

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^\infty E\left[Z \middle| T(x) = t\right] {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \\ &= \int_0^\infty {}_tp_y \, v^t \, \overline{a}_{y+t:\,\overline{n}|} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \end{aligned} \tag{17.6.5}$$

Sustituyendo

$$\bar{a}_{y+t:\overline{n}|} = \int_t^{t+n} v^{s-t}\, {}_{s-t}p_{y+t}\, ds$$

en (17.6.5) obtenemos

$$E[Z] = \int_0^{\infty} \int_t^{t+n} v^s\, {}_sp_y\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, ds\, dt$$

En seguida invertimos el orden de la integración en tal forma que

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^n \int_0^s v^s\, {}_sp_y\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt\, ds + \int_n^{\infty} \int_{s-n}^{s} v^s\, {}_sp_y\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt\, ds \\ &= \int_0^n v^s\, {}_sp_y (1 - {}_sp_x)\, ds + \int_n^{\infty} v^s\, {}_sp_y ({}_{s-n}p_x - {}_sp_x)\, ds \\ &= \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|} + v^n\, {}_np_y\, \bar{a}_{xy+n} - v^n\, {}_np_y\, \bar{a}_{x+n:y+n} \end{aligned} \tag{17.6.6}$$

La Fórmula (17.6.6) es una forma corriente de pago para este valor presente actuarial.

En la práctica, las anualidades se pagan sobre una base discreta por lo que debe hacerse una distinción entre los contratos en los que los periodos de pago están basados en la fecha del fallecimiento y aquéllos en los que los periodos de pago se basan sobre la fecha de expedición del contrato. Se colocará un acento circunflejo arriba del símbolo de anualidad para indicar un contrato con periodos de pago basados en la fecha del fallecimiento. (Véase el Apéndice 4.) Ahora buscaremos expresiones que puedan utilizarse en la evaluación numérica de estas anualidades de base discreta.

Para dos estatus (u) y (v), (17.6.3) y (17.6.4) pueden modificarse para la frecuencia de los diferentes pagos para obtener

$$\ddot{a}^{(m)}_{v|u} = \ddot{a}^{(m)}_u - \ddot{a}^{(m)}_{uv} \tag{17.6.7}$$

La evaluación de estos valores de la anualidad fue cubierta en los Capítulos 5 y 8. Usando las relaciones de esos capítulos, este valor de la anualidad reversible puede relacionarse con la anualidad reversible pagada anualmente. Si los tiempos de interrupción de (u) y (uv) están distribuidos uniformemente durante el año de duración, tenemos

$$\ddot{a}^{(m)}_{v|u} = [\alpha(m)\ddot{a}_u - \beta(m)] - [\alpha(m)\ddot{a}_{uv} - \beta(m)] = \alpha(m)\ddot{a}_{u|v} \tag{17.6.8}$$

Ejemplo 17.13

Exprese

a. $\ddot{a}^{(12)}_{x|y}$

b. $\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{n}|y}$

en términos de $\ddot{a}_{x|y}$ y $\ddot{a}_{x:\overline{n}|y}$ respectivamente.

Solución:

a. Suponiendo que $T(y)$ está distribuida uniformemente durante el año de edad y $T(xy)$ aproximadamente también lo está, durante el año de duración en el sentido de (8.7.9), utilizaremos (17.6.8) para escribir

$$\ddot{a}^{(12)}_{x|y} = \alpha(12)\ddot{a}_{x|y}$$

b. Ya que el tiempo hasta la interrupción de $(yx:\overline{n|})$ no está distribuido uniformemente durante el n-ésimo año, no podemos utilizar (17.6.8) para la segunda anualidad. Por lo tanto, reconsideraremos el argumento de (17.6.8) para este caso,

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{n}|y} &= \ddot{a}^{(12)}_{y} - \ddot{a}^{(12)}_{yx:\overline{n}|} \\ &= \left[\alpha(12)\ddot{a}_y - \beta(12)\right] - \left[\alpha(12)\ddot{a}_{yx:\overline{n}|} - \beta(12)\left(1 - {}_nE_{xy}\right)\right] \\ &= \alpha(12)\ddot{a}_{x:\overline{n}|y} - \beta(12)\,{}_nE_{xy}\end{aligned}$$ V

Para las anualidades reversibles con periodos de pago basados en la fecha del fallecimiento, debemos regresar a los primeros principios. Si Z representa a la variable aleatoria del valor presente de la anualidad en m-ésimo lugar de pago anticipado para (y) comenzando en la fecha del fallecimiento de (x), tenemos

$$\begin{aligned}\hat{\ddot{a}}^{(m)}_{x|y} &= E[Z] = \int_0^\infty E\left[Z|T(x)=t\right]\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt \\ &= \int_0^\infty v^t\,{}_tp_y\,\ddot{a}^{(m)}_{y+t}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt\end{aligned}$$

Utilizando (5.5.9) podemos escribir

$$\ddot{a}^{(m)}_{y+t} = \frac{\alpha(m)}{\alpha(\infty)}\,\bar{a}_{y+t} + \frac{\alpha(m)}{\alpha(\infty)}\,\beta(\infty) - \beta(m)$$

y después, permitiendo que

$$\varepsilon(m) = \frac{\alpha(m)}{\alpha(\infty)}\,\beta(\infty) - \beta(m) = \frac{i^{(m)} - \delta}{i^{(m)} d^{(m)}} \tag{17.6.9}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\ddot{a}}^{(m)}_{x|y} &= \frac{\alpha(m)}{\alpha(\infty)} \int_0^\infty v^t\, {}_tp_y\, \bar{a}_{y+t}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\; dt \;+\; \varepsilon(m) \int_0^\infty v^t\, {}_tp_y\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\; dt \\
&= \frac{\alpha(m)}{\alpha(\infty)} \left(\bar{a}_y - \bar{a}_{xy}\right) + \varepsilon(m)\, \overline{A}^{1}_{xy} \\
&= \alpha(m)\, \ddot{a}_{x|y} + \varepsilon(m) \overline{A}^{1}_{xy}
\end{aligned} \tag{17.6.10}$$

17.7 Primas Netas y Reservas

Hemos examinado el concepto de prima neta y la reserva de prima de neta. En el Capítulo 6, la prima neta será definida bajo el concepto de equivalencia. La reserva de prima neta será definida en forma prospectiva como la esperanza condicional de la pérdida futura, condicionada a la supervivencia del asegurado.

La prima pagada, no puede ir más alla del periodo pactado y no más alla dada la contigencia de fallecimiento. El periodo puede ser siempre corto.

En el caso de los seguros pagaderos al primer fallecimiento, las primas son pagaderas solamente mientras todas las vidas sobreviven. Utilizando el principio de equivalencia tenemos el siguiente:

$$P_{xy}\, \ddot{a}_{xy} = A_{xy}$$

$${}_{10}P^{\{4\}} \left(\overline{A}^{1}_{\widehat{xy}:\overline{20|}}\right)\; \ddot{a}^{\{4\}}_{xy:\overline{10|}} = \overline{A}^{1}_{\widehat{xy}:\overline{20|}}$$

y

$$P\left(\overline{A}^{1}_{xyz}\right)\ddot{a}_{xyz} = \overline{A}^{1}_{xyz}$$

Los seguros pagaderos al segundo o posteriores fallecimientos dan lugar a más de un periodo natural de pago de primas. Para minimizar la prima neta que puede cargarse para un beneficio de seguro particular, utilizamos el periodo más largo. El siguiente ejemplo ilustra el proceso para ciertos casos.

Ejemplo 17.14

Utilizando el principio de equivalencia, escriba la ecuación para las siguientes primas netas.

a. $P_{\overline{xy}}$ b. $P\left(\overline{A}^{2}_{\overline{xyz}}\right)$ c. $P\left(\overline{A}_{\overline{wx:yz}}\right)$

d. $P\left(\overline{A}^{2}_{x\,y\,z}\right)$ e. $P\left(\overline{A}^{2}_{\underline{x}\,y\,z}\right)$

Solución:

a. $P_{\overline{xy}}\,\ddot{a}_{\overline{xy}} = A_{\overline{xy}}$

b. $P\left(\overline{A}^{2}_{\overline{xyz}}\right)\ddot{a}^{2}_{\overline{xyz}} = \overline{A}^{2}_{\overline{xyz}}$

c. $P\left(\overline{A}_{\overline{wx:yz}}\right)\ddot{a}_{\overline{wx:yz}} = \overline{A}_{\overline{wx:yz}}$

d. El pago del beneficio es posible todavía, mientras que (y) y al menos uno de (x) y (z) están vivos. Por lo tanto

$$P\left(\overline{A}^{2}_{x\,y\,z}\right)\ddot{a}_{\overline{yxz}} = \overline{A}^{2}_{x\,y\,z}$$

e. En este caso, el pago del beneficio es posible todavía si todos están vivos o si sólo (y) y (z) lo están. En consecuencia, el periodo de pago de la prima apropiado es el tiempo de vida de (xy), y

$$P\left(\overline{A}^{2}_{\underline{x}\,y\,z}\right)\ddot{a}_{yz} = \overline{A}^{2}_{\underline{x}\,y\,z}$$

Al igual que la esperanza condicional de la pérdida futura, la reserva para la prima neta dependerá de la condición del estatus utilizado en el cálculo. La reserva es única para un seguro pagadero al primer fallecimiento porque todas

las vidas deben sobrevivir hasta la terminación del seguro. Ilustraremos las fórmulas de las reservas para dos de estos seguros:

$$ {}_5V^{1}_{\overline{xy:\,\overline{10|}}} = A^{\,1}_{\overline{x+5;y+5:\,\overline{5|}}} - P^{1}_{\overline{xy:\,\overline{10|}}}\,\ddot{a}_{\overline{x+5;y+5:\,\overline{5|}}} $$

en donde

$$ P^{1}_{\overline{xy:\,\overline{10|}}}\,\ddot{a}_{\overline{xy:\,\overline{10|}}} = A^{\,1}_{\overline{xy:\,\overline{10|}}} $$

y

$$ {}_5V^{1}_{x\,y\,z} = A^{\,1}_{x+5;y+5;z+5} - P^{1}_{xyz}\,\ddot{a}_{x+5;y+5;z+5} $$

Para un seguro pagadero al segundo o posteriores fallecimientos, la reserva para la prima neta puede calcularse con la condición dada de la expectativa siendo también aquellas vidas de sobreviviencia o que el seguro no haya terminado. Considere el caso simple de una unidad pagadera a la interrupción de $\left(\overline{xy}\right)$ y sea ${}_tL$ la pérdida futura en t. Estableciendo la condición de cuáles vidas son sobrevivientes, tendríamos

$$ E\left[{}_tL \middle| T(x)>t \;\; y \;\; T(y)>t\right] = \bar{A}_{\overline{x+t;y+t}} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{xy}}\right)\bar{a}_{\overline{x+t;y+t}} \qquad (17.7.1) $$

$$ E\left[{}_tL \middle| T(x)>t \;\; y \;\; T(y)\le t\right] = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{xy}}\right)\bar{a}_{x+t} \qquad (17.7.2) $$

y la expresión similar para (y) como único sobreviviente.

Con la condición de que el seguro no haya terminado, queremos que $E\left[{}_tL \middle| T(\overline{xy})>t\right]$, la que podemos calcular como la suma

$$ \begin{aligned} &E\left[{}_tL \middle| T(x)>t\;,\; T(y)\le t\right]\Pr\left[T(x)>t\;,\; T(y)\le t \middle| T\left(\overline{xy}\right)>t\right] \\ &+E\left[{}_tL \middle| T(x)\le t\;,\; T(y)>t\right]\Pr\left[T(x)\le t\;,\; T(y)>t \middle| T\left(\overline{xy}\right)>t\right] \\ &+E\left[{}_tL \middle| T(x)>t\;,\; T(y)>t\right]\Pr\left[T(x)>t\;,\; T(y)>t \middle| T\left(\overline{xy}\right)>t\right] \end{aligned} $$

En esta expresión las esperanzas condicionales están determinadas mediante (17.7.1) y (17.7.2). Bajo el supuesto de $T(x)$ y $T(y)$ independientes, las probabilidades tienen la forma de

$$\Pr\left[T(x)>t\ ,\ T(y)\le t \,|\, T\left(\overline{xy}\right)>t\right]=\frac{{}_tP_x\left(1-{}_tP_y\right)}{{}_tP_x\left(1-{}_tP_y\right)+{}_tP_y\left(1-{}_tP_x\right)+{}_tP_x\,{}_tP_y}$$

Combinándolas tenemos que

$$\begin{aligned}{}_tV(\overline{A}_{\overline{xy}})=\frac{1}{{}_tP_x\left(1-{}_tP_y\right)+{}_tP_y\left(1-{}_tP_x\right)+{}_tP_x\,{}_tP_y}\Big\{&{}_tP_x\left(1-{}_tP_y\right)\left[\overline{A}_{x+t}-\overline{P}(\overline{A}_{\overline{xy}})\,\overline{a}_{x+t}\right]\\&+{}_tP_y\left(1-{}_tP_x\right)\left[\overline{A}_{y+t}-\overline{P}(\overline{A}_{\overline{xy}})\,\overline{a}_{y+t}\right]\\&+{}_tP_x\,{}_tP_y\left[\overline{A}_{\overline{x+t:y+t}}-\overline{P}(\overline{A}_{\overline{xy}})\,\overline{a}_{\overline{x+t:y+t}}\right]\Big\}\end{aligned}$$

Notas y Referencias

Las aplicaciones prácticas de las ideas de este capítulo no han sido tan numerosas como aquéllas de algunos otros. Sin embargo, existe amplia literatura actuarial sobre varios tópicos en la teoría de vidas múltiples. Partes de los Capítulos 10, 11, 12 y 13 de Jordan (1967), y partes de los Capítulos 7 y 8 de Nelly (1977), contienen material sobre estos tópicos.

El Teorema 17.2 es un teorema fundamental de la probabilidad. El Capítulo 4 de Feller (1968) combina muchas de las ideas. La técnica utilizada para probar resultados de este tipo se denomina, con frecuencia, el ***método de inclusión y exclusión***. Se resumen los principales resultados en el campo, y se proporciona una extensa lista de referencias, en Takács (1967). Se ha otorgado el crédito a Waring de la aplicación de estos métodos algebraicos para calcular los valores de las anualidades vitalicias. Los primeros libros de texto actuariales daban los resultados de los Corolarios 17.1 y 17.3 mediante el así llamado, ***método Z***. Este era un procedimiento nemotécnico algebraico basado en la observación de que los coeficientes de ${}_tB_j$ en ${}_tP_{\overline{x_1\ldots x_m}}^{[k]}$ y en ${}_tP_{\overline{x_1\ldots x_m}}^{k}$ son, respectivamente, aquéllos de las expansiones de $Z^k/(1+Z)^{k+1}$ y $Z^k/(1+Z)^k$.

Una primera versión del Teorema 17.2 está contenido en la discusión de Schuette y Nesbitt sobre un documento de White y Greville (1959). El uso de estos métodos para determinar el valor presente actuarial de una parte en una parte de partes iguales de una anualidad del último sobreviviente, es el tema del Ejercicio 17.38 y de un documento de Rasor y Myers (1952).

Algunas de las cuestiones referentes a las primas y reservas de los seguros del último sobreviviente fueron discutidas por Frasier en *The Actuary*. (1978).

Apéndice

Teorema 17.2

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ los eventos de interés, y $P_{[j]}$ la probabilidad de que exactamente j de los n eventos tengan lugar. Además, sea B_j la suma, para todas las combinaciones de j eventos de n, de las probabilidades de que j eventos especificados ocurrirán, sin importar la ocurrencia de los otros $n-j$ eventos. Luego, para cualquier selección de números, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$c_o P_{[0]} + c_1 P_{[1]} + c_2 P_{[2]} + \cdots + c_n P_{[n]} = c_o + B_1 \Delta c_o + B_2 \Delta^2 c_o + \cdots + B_n \Delta^n c_o$$

Demostración:

Sea X_i un indicador que representa el evento A_i, es decir, $X_i = 1$ para puntos de la muestra en A_i y en caso contrario $X_i = 0$ para los puntos de la muestra que no están en A_i. Sea Υ_j un indicador tal que $\Upsilon_j = 1$ para los puntos de la muestra en exactamente j de los n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $\Upsilon_j = 0$ para los otros puntos de la muestra. Notamos que la esperanza de $\Upsilon_j = P_{[j]}$. Finalmente, definimos un operador, $\phi(E)$, una función del operador de cambio, $E = 1 + \Delta$, por

$$\phi(E) = (X_1 E + 1 - X_1)(X_2 E + 1 - X_2) \cdots (X_n E + 1 - X_n)$$

Notamos que cualquier factor es igual a E si la correspondiente $X_i = 1$ y es igual a 1 si $X_i = 0$. Después de multiplicar, tenemos para cualquier punto

$$\phi(E) = \Upsilon_0 + \Upsilon_1 E + \Upsilon_2 E^2 + \cdots + \Upsilon_n E^n$$

ya que, en la expansión del producto, la potencia de E es igual al número de X_i, el cual es igual a 1. Por tanto el exponente de E es igual al número de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que contienen al punto de la muestra.

Ya que una potencia del operador de cambio, E^j, aplicada a c_0 produce c_j, obtenemos

$$\phi(E)c_0 = c_0 Y_0 + c_1 Y_1 + \cdots + c_n Y_n$$

y, entonces, la esperanza de $\phi(E)\,c_0$ es

$$c_0 P_{[0]} + c_1 P_{[1]} + \cdots + c_n P_{[n]}$$

Como $E = 1 + \Delta$, podemos también escribir $\phi(E)$ como

$$\begin{aligned}\phi(E) &= (1 + X_1\Delta)(1 + X_2\Delta)\cdots(1 + X_n\Delta) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_j} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_j}\right)\Delta^j\end{aligned}$$

que exhibe el coeficiente de los Δ^j como la suma de todos los productos posibles, $\binom{n}{j}$ en número, de las X_i tomadas en el tiempo j. Como $X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_j} = 1$ sólo si el punto de la muestra está en $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_j}$, la esperanza de $X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_j}$ es $\Pr\left[A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_j}\right]$ la esperanza de

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_j} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_j}$$

es B_j. En consecuencia la esperanza de $\phi(E)\,c_0$ puede escribirse también como

$$c_0 + B_1\,\Delta c_0 + B_2\,\Delta^2 c_0 + \cdots + B_n\,\Delta^n c_0$$

Al igualar las dos formas de la esperanza de $\phi(E)\,c_0$ se completa la prueba del teorema. ∇

El conocido teorema de probabilidad de entrada y salida proporciona un ejemplo de la aplicación del Teorema 17.2. Para n = 4,

$$\Pr\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right) = P_{[1]} + P_{[2]} + P_{[3]} + P_{[4]}$$

Aquí $c_0 = 0$, y $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ en la primera forma de la esperanza de $\phi(E)\, c_0$. Del cuadro

i	c_i	Δc_i	$\Delta^2 c_i$	$\Delta^3 c_i$	$\Delta^4 c_i$
0	0	1	-1	1	-1
1	1	0	0	0	-
2	1	0	0	-	-
3	1	0	-	-	-
4	1	-	-	-	-

vemos que la segunda forma de la esperanza es

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= B_1 - B_2 + B_3 - B_4 \\ &= \sum_{i=1}^{4} \Pr(A_i) - \sum_{\substack{\text{Todas las combinaciones} \\ \text{de dos de } 1,2,3,4}} \Pr(A_i\, A_j) \\ &+ \sum_{\substack{\text{Todas las combinaciones} \\ \text{de tres de } 1,2,3,4}} \Pr(A_i\, A_j\, A_k) - \Pr(A_1\, A_2\, A_3\, A_4)\end{aligned}$$

Ejercicios

A menos que se indique lo contrario, todas las vidas están sujetas a la misma tabla de tasas de mortalidad y sus variables aleatorias del tiempo tanscurrido hasta el fallecimiento son independientes.

Sección 17.2

17.1 Describa los eventos que tienen probabilidades determinadas por las siguientes expresiones

a. $${}_tP_{wx} + {}_tP_{wy} + {}_tP_{wz} + {}_tP_{xy} + {}_tP_{xz} + {}_tP_{yz} - 3\left({}_tP_{wxy} + {}_tP_{wxz} + {}_tP_{wyz} + {}_tP_{xyz}\right) + 7\,{}_tP_{wxyz}$$

b. $${}_tP_w + {}_tP_x + {}_tP_y + {}_tP_z - 2\left({}_tP_{wx} + {}_tP_{wy} + {}_tP_{wz} + {}_tP_{xy} + {}_tP_{xz} + {}_tP_{yz}\right) + 4\left({}_tP_{wxy} + {}_tP_{wxz} + {}_tP_{wyz} + {}_tP_{xyz}\right) - 8\,{}_tP_{wxyz}$$

17.2 Utilice los corolarios de la Sección 17.2 para verificar que ${}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[0]} = 1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{1}$

17.3 Un extracto de una tabla de anualidades de vidas conjuntas valuadas a interés de 3½% establece lo siguiente.

Estatus de Vidas Conjuntas	Valor Presente Actuarial de la Anualidad Inmediata de Vidas Conjuntas
20:26:28	14.4
20:26:29	14.3
20:28:29	14.0
26:28:29	13.8
20:26:28:29	12.5

a. Calcule el valor presente actuarial de una anualidad pagadera al final de cada año mientras exactamente tres de (20), (26), (28) y (29) están vivos.

b. Calcule la prima neta única para un seguro de 10,000 pagadero al final del año del fallecimiento de la segunda vida que falle fuera de (20), (26), (28) y (29).

17.4 Exprese ${}_tp_{\overline{wxyz}}^{2} - {}_tp_{\overline{wxyz}}^{[2]}$ en términos de ${}_tB_j$, $j = 1,2,3,4$

17.5 Exprese en términos de símbolos de anualidad, el valor presente actuarial de una anualidad de 1 al año pagadera al final de cada año mientras que (w) y, como máximo una de (x), (y) y (z), estén vivas.

17.6 Si $\mu_{40+t} = 0.002$, $0 \le t \le 10$, y $\delta = 0.05$, calcule el valor de $\bar{A}_{40:40:40:40:\overline{10|}}$

17.7. Se establece un fideicomiso para proporcionar ingreso a (x), (y) y (z). El fondo debe proporcionar un ingreso continuo a una tasa de 8 al año a cada uno, mientras los tres estén con vida, a una tasa de 10 al año a cada uno, mientras dos estén vivos y a una tasa de 15 al año, al único sobreviviente. Calcule los valores presentes actuariales de

a. todos los pagos a realizarse
b. todos los pagos que se harán a (x)

17.8 Una póliza de seguro proporciona un beneficio por fallecimiento de 4 u.m. pagadero inmediatamente al primer fallecimiento entre 4 vidas de edad x, un beneficio de 3 u.m. pagadero al segundo fallecimiento, un beneficio de 2 u.m. pagadero al tercero, y un beneficio de 1 u.m. pagadero al último fallecimiento. Si $\overline{A}_x = 0.4$ y $\overline{A}_{xx} = 0.5$, evalúe la prima neta única para esta póliza.

Sección 17.3

17.9 Desarrolle una expresión en términos de símbolos de anualidad de vida simple y conjunta para el valor presente actuarial de una anualidad inmediata de 1,000 pagadera al mes

a. mientras que exactamente uno de (40) y (35) sobrevive durante los siguientes 25 años
b. mientras que al menos uno de (40) y (35) sobrevive a una edad menor que 65 años.

17.10 Exprese lo siguiente en términos de símbolos para anualidades fijas y anualidades de vida simple y conjunta

a. $\overline{a}_{\overline{x,y:\overline{n}|}}$

b. $\overline{a}_{\overline{(25:40)|30|}}$

Sección 17.4

17.11 Si para cada duración la fuerza de mortalidad para (x) es ½ de la de (y) mientras que la fuerza de mortalidad para (z) es el doble de la de (y). ¿Cuál es la probabilidad de que de las tres vidas (x) mueran

a. en primer lugar
b. segundo
c. tercero?

17.12 ¿Cuáles de las siguientes declaraciones son verdaderas? Corrija las otras cuando sea necesario.

I. $\overline{A}^{\,1}_{\underline{wxyz}} = \overline{A}^{\,1}_{wxyz} + \overline{A}^{\,1}_{wxyz} + \overline{A}^{\,1}_{wxyz} + \overline{A}^{\,1}_{wxyz}$

II. $\overline{A}^{\,3}_{\overline{wxyz}} = \overline{A}^{\,2}_{wxyz} + \overline{A}^{\,2}_{wxyz} + \overline{A}^{\,2}_{wxyz} + \overline{A}^{\,2}_{wxyz}$

III. $\overline{A}^{\,3}_{wxyz} = \overline{A}^{\,1}_{wz} + \overline{A}^{\,1}_{xz} + \overline{A}^{\,1}_{yz} - (\overline{A}^{\,1}_{wxz} + \overline{A}^{\,1}_{wyz} + \overline{A}^{\,1}_{xyz}) + \overline{A}^{\,1}_{wxyz}$

17.13 Escriba, como una integral definida, la prima neta única para un seguro que será pagado al momento del fallecimiento de (x) si (x) sobrevive a (y). El monto del beneficio es igual al tiempo transcurrido entre la expedición de la póliza y la fecha del fallecimiento de (y).

17.14 Si la ley de Gompertz aplica con $\mu_{40} = 0.003$ y $\mu_{56} = 0.012$, calcule

a. ${}_{\infty}q^{\,2:3}_{40:\,48:\,56}$ b. ${}_{\infty}q^{\,2}_{40:\,48:\,56}$

[Nota: en la parte (a) la notación 2:3 indica el evento de que (48) muera segundo o tercero entre las vidas involucradas.]

17.15 Un seguro de 1 u.m. expedido sobre las vidas (x), (y) y (z) es pagadero al momento del fallecimiento de (z) sólo si (x) ha fallecido al menos hace 10 años y (y) ha fallecido hace menos de 10 años. Exprese la prima neta única para este seguro en términos de las primas netas únicas para seguros y dotales puros.

17.16 Desarrolle una expresión que no involucre integrales para la prima neta única de un seguro de 1 u.m. pagadero 10 años después de la muerte de (x), siempre que alguno o ambos (y) y (z) sobrevivan a (x) y ambos estén muertos antes del fin del periodo de 10 años.

17.17 Obtenga una fórmula para la prima bruta única para un seguro unitario especial contingente pagadero si (30) muere antes de (60), o dentro de los 5 años posteriores a la muerte del último, con reembolso de la prima única, sin interés, 5 años después de la muerte de (60) si no surge ninguna reclamación bajo el seguro por la muerte de (30). Suponga que el recargo es de 7 ½ % de la prima neta.

Sección 17.5

17.18 Sin utilizar el supuesto de independencia, establezca relaciones tales como

$$ {}_{n}q_{wxy}^{\ 1} = {}_{n}q_{wxyz}^{\ 1} + {}_{n}q_{wxy\ z}^{\ 2} $$

y utilícelas para obtener el resultado del Ejemplo 17.7.

17.19 Sin utilizar el supuesto de independencia, establezca las relaciones

$$ \bar{A}_{xy}^{\ 1} = \bar{A}_{xyz}^{\ 1} + \bar{A}_{x\ yz}^{\ 2} $$

$$ \bar{A}_{yx}^{\ 1} = \bar{A}_{xyz}^{\ 1} + \bar{A}_{x\ yz}^{\ 2} $$

y úselas para obtener el resultado del Ejemplo 17.8.

17.20 Exprese ${}_{\infty}q_{wxyz}^{\ 2}$

a. como una integral definida.
b. en términos de probabilidades contingentes simples.

17.21 Suponiendo que la ley de Gompertz aplica, demuestre que

a. $${}_{t}q_{xy}^{\ 2} = {}_{t}q_{y} - \frac{c^{y}}{c^{x}+c^{y}}\,{}_{t}q_{xy}$$

b. $$\bar{A}_{x\ yz}^{\ 3} = \frac{c^{x}}{c^{x}+c^{y}}\bar{A}_{z} - \frac{c^{z}}{c^{y}+c^{z}}\bar{A}_{yz} + \frac{c^{y}}{c^{x}+c^{y}}\frac{c^{z}}{c^{x}+c^{y}+c^{z}}\bar{A}_{xyz}$$

17.22 Si $\mu_x = 1/(100-x)$ para $0 < x < 100$ aplica para (20), (40) y (60), evalúe

a. ${}_{\infty}q_{20:\,40:\,60}^{\ 2}$ b. ${}_{\infty}q_{20:\,40:\,60}^{\ 1}$ c. ${}_{\infty}q_{20:\,40}^{\ 1}$

Esto ilustra que ${}_{\infty}q_{x\ yz}^{\ 2} = {}_{\infty}q_{x}^{1}\,{}_{\infty}q_{yz}^{1}$, lo que es válido sobre la base de la ley de Gompertz, no es válida en general.

17.23 Con base en la tabla de mortalidad que sigue la ley de Gompertz (con $c^8 = 2$, $\bar{A}_{54} = 0.3$, $\bar{A}_{62} = 0.4$ y $\bar{A}_{70} = 0.52$. Determine $\bar{A}^{2}_{\substack{54:\,54:\,62 \\ 1}}$

17.24 Dados $\bar{A}_w = 0.6$, $\bar{A}^{1}_{wx} = 0.3$, $\bar{A}^{1}_{wxx} = 0.2$ y $\bar{A}^{1}_{wxxx} = 0.1$ evalúe

a. $\bar{A}^{2}_{wxxx}$ b. $\bar{A}^{4}_{wxxx}$ c. $\bar{A}^{4}_{\substack{w\,x\,x \\ 1\,2\,3}}$

17.25 Exprese en forma de integral la probabilidad de que (x), (y) y (z) mueran en ese orden dentro de los siguientes 25 años con al menos 10 años de separación entre los tiempo de cualquier par de fallecimientos.

17.26 Exprese en forma de integral la probabilidad de que (10),(20) y (30) mueran antes de alcanzar la edad de 60 años, con (20) siendo el segundo en morir.

17.27 Dados ${}_{\infty}q^{1}_{xy} = 0.5537$, ${}_{\infty}q^{1}_{xz} = 0.6484$, ${}_{\infty}q^{1}_{xyz} = 0.5325$ y ${}_{\infty}q^{2}_{xyz} = {}_{x}q_{xyz}{}^{3}$, calcule $q^{2}_{\substack{xyz \\ 1}}$.

17.28 De acuerdo a cierta tabla de mortalidad, la probabilidad de que tres vidas de 70, 55 y 40 años de edad mueran en ese orden a intervalos de no menos de 15 años es 0.048, y la probabilidad de que al menos uno de dos vidas de 70 años de edad actual, estarán con vida 15 años antes del fallecimiento de la vida de 55 años de edad actual es 0.8. Calcule la probabilidad de que ninguna de las dos vidas de 40 años de edad actual sobrevivan a la edad de 70 años.

17.29 ¿Cuáles de las siguientes declaraciones son verdaderas? Corrija las otras cuando sea necesario.

I. $\bar{A}^{3}_{\substack{w\,x\,y\,z \\ 1\,2}} = \int_0^{\infty} v^{t}\,{}_{t}q_{w}\,{}_{t}p_{xyz}\,\mu_{x+t}\,\bar{A}_{y+t}\,dt$

II. $$\int_0^{10} \left(1 - {}_{t+10}p_{50}\right) {}_t p_{60}\ \mu_{60+t}\ dt$$
$$+ \int_{10}^{\infty} \left({}_{t-10}p_{50} - {}_{t+10}p_{50}\right) {}_t p_{60}\ \mu_{60+t}\ dt$$
$$= \int_0^{10} \left(1 - {}_{t+10}p_{60}\right) {}_t p_{50}\ \mu_{50+t}\ dt$$
$$+ \int_{10}^{\infty} \left({}_{t-10}p_{60} - {}_{t+10}p_{60}\right) {}_t p_{60}\ \mu_{50+t}\ dt$$

III. ${}_{30}q^{1}_{40:50:60} + {}_{30}q^{2}_{40:50:60} = {}_{30}q^{1}_{40:\overline{50:60}}$

Sección 17.6

17.30 Demuestre que

a. $\overline{A}^{2}_{xy} = \overline{A}^{1}_{xy} - \delta\, \overline{a}_{y|x}$

b. $\dfrac{\partial}{\partial x}\, \overline{a}_{y|x} = \mu_x\, \overline{a}_{y|x} - \overline{A}^{2}_{xy}$

17.31 Exprese $\ddot{a}^{(12)}_{x|y:\overline{10}|}$ en términos de $\ddot{a}_{x|y:\overline{10}|}$

17.32 Escriba una expresión, sin integrales, para el valor presente actuarial de una anualidad continua pagadera a una tasa de 1 u.m. al año

a. durante el tiempo de vida de (y) y durante los 10 años siguientes al fallecimiento de (y) sin realizar pagos mientras que (x) esté con vida.
b. durante el tiempo de vida de (y) y durante los 10 años siguientes a la muerte de (y) sin realizar pagos mientras que (x) esté vivo o si (y) muere antes que (x).

17.33 Exprese en términos de símbolos de anualidad y de seguros, la prima bruta única que proporcione los siguientes beneficios con un recargo de 8% de la prima bruta:

Una anualidad del último sobreviviente de 1 u.m. al año sobre (x) y (y) diferida *n* años y reduciéndose en 1/3 al primer fallecimiento: si la muerte de (x) ocurre antes de la de (y) y durante el periodo diferido, la anualidad con base reducida comienza en el siguiente aniversario. Si la muerte de (x) ocurre después de la de (y) y durante el periodo diferido, la prima única deberá reembolsarse al final del año del fallecimiento.

17.34 En la Sección 17.6, las anualidades reversibles comenzaban los pagos si el estatus (u) era sobreviviente a la interrupción de un estatus (v). Esta idea puede ampliarse a las anualidades cuyo pago comienza a la ocurrencia de dos o más fallecimientos en un orden prescrito.

a. Demuestre que $a^{\,2}_{x\,y|z} = a_{y|z} - a^{\,1}_{x\,y|z}$

b. Con base en la tabla de mortalidad de Gompertz, pruebe que

$$a^{\,2}_{x\,y|z} = \frac{c^x}{c^x + c^y} a_z - a_{yz} + \frac{c^y}{c^x + c^y} a_{xyz}$$

Sección 17.7

17.35 Desarrolle una expresión para la prima neta anual de un dotal puro contingente de 1 u.m. pagadera si (x) está con vida *n* años después del fallecimiento de (y).

17.36 ¿Qué valor presente actuarial de anualidad deberá utilizarse para obtener la prima neta anual correspondiente a la prima neta única $A^{\,2}_{1\,w\,x\,y\,z}$?

Misceláneos

17.37 Un seguro sobre el evento de que (x) muera antes de la edad $x+n$ y (y) muera antes de la edad $y+m$, con $m<n$, paga 1 u.m. al final del año en el que ocurra el segundo fallecimiento.

a. Demuestre que la prima neta única puede expresarse como

$$A^{\frac{1}{xy:\overline{m}|}}_{} + v^m \, {}_m p_x \left(1 - {}_m p_y\right) A^{\frac{1}{x+m:\overline{n-m}|}}_{}$$

b. ¿Cuál es el valor presente actuarial apropiado de una anualidad que se deberá utilizar para obtener la prima neta anual?

17.38 Un conjunto de m vidas estan en partes y partes iguales en el ingreso de una anualidad del último sobreviviente de 1 u.m. al año pagadero continuamente. El valor presente actuarial de la parte de las (x_1)'s es

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j+1} \, \bar{a}^{\,[j]}_{x_1:\overline{x_2 x_3 \cdots x_m}}$$

Demuestre que este valor presente actuarial puede expresarse como

$$\bar{a}_{x_1} - \frac{1}{2}\left(\bar{a}_{x_1 x_2} + \ldots + \bar{a}_{x_1 x_m}\right) + \frac{1}{3}\left(\bar{a}_{x_1 x_2 x_3} + \cdots + \bar{a}_{x_1 x_{m-1} x_m}\right) - \cdots (-1)^{m-1} \frac{1}{m} \, \bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$$

[Sugerencia: Utilice el Teorema 17.1 sobre

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j+1} \, {}_t p^{\overline{[j]}}_{x_2 \ldots x_m} \Bigg]$$

17.39 Establezca en palabras lo que se representa en

$$\int_0^\infty v^t \, {}_t q_x \, {}_t p_{yz} \, \mu_{y+t} \, \bar{A}^{\frac{1}{z+t:\overline{10}|}}_{} \, dt$$

17.40 En la notación del Teorema 17.2, sea

$$A_1 = \{T(y) < \min[n, T(x), T(z)]\}$$
$$A_2 = \{T(y) < \min[n, T(x), T(w)]\}$$
$$A_3 = \{T(y) < \min[n, T(w), T(z)]\}$$

Demuestre que el evento A del ejemplo 17.7 es el mismo que el evento que ocurre cuando exactamente uno de A_1, A_2 y A_3 ocurre. En consecuencia utilice el Teorema 17.2 para establecer el resultado del ejemplo 17.7 sin utilizar el supuesto de independencia.

[Sugerencia: argumente que
$\Pr(A_1) = {}_n q_{x\,y\,z}^{\,1}, \Pr(A_1A_2) = \Pr(A_1A_3) = \Pr(A_2A_3) = \Pr(A_1A_2A_3) = {}_n q_{w\,x\,y\,z}^{\,1}$
y $\Pr[A_1(no\ A_2)(no\ A_3)] = {}_n q_{1\,wxyz}^{\,2}$]

TEORÍA DE POBLACIÓN

18.1 Introducción

Muchas de las ideas en el Capítulo 3 son elementos en la elaboración de una teoría matemática de poblaciones. Por ejemplo, la función de supervivencia usada al definir la distribución de la variable aleatoria tiempo transcurrido hasta la muerte, y para describir el comportamiento de un grupo sobreviviente, también juega un papel importante en la elaboración de modelos para poblaciones.

Los modelos desarrollados en este capítulo son generales. Estos pueden ser aplicados, con modificaciones apropiadas, a la población de un grupo político, una población de trabajadores o cualquier población.

Estamos particularmente interesados en ciertas aplicaciones actuariales de la teoría de población. En la Sección 18.5 una población modelo será usada para estudiar el comportamiento de un sistema proveedor de indemnizaciones del seguro de vida para una población. En el Capítulo 19 una población modelo será usada como componente para un modelo para ir estudiando el comportamiento de un sistema proveedor de beneficios por jubilación para una población.

18.2 El Diagrama de Lexis

En esta sección podremos introducir un método conveniente para representar el comportamiento de una población. Por ejemplo, la historia de la participación de una población en edad laboral puede ser representada por segmentos de rectas paralelas en un diagrama de dos dimensiones llamado ***diagrama de Lexis*** (Ver la Figura 18.1.) El punto dibujado de entrada para un individuo dentro de la población laboral (con coordenadas tiempo de entrada y edad al entrar) representa un punto final del segmento de recta asociado con ese individuo. El segmento de recta entonces sigue una trayectoria diagonal para terminar con un punto final representando las salidas de la población en edad laboral (con coordenadas tiempo de salida y edad al salir).

La Figura 18.1 ilustra, para la población de trabajadores considerados, en el tiempo medido -25 en el presente ($t = 0$) hay 3 trabajadores activos.

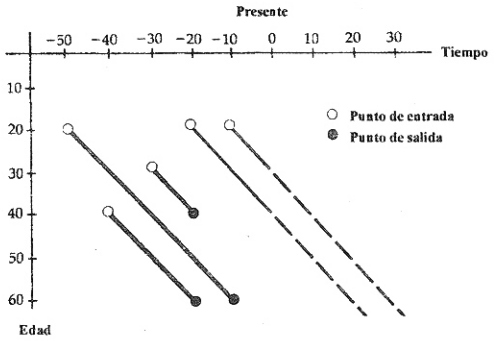


Figura 18.1
Diagrama de Lexis

En el tiempo presente hay 2 trabajadores activos. Uno estaría interesado en hacer expresiones acerca de sus tiempos futuros de vida laboral. La pendiente de los segmentos de recta en la Figura 18.1 muestran los posibles tiempos de vida laboral para los 2 trabajadores actualmente activos.

Los siguientes comentarios resumen las características de un diagrama de Lexis.

Observación:

1. Un punto fijo en el tiempo es representado por una línea vertical. El número de miembros de una población y el tiempo está dado por el número de segmentos de rectas paralelas (cada una representa a un individuo) interceptando la línea vertical.
2. Una edad fija es representada por una línea horizontal. Si un segmento de recta asociado con un individuo intercepta una línea horizontal a edad x_0, entonces el individuo alcanzo edad x_0 mientras sea miembro de la población.
3. Si un miembro de la población llega a edad x en el tiempo t, el tiempo de nacimiento del miembro es $u = t - x$. Mientras que x y t son utilizadas como coordenadas en un diagrama de Lexis, frecuentemente usaremos las variables x y u en nuestros desarrollos. Una de las razones para esto, es que mientras u es constante para cada miembro de la población, ésta no es constante sobre toda la población.

Hay muchas aplicaciones de estas ideas. Por Ejemplo, los diagramas de Lexis son utilizados para representar el comportamiento de cohortes de vidas más que de individuos. Una cohorte es un conjunto de individuos con un periodo común de nacimiento. En un modelo de una población de trabajadores, varias formas de salida pueden ser reconocidas, y las entradas pueden ocurrir a diferentes edades. Estas posibilidades fueron tratadas en los Capítulos 9 y 10.

Los modelos demográficos desarrollados en las próximas 2 secciones utilizarán una sola forma de salida, interpretada como la muerte. De la misma forma, sólo el nacimiento será considerado como una forma de entrada. Será tomada una aproximación determinística.

18.3 Modelo continuo

Para el resto de éste capítulo utilizaremos un modelo continuo para poblaciones en vez de un conjunto discreto de segmentos de rectas paralelas (cada uno corresponde a un miembro) como fueron utilizados para la ilustración en la Figura 18.1. Esta variación nos permitirá el uso del cálculo tal como muchas de las herramientas desarrolladas en los primeros capítulos. Un desarrollo paralelo basado en un modelo discreto, y el uso de herramientas para álgebra lineal, podrían haber sido utilizados.

Nuevamente suponemos que todas las entradas son por nacimiento y todas las salidas son por muerte. La migración es excluida del modelo. Los nacimientos ocurren continuamente y $b(u)$ expresa la ***función de densidad de nacimientos*** en el tiempo u. Esto es, $b(u)\,du$ es el número de nacimientos entre el tiempo u y $u+du$. Expresamos por $s(x,u)$ la función de supervivencia de esos nacimientos en el tiempo u. Esta es llamada una ***función de generación de supervivencia***. Definimos

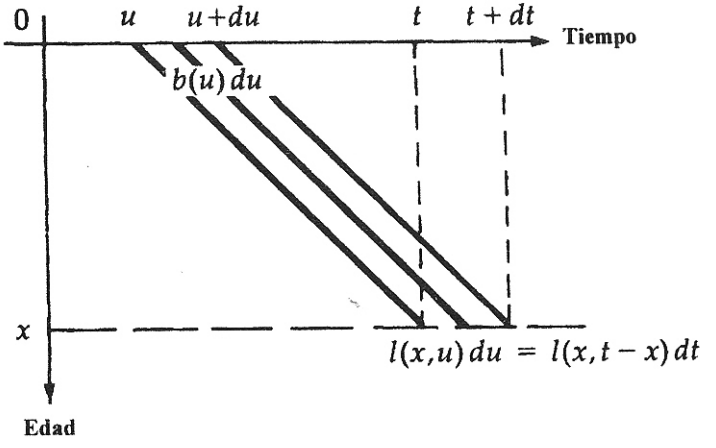
$$l(x,u) = b(u)s(x,u) \tag{18.3.1}$$

La función expresada por $l(x,u)$ es llamada ***función de densidad de población.***

La interpretación de la función $l(x,u)$ es facilitada por referencia a una versión continua de un diagrama de Lexis. (Ver Figura 18.2.) Esta figura y las siguientes Figuras 18.3, 18.4, 18.5 y 18.6 de esta sección son bidimensionales. Estas son diseñadas para ayudar a la interpretación en términos diferenciales o para ilustrar regiones de integración. En cada caso,

una figura tridimensional, ilustrando la función definida en el plano de tiempo-edad, podría haber sido dibujada.

Figura 18.2
Interpretación de $l(x,u)$



Para los $l(0,u)\,du = b(u)\,du$ nacimientos entre u y $u+du$, $l(x,u)\,du$ sobreviven a edad x. Sea $t = x+u$, entonces $dt = du$ y esta expresión puede ser reexpresada como

$$l(x,t-x)\;dt = \text{(número alcanzando edad } x \text{ entre el tiempo } t \text{ y } t+dt\text{)} \qquad (18.3.2)$$

Para esto se deduce que el número alcanzando edad x entre el tiempo t_0 y t_1 es

$$\int_{t_0}^{t_1} l(x,t-x)\,dt \qquad (18.3.3)$$

Ahora consideremos una pregunta diferente. Sea $x_0 < x_1$ dos edades y t_0 un tiempo dado. La pregunta es ¿Cuántas vidas hay entre las edades x_0 y x_1 en el tiempo t_0? Planteando esta pregunta la palabra vidas, ha sido apegada a los valores de la integral de la función $l(x,u)$ y, como en el Capítulo 3, no logra denotar una variable que requiere tomar sólo valores enteros.

Estas vidas habrían alcanzado edad x_0 entre el tiempo $t_0-(x_1-x_0)$ y t_0, y entonces sobrevivido al tiempo t_0, como se indicó en la Figura 18.3. Las rectas diagonales dibujadas trazan una cohorte típica de vidas que estarán entre las edades x_0 y x_1 en el tiempo t_0.

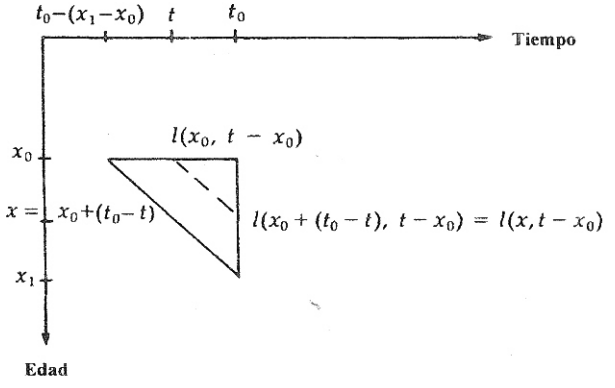


Figura 18.3
Número de vidas entre las edades x_0 y x_1 en el tiempo t_0

Así el número que se observa es

$$\int_{t_0-(x_1-x_0)}^{t_0} l(x_0, t-x_0)\frac{s(x_0+t_0-t, t-x_0)}{s(x_0, t-x_0)}\,dt \tag{18.3.4}$$

Evaluando en (18.3.4) hacemos uso de (18.3.1) al escribir la integral como $b(t-x_0)\,s(x_0+t_0-t,t-x_0)=l(x_0+t_0-t,t-x_0)$. Si suponemos $x=x_0+(t_0-t)$, podemos transformar (18.3.4) en

$$-\int_{x_1}^{x_0} l(x, t_0-x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} l(x, t_0-x)\,dx \tag{18.3.5}$$

De (18.3.5) podemos hacer la siguiente expresión,

$$l(x,t_0-x)\,dx=(\text{número de vidas entre las edades } x \text{ y } x+dx \text{ en el tiempo } t_0) \tag{18.3.6}$$

Por tanto, la función de densidad de población tiene 2 interpretaciones. La primera está dada por (18.3.2) y (18.3.3) y relacionada por el número de vidas alcanzando la edad x entre el tiempo t y $t+dt$. La segunda está dada por (18.3.5) y (18.3.6) y relacionada por el número de vidas entre las edades x y $x+dx$ en el tiempo t. Las dos interpretaciones corresponden a la porción de un diagrama de Lexis para la población con las rectas t y $t+dt$ en la primera interpretación, y a la porción del diagrama con las rectas x y $x+dx$ en la segunda interpretación.

En orden para incorporar las muertes en nuestro modelo suponemos

$$\mu(x,u) = -\frac{1}{s(x,u)} \frac{\partial}{\partial x} s(x,u) = -\frac{1}{l(x,u)} \frac{\partial}{\partial x} l(x,u) \qquad (18.3.7)$$

que denota la ***fuerza de generación de mortalidad*** en edad x para los nacidos en el tiempo u. La Figura 18.4 proporciona tres interpretaciones surgidas de esta definición. Estas pueden ser verificadas al hacer las transformaciones lineales indicadas en la función de densidad de población bivariada a la fuerza de generación de mortalidad y confirmando que el Jacobiano de la transformación es 1.

El número total de muertes en una región dada en el plano tiempo-edad, dibujado en un diagrama de Lexis, es obtenido integrando una de las expresiones en la Figura 18.4 sobre la región dada. La solución requiere el cálculo de una doble integral.

Hay un método alternativo llamado ***método de entrada y salida***, el cual a menudo proporciona una manera sencilla para obtener el número requerido de muertes. Este método alternativo supone un determinado número de vidas que entran y salen de la región. La diferencia entre estos dos números es el número de muertes. En la mayoría de las situaciones, el método de entrada y salida requiere sólo la valuación de dos integrales simples.

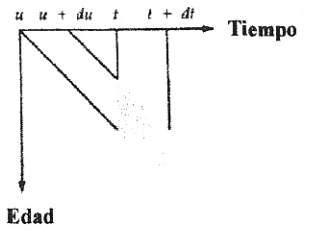
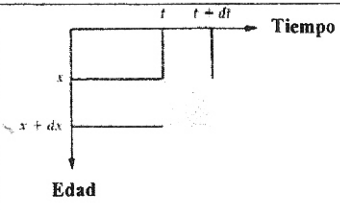
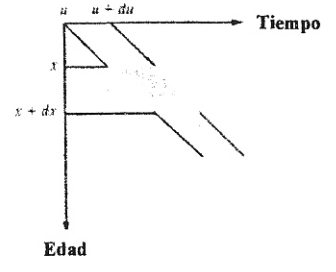
A. $l(t-u,u)\,\mu(t-u,u)\;\; du\;\; dt\;=$ número de muertes entre el tiempo t y $t+dt$ divididos con esos nacimientos entre u y $u+du$.	
B. Sustituyendo $u=t-x$, tenemos $l(x,t-x)\,\mu(x,t-x)\,dt\,dx$ = número de muertes entre x y $x+dx$ sobre el tiempo entre t y $t+dt$.	
C. Sustituyendo $x=t-u$, tenemos D. $l(x,u)\,\mu(x,u)\,du\,dx\;=$ número de muertes entre las edades x y $x+dx$ nacidos entre u y $u+du$.	

Figura 18.4
Interpretaciones de densidad de poblaciones y generación fuerza de mortalidad en el tiempo

Ejemplo 18.1

¿Cuántas vidas alcanzarán la edad x_0 entre el tiempo t_0 y t_0+1 y morirán antes del tiempo t_0+3?

Solución:
Debemos derivar una expresión para el número de muertes en el trapezoide dibujado en la Figura 18.5.

Método de la doble integral: Usando la interpretación de la Figura 18.4C, tenemos para el número requerido de muertes

$$\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0}\int_{x_0}^{t_0+3-u} l(x,u)\,\mu(x,u)\,dx\,du$$

Utilizando (18.3.7), tenemos para el número de muertes

$$\begin{aligned}&\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0}\int_{x_0}^{t_0+3-u}\left[-\frac{\partial\, l(x,u)}{dx}\right]dx\,du\\ &=\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0}\left[l(x_0,u)-l(t_0+3-u,u)\right]du\\ &=\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0} l(x_0,u)\,du-\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0} l(t_0+3-u,u)\;du\end{aligned}$$

Suponemos $y=u+x_0$ en la primera integral y $w=t_0+3-u$ en la segunda integral para obtener el número de muertes

$$\int_{t_0}^{t_0+1} l(x_0,y-x_0)\;dy-\int_{x_0+2}^{x_0+3} l(w,t_0+3-w)\;dw$$

Método de entrada y salida: Para obtener el número requerido de muertes tomamos la diferencia entre el número de entradas que alcanzan edad x_0 entre el tiempo t_0 y t_0+1 y el número de salidas de quienes mueren entre las edades x_0+2 y x_0+3 en el tiempo t_0+3.

Usando (18.3.3) y (18.3.5), tenemos

$$\int_{t_0}^{t_0+1} l(x_0,y-x_0)\;dy-\int_{x_0+2}^{x_0+3} l(w,t_0+3-w)\;dw$$

el cual corresponde al resultado obtenido utilizando la doble integración.

∇

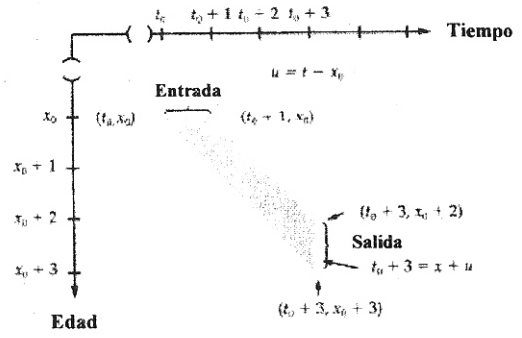


Figura 18.5
Región donde las muertes son contadas, Ejemplo 18.1

Ejemplo 18.2

Determine el número de éstas muertes entre las edades 20 y 40 en el tiempo t_0 quienes morirán antes de llegar a edad 70.

Solución:
Se nos pide derivar una expresión para el número de muertes en el trapezoide dibujado en la Figura 18.6.

Método Doble Integral: Usando la interpretación en la Figura 18.4C, el número requerido de muertes está dado por

$$\int_{t_0-40}^{t_0-20}\int_{t_0-u}^{70} l(x,u)\,\mu(x,u)\,dx\,du$$

$$= \int_{t_0-40}^{t_0-20}\int_{t_0-u}^{70}\left[-\frac{\partial\, l(x,u)}{\partial x}\right] dx\;\; du$$

$$= \int_{t_0-40}^{t_0-20}\left[l(t_0-u,u)-l(70,u)\right]\; du$$

$$= \int_{t_0-40}^{t_0-20} l(t_0-u,u)\;\; du - \int_{t_0-40}^{t_0-20} l(70,u)\;\; du$$

Suponemos $y = t_0 - u$ en la primera integral y $w = u + 70$ en la segunda integral para obtener el número requerido de muertes

$$\int_{20}^{40} l(y, t_0 - y)\ dy - \int_{t_0+30}^{t_0+50} l(70, w - 70)\ dw$$

Método de entrada y salida: Usamos (18.3.5) para las entradas y (18.3.3) para las salidas y obtener

$$\int_{20}^{40} l(x, t_0 - x)\ dx - \int_{t_0+30}^{t_0+50} l(70, t - 70)\ dt$$

los cuales corresponden al resultado utilizando la doble integral. ▽

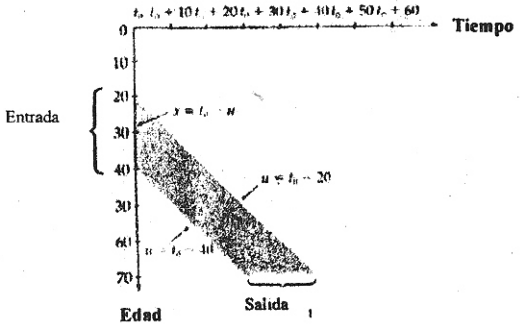


Figura 18.6
Región donde las muertes son calculadas en el Ejemplo 18.2

18.4 Poblaciones estacionarias y estables

Aquí estudiamos dos casos especiales importantes para el modelo descrito en la Sección 18.3. Si $l(x,u)$ es independiente de u, llamamos al resultado una ***población estacionaria***. Para una población estacionaria (18.3.1) llega a ser

$$l(x,u) = b\, s(x) \tag{18.4.1}$$

donde b es la constante de densidad de nacimientos y $s(x)$ es la función de supervivencia que es independiente del tiempo de nacimiento. Para una población humana b es expresada típicamente como el número de

nacimientos por año y la variable edad es medida en años. De acuerdo con (3.3.1), rescribimos (18.4.1) como

$$l(x,u) = b\, s(x) = l_x \tag{18.4.2}$$

donde b juega el papel del radix l_0.

Para una población estacionaria podemos escribir (18.3.5) como

$$\int_{x_0}^{x_1} l_x \, dx = T_{x_0} - T_{x_1}$$

y obtener el número de vidas en la población estacionaria entre las edades x_0 y x_1 en cualquier tiempo t, expresado en términos de la función T_x introducida en (3.5.10) en conexión con el análisis de un grupo sobreviviente. En adición, la interpretación de $l_x \mu_x$ dada por la Figura 18.4B induce a

$$\int_{x_0}^{x_1} l_x \, \mu_x \, dx = l_{x_0} - l_{x_1}$$

como la densidad de muertes entre las edades x_0 y x_1 en cualquier tiempo t. En particular, la densidad de muertes a edad x_0 y mayor igual a la densidad del número de vidas que alcanzan la edad x_0 en cualquier tiempo t, la interpretación dada por (18.3.2). Estos datos ilustran las propiedades del nombre de población estacionaria.

Si la función de densidad de población es de la forma

$$l(x,u) = e^{Ru}\, b\, s(x) = e^{Ru}\, l_x \tag{18.4.3}$$

donde $b > 0$ y R son constantes y $s(x)$ es una función de supervivencia que es independiente al tiempo de nacimiento, la población resultante es llamada ***población estable***. La densidad de nacimientos al tiempo u en una población estable es $e^{Ru}\, b = e^{Ru}\, l_0$. Si $R = 0$, una población estable es una población estacionaria.

Usando (18.3.5) vemos que la población el tiempo t, expresada por $N(t)$, para una población estable está dada por

$$N(t) = \int_0^{\infty} l(x, t-x)\; dx = e^{Rt} \int_0^{\infty} e^{-Rx}\, l_x \; dx \tag{18.4.4}$$

Por tanto, si $R > 0$, la población es creciente exponencialmente, y si $R < 0$, la población es decreciente exponencialmente.

Usando (18.3.5) vemos que la fracción del total de la población estable que reside entre las edades x_0 y x_1 en el tiempo t es

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} l(x,t-x)\,dx}{\int_0^{\infty} l(x,t-x)\,dx} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} e^{-Rx}\, l_x\, dx}{\int_0^{\infty} e^{-Rx}\, l_x\, dx} \tag{18.4.5}$$

la cual es independiente a t. Así, mientras el tamaño de una población estable puede cambiar en el tiempo, su distribución de edad relativa es constante.

Para una población estable, podemos expresar el número de miembros entre las edades x_0 y x_1, usando (18.3.5), como

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} l(x,\ t-x)\ dx &= \int_{x_0}^{x_1} e^{R(t-x)}\, l_x\ dx \\ &= e^{Rt}\left(\overline{N}'_{x_0} - \overline{N}'_{x_1}\right)\end{aligned} \tag{18.4.6}$$

La función conmutativa $\overline{N}_x$ fue introducida en el Capítulo 5. En este capítulo, una prima será agregada a funciones conmutativas y primas netas únicas para denotar que son valuadas usando una fuerza de interés igual a la tasa, R, de cambio de población estable. De acuerdo con este comportamiento, el número de miembros vivos por encima de la edad x_0 en el tiempo t en una población estable puede ser escrita como $e^{Rt}\overline{N}'_{x_0}$.

Para una población estable, la fuerza de mortalidad como está dada en (18.3.7) llega a ser, por referencia a (18.4.3),

$$\mu(x,u) = -\frac{1}{l(x,u)}\frac{\partial}{\partial x} l(x,u) = \mu_x$$

Podemos expresar la densidad de muertes en el tiempo t para una población estable entre edades x_0 y x_1 como

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{R(t-x)}\, l_x\, \mu_x\, dx = e^{Rt}\left(\overline{M}'_{x_0} - \overline{M}'_{x_1}\right) \tag{18.4.7}$$

y la densidad de muertes en el tiempo t por encima de la edad x_0 es $e^{Rt}\overline{M}'_{x_0}$. La función conmutativa $\overline{M}_x$ fue introducida en el Capítulo 4 y ahí la prima indicó la evaluación y fuerza de interés R.

Estos datos sobre las poblaciones estables pueden ser usados, en correspondencia con la identidad del Capítulo 5, para confirmar la propiedad de poblaciones estables:

$$\begin{array}{l}[\text{la tasa de población}\\ \text{cambia en el tiempo } t\\ \text{sobre edad } x_0]\end{array}$$

$$= \frac{\begin{array}{l}[\text{la densidad de éstas}\\ \text{llegando a edad } x_0\\ \text{en el tiempo } t]\end{array} - \begin{array}{l}[\text{la densidad de muertes}\\ \text{sobre edad } x_0\\ \text{en el tiempo } t]\end{array}}{[\text{número sobre edad } x_0 \text{ en el tiempo } t]}$$

$$= \frac{e^{Rt}\left[D'_{x_0} - \overline{M}'_{x_0}\right]}{e^{Rt}\overline{N}'_{x_0}} = R$$

El paso final sigue porque

$$\overline{A}'_{x_0} + R\,\overline{a}'_{x_0} = 1$$

el cual da el siguiente resultado

$$\overline{M}'_{x_0} + R\,\overline{N}'_{x_0} = D'_{x_0}$$

Ejemplo 18.3

Para una población estacionaria la esperanza de vida completa para edad 0, derivada de la función de supervivencia, puede ser obtenida dividiendo el número en la población en el tiempo t por la densidad de nacimientos. Esto es,

$$\overset{o}{e}_0 = \int_0^\infty s(x)\ dx = \int_0^\infty \frac{l_x}{l_0}\,dx = T_0 \,/\, l_0$$

¿Cuál es el resultado de llevar a cabo un cálculo similar con una población estable?

Solución:

$$\frac{N(t)}{e^{Rt}\,l_0}=\frac{\int_0^\infty l(x,t-x)\;dx}{e^{Rt}\,l_0}=\frac{\int_0^\infty e^{R(t-x)}\,l_x\;dx}{e^{Rt}\,l_0}=\overline{a}'_0$$

Si $R>0$, $\overline{a}'_0<\overset{o}{e}_0$, y si $R<0$, $\overline{a}'_0>\overset{o}{e}_0$, y si $R=0$, es obtenido el resultado de la población estacionaria. Este ejemplo demuestra como las esperanzas de vida no pueden ser observadas directamente para una población estable a menos que $R=0$. ▼

18.5 Aplicaciones actuariales

Las condiciones para una población estable o estacionaria son rara vez realizadas con los cambios en la función de supervivencia o la densidad de nacimientos. Sin embargo, estos modelos son útiles en los planes alternativos de estudio para la reserva de seguros de vida o sistemas de renta de jubilación. Para un plan de reserva nos referimos a un plan presupuestando una acumulación de fondos necesarios para proveer el seguro o beneficios anuales.

En esta sección y en el Capítulo 19 partiremos de los modelos desarrollados en el Capítulo 4 a través de los Capítulos 10, 14 y 15. Estos modelos fueron realizados desde el inicio con la consideración de la operación de una póliza única. En esta sección estudiaremos modelos agregados para el seguro de vida. En el Capítulo 19 serán examinados modelos similares para sistemas de pensión. Los modelos considerados serán especialmente relevantes para la sociedad y grupos en los seguros de vida proporcionando indemnizaciones en la muerte o jubilación para grupos amplios o poblaciones.

Ejemplo 18.4

Suponemos una función de densidad de población $l(x,u)=b(u)s(x)$ donde la función de supervivencia es independiente a u. Además, suponemos que en esta población cada miembro por encima de la edad a es asegurado por una unidad de beneficio bajo una completamente continua, el seguro de vida completo con primas anuales pagaderas para edad a. La prima pagada por cada miembro es basada en la fuerza de interés δ y la función de supervivencia $s(x)$. Pruebe que

$$\overline{P}(\overline{A}_a)\int_a^\infty l(x,t-x)\;dx+\delta\int_a^\infty l(x,t-x)\,{}_{x-a}\overline{V}(\overline{A}_a)\;dx \tag{18.5.1}$$

$$= \int_a^\infty l(x,t-x)\,\mu_x\,dx + \frac{d}{dt}\int_a^\infty l(x,t-x)\,{}_{x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right)\,dx$$

Solución:
Solución por razonamiento general: Expresado en palabras (18.5.1) declaramos:

[tasa de renta prima en el tiempo t]
+ [tasa de renta inversión en el tiempo t]
= [tasa de beneficios de salida en el tiempo t]
+ [tasa de cambio en reserva total en el tiempo t].

Esto es, (18.5.1) puede ser interpretada como una renta asignada a la ecuación para el sistema de seguros de vida cubriendo una población de edad a o más. En el lado izquierdo, de (18.5.1) se muestran los recursos de renta, primas e intereses, y en el lado derecho se muestran las asignaciones de renta de beneficios por muerte y cambios en fondos de reserva total.

Solución analítica: Iniciamos con (7.11.5), empleado para el presente caso,

$$\frac{d}{dx}\,{}_{x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right) - \mu_{x\ x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right) + \mu_x = \overline{P}\left(\overline{A}_a\right) + \delta\ {}_{x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right) \tag{18.5.2}$$

Multiplicamos (18.5.2) por $l(x,t-x)$ e integramos entre a y el límite superior de supervivencia. Estas operaciones originan

$$\begin{aligned}\int_a^\infty l(x,t-x)\,d\left[{}_{x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right)\right]\,dx - \int_a^\infty l(x,t-x)\,\mu_{x\ x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right)\,dx \\ + \int_a^\infty l(x,t-x)\,\mu_x\,dx \\ = \overline{P}\left(\overline{A}_a\right)\int_a^\infty l(x,t-x)\,dx \\ + \delta\int_a^\infty l(x,t-x)\,{}_{x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right)\,dx\end{aligned} \tag{18.5.3}$$

La primera integral del lado izquierdo de (18.5.3) es evaluada usando integración por partes. Por lo que obtenemos

$$l(x,t-x)\,{}_{x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right)\Big|_a^\infty + \int_a^\infty\left[b'(t-x)\,s(x) + l(x,t-x)\mu_x\right]{}_{x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right)dx \tag{18.5.4}$$

Complementando la integración por partes es importante remarcar que

$$\frac{d}{dx} l(x,t-x) = \frac{d}{dx} b(t-x)\, s(x) = -b'(t-x)\, s(x) - b(t-x)\, s(x)\, \mu_x$$

Sustituyendo (18.5.4) en (18.5.3) y arreglando los productos (18.5.1). ∇

Ejemplo 18.5

Para el sistema de seguros de vida para la población descrito en el Ejemplo 18.4, suponer que el fondo está en un plan estimado más que en un plan de vida completa. Esto es, la tasa anual estimada, denotada por π_t, por miembro en el tiempo t es igual a la tasa de salida por miembro en el tiempo t. Determine π_t.

Solución:
La tasa estimada puede ser determinada por

$$\pi_t \int_a^\infty l(x,t-x)\, dx = \int_a^\infty l(x,t-x)\, \mu_x\, dx$$

o por

$$\pi_t = \frac{\int_a^\infty l(x,t-x)\ \mu_x\ dx}{\int_a^\infty l(x,t-x)\ dx} \tag{18.5.5}$$

∇

Ejemplo 18.6

Suponga una población estable y actualice

a. Ejemplo 18.4
b. Ejemplo 18.5

Solución:

a. Empezamos con (18.5.1), la cual ha sido ya establecida por la función de densidad de población más general $l(x,u) = b(u)\, s(x)$. Para este ejemplo, $l(x,u) = e^{Ru} b\, s(x)$ y la ecuación de prima asignada llega a ser

$$\overline{P}(\overline{A}_a) \int_a^\infty e^{R(t-x)}\, l_x\, dx + \delta \int_a^\infty e^{R(t-x)}\, l_{x\ x-a} \overline{V}(\overline{A}_a)\ dx$$
$$= \int_a^\infty e^{R(t-x)}\, l_x\ \mu_x\ dx + R \int_a^\infty e^{R(t-x)}\, l_{x\ x-a} \overline{V}(\overline{A}_a)\ dx \tag{18.5.6}$$

El factor e^{Rt} puede ser cancelado para cada término de (18.5.6). Por una interpretación de (18.5.6) desarrollada en el razonamiento general de la solución del Ejemplo 18.4, la proporción de tasa de la prima única a la tasa de beneficio de salida es

$$\frac{\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)\int_a^\infty e^{-Rx}\, l_x\, dx}{\int_a^\infty e^{-Rx}\, l_x\, \mu_x\, dx} = \frac{\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)}{\overline{P}'\left(\overline{A}'_a\right)} \tag{18.5.7}$$

Si $R=0$, la población es estacionaria y la ecuación de prima asignada (18.5.6) llega a ser

$$\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)T_a + \delta\int_a^\infty l_{x\ x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right)\, dx = l_a \tag{18.5.8}$$

mientras la proporción de la tasa de la prima única a la tasa del beneficio de salida, (18.5.7), llega a ser $\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)e_a$.

b. En la población estable, la tasa estimada determinada en (18.5.5) llega a ser

$$\pi_t = \frac{\int_a^\infty e^{-Rx}\ l_x\ \mu_x\ dx}{\int_a^\infty e^{-Rx}\ l_x\ dx} = \overline{P}'\left(\overline{A}'_a\right) \tag{18.5.9}$$

la cual es independiente de t. Si $R=0$, esto es, la población es estacionaria, $\pi_t = 1/e_a$. ∇

Comentario:

Un aspecto del Ejemplo 18.6 merece un comentario especial. La tasa de prima pagada requerida por cada miembro de la población estable por encima de la edad a por debajo de la vida total y métodos de reserva estimados son, respectivamente, $\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)$ y $\overline{P}\left(\overline{A}'_a\right)$. En el Ejercicio 18.21 es demostrado que si la fuerza de mortalidad es creciente, entonces

$$\overline{P}\left(\overline{A}_a\right) > \overline{P}\left(\overline{A}'_a\right) \text{ si } \delta < R$$
$$\overline{P}\left(\overline{A}_a\right) = \overline{P}\left(\overline{A}'_a\right) \text{ si } \delta = R$$
$$\overline{P}\left(\overline{A}_a\right) < \overline{P}\left(\overline{A}'_a\right) \text{ si } \delta > R$$

Esto es, si la fuerza de interés es menor que la tasa de crecimiento poblacional, la tasa de prima requerida bajo el método de reserva estimada es menor que bajo el método de reserva de vida completa. Si la fuerza de interés es más grande que la tasa de crecimiento poblacional, el método de reserva de vida completa resulta en una tasa de prima pequeña que hace el método de reserva estimada.

Ejemplo 18.7

Proveer la interpretación de un razonamiento general de la población estacionaria completa asignada a la ecuación (18.5.8) colocados como

$$\int_a^{\infty} l_{x\ x-a}\overline{V}\left(\overline{A}_a\right) dx = \frac{l_a - \overline{P}\left(\overline{A}_a\right) T_a}{\delta}$$

Solución:
Esta expresión índica que la reserva total puede ser interpretada como la diferencia entre los valores presentes de dos perpetuidades:

$$\frac{l_a}{\delta} = \begin{array}{l}\text{(el valor presente de una perpetuidad continua}\\ \text{de indemnizaciones pagadas por muerte en una}\\ \text{tasa anual de } l_a)\end{array}$$

$$= \begin{array}{l}\text{(el valor presente de indemnizaciones}\\ \text{por muerte para miembros actuales)}\end{array}$$

$$+ \begin{array}{l}\text{(el valor presente de indemnizaciones}\\ \text{por muerte para miembros futuros).}\end{array}$$

$$\frac{\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)\ T_a}{\delta} = \begin{array}{l}\text{(el valor presente de una perpetuidad continua de}\\ \text{de primas pagadas para una tasa anual de } \overline{P}\left(\overline{A}_a\right)\ T_a)\end{array}$$

$$= \begin{array}{l}\text{(el valor presente de primas para miembros actuales)}\\ + \text{(el valor presente de primas para miembros futuros).}\end{array}$$

Información adicional es obtenida al notar que las primas en la tasa $\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)$ serán pagaderas para edad a por miembros futuros. El valor presente de sus primas será igual al valor presente de sus beneficios. Por lo tanto, el

segundo componente de las interpretaciones de l_a/δ y $\overline{P}\left(\overline{A}_a\right)\ T_a/\delta$ son nivelados y

$$\frac{l_a}{\delta} - \frac{\overline{P}\left(\overline{A}_a\right) T_a}{\delta} = \text{(la reserva total para miembros actuales)}$$

$$= \text{(el valor presente de beneficios para miembros actuales)}$$

$$\text{- (el valor presente de primas para miembros actuales)}$$

$$= \int_a^{\infty} l_{x\ x-a} \overline{V}\left(\overline{A}_a\right)\ dx$$

∇

Los Ejemplos 18.4, 18.6 y 18.7 tratan de la reserva de seguro de vida, o presupuestando, métodos para el cuál el fondo existe. En estos ejemplos las características de los fondos, tras la entrada de todos los miembros de la población de edad a son participantes y han sido examinados desde la edad de entrada a. Cuando todos los miembros exigibles están participando y han participado desde la edad de entrada a, el sistema es llamado ***estado maduro***. Hasta que el tiempo del fondo total es sujeto al crecimiento por una corriente de nuevos entrantes. Nuestros ejemplos tomarán $w-a$ años para el fondo para llegar a un estado maduro.

18.6 Poblaciones Dinámicas

En esta sección regresamos a un examen de la función $b(t)$, la densidad de nacimientos en el tiempo t. El objetivo de éste examen es construir un fundamento bajo el desarrollo del modelo continuo de la Sección 18.3. En adición, las condiciones siguientes de poblaciones estables o estacionarias, desarrolladas en la Sección 18.4, serán exploradas.

Desarrollando un modelo matemático para la densidad de nacimientos introduciremos la ***función de la fuerza de nacimiento***, a ser denotada por $\beta(x,u)$. Entonces $\beta(x,t-x)\,dt$ representa el número de niñas nacidas entre el tiempo t y $t+dt$ para una mujer de edad x quien fue la única nacida en el tiempo $t-x$. La función de fuerza de nacimiento es una edad y una generación específica instantánea de tasa de natalidad para niñas.

El número total de niñas nacidas entre t y $t+dt$ es

$$b_f(t)\,dt = \left[\int_0^\infty l_f(x,t-x)\,\beta(x,t-x)\,dx\right]dt \tag{18.6.1}$$

En (18.6.1) el subíndice f denota que la función relaciona vidas de mujeres. Los nacimientos totales son obtenidos de multiplicar por una constante, (total de nacimientos)/(nacimientos de mujeres), los cuales son un poco más grandes que 2 para casi todas las poblaciones humanas.

Si dividimos (18.6.1) por dt y sustituimos por $l_f(x,t-x)$ en (18.3.1), vemos que la función de densidad de nacimientos de mujeres satisface la ecuación integral

$$b_f(t) = \int_0^\infty b_f(t-x)\,s_f(x,t-x)\,\beta(x,t-x)\,dx \tag{18.6.2}$$

Una ecuación integral es una expresión acerca de las relaciones entre funciones donde las relaciones involucran una integral. El problema es encontrar $b_f(t)$ dada la función $s_f(x,t-x)$ y $\beta(x,t-x)$. En (18.6.3) la función $s_f(x,t-x)\beta(x,t-x)$ es llamada la ***función de maternidad neta*** y será denotada por $\phi(x,t-x)$.

Para el resto de esta sección supondremos que la función de maternidad neta no depende del año de nacimiento de la madre. Esto es, $s_f(x,t-x)\beta(x,t-x) = \phi(x)$. Con esta suposición, la ecuación de la integral (18.6.2) llega a ser

$$b_f(t) = \int_0^\infty b_f(t-x)\,\phi(x)\,dx \tag{18.6.3}$$

En esta sección nos limitaremos verificar que una solución particular de (18.6.3) es

$$b_f(t) = be^{Rt} \tag{18.6.4}$$

donde b es una constante positiva y R es una solución única real de la ecuación

$$H(r) = 1 \tag{18.6.5}$$

Donde

$$H(r)=\int_0^{\infty} e^{-rx}\,\phi(x)\,dx$$

Sustituyendo directamente en (18.6.4) origina

$$be^{Rt}=\int_0^{\infty} be^{R(t-x)}\,\phi(x)\,dx$$

y después de la cancelación de constantes esto llega a ser

$$1=\int_0^{\infty} e^{-Rx}\,\phi(x)\,dx=H(R)$$

La expresión $H(r)=1$ produce una solución real única que puede ser verificada por lo siguiente.

Observación:

1. $H'(r)=-\int_0^{\infty} x e^{-rx}\,\phi(x)\,dx<0$

2. $H(0)=\int_0^{\infty}\phi(x)\,dx>0$

3. $\lim_{r\to\infty} H(r)=0$

4. $\lim_{r\to-\infty} H(r)=\infty$

Estas observaciones están resumidas en la Figura 18.7 junto con el factor

$$H''(r)=\int_0^{\infty} x^2 e^{-rx}\,\phi(x)\,dx>0$$

En la Figura 18.7 vemos que esta es una solución real única R (positiva, pero puede ser negativa) y la verificación es completa.

Si $b_f(t)=be^{Rt}$, entonces $l_f(x,t-x)=be^{R(t-x)}s_f(x)$ y la población de mujeres es estable. En caso especial donde $R=0$, la población de mujeres es estacionaria.

Al comprobar R es positiva, 0 o negativa, examinamos el número β donde

$$\beta = H(0) = \int_0^\infty \phi(x)\,dx$$

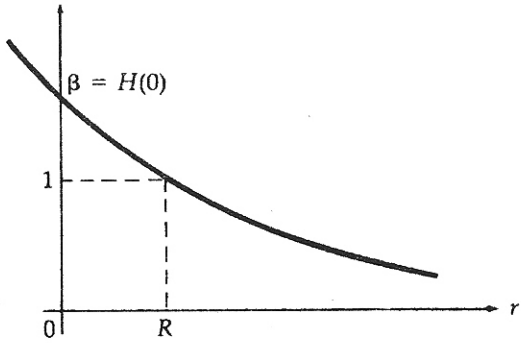


Figura 18.7
Función Típica $H(r)$ y Fórmula (18.6.5)

Estudiando la Figura 18.7 podemos incluir

- si $\beta > 1$, R es positiva y la población es estable y creciente;
- si $\beta = 1$, R es 0 y la población es estacionaria;
- si $\beta < 1$, R es negativa y la población es estable y decreciente.

Desde $H(0) = \beta$ puede ser interpretada como el número de niñas engendradas por cada mujer, ésta es llamada la ***tasa de reproducción neta.*** El parámetro R es llamado la ***tasa intrínseca de crecimiento de población.***

Comentarios:

Todas las poblaciones no son estables como podría ser deducido de esta sección. Diversos aspectos de nuestro modelo pueden no estar acordes con la experiencia actual. Nuestro modelo básico, dado por (18.6.2), fue realizado en la creencia de que la función de supervivencia y la fuerza de de nacimiento no cambian con el tiempo. En (18.6.3) lo restringimos aún más al suponer que la función de maternidad neta depende de la edad, pero no del año de nacimiento de las madres. Las estadísticas de salud pública revelan mayores cambios en las funciones de supervivencia y en las fuerzas de nacimiento en el tiempo.

Además, en la solución de ecuaciones integrales (18.6.3), obtuvimos sólo soluciones reales de la ecuación $H(r)=1$. Dentro del complejo campo de números, un infinito número de soluciones puede ser determinado además de la única solución real. Estas raíces adicionales de $H(r)=1$ siguen las soluciones generales de (18.6.3) de la forma

$$\sum_j c_j\, b_f^{(j)}(t)$$

donde cada $b_f^{(j)}(t)$ es asociada con una raíz de $H(r)=1$. Las raíces complejas, que ocurren en parejas conjugadas, pueden ser útiles para debilitar la ola estructural dentro de la función de densidad de nacimiento.

La teoría poblacional es un conjunto de elegantes ideas matemáticas. Sin embargo, hay sólo algunos problemas estadísticos muy importantes en estimación de sus componentes clave, como la función de supervivencia y la función de fuerza de nacimiento, de datos disponibles. Ha sido observado que estas funciones cambian con el tiempo como una expresión natural de la dinámica de la sociedad humana.

Como es cierto de todos los modelos del fenómeno natural, los modelos matemáticos de las poblaciones tomadas sólo son una pequeña parte de las fuerzas dinámicas que forman la distribución de tamaño y edad de poblaciones reales. Lo mismo si el modelo de la población estable es una aproximación satisfactoria en un tiempo, esto no puede ser apropiado para un término largo. La constante R no puede ser mayor que 0 en un espacio finito para un periodo largo de tiempo. De alguna manera, si R es negativa para un periodo largo de tiempo, extingue las fases de la población estable.

18.7 Notas y Referencias

Los fundamentos de la teoría poblacional fueron realizados, en parte, por Lokta quien tuvo experiencia resolviendo preguntas sobre seguros de vida. La teoría básica es desarrollada en un libro por Keyfitz (1968) y las aplicaciones en otro libro por Keyfitz (1977). Keyfitz y Beekman (1984) escribieron un libro de texto dirigido ha ayudar a estudiantes universitarios de demografía a través de un conjunto de ejercicios graduales. Los diagramas de Lexis son llamados así por su creador Wilhelm Lexis (1837-1914), estadista, demógrafo y economista alemán. Charles Trowbridge (1952, 1955) promovió el uso de modelos de población estacionarios en el estudio de las características de pensión y métodos de reserva en los seguros de vida.

Ejercicios

Sección 18.2

18.1. Usando el diagrama de Lexis de la Figura 18.1 calcule
   a. la edad promedio de empleados en el tiempo -25
   b. el número de empleados que han alcanzado edad 50 en la historia de su vida laboral
   c. de los empleados en el tiempo -25, el número que han alcanzado o podrán alcanzar edad 50 en el tiempo de su vida laboral.

Sección 18.3

18.2. Suponga

$$b(u) = 100\left[1 + \cos(\pi\ u/200)\right] \quad -\infty < u < \infty$$
$$s(x,u) = \cos(\pi\ x/200) \quad 0 < x \le 100$$

Calcule el número de individuos que alcanzan edad 50 entre el tiempo 50 y 100.

18.3. Suponga

$$b(u) = 100\left(1 - e^{-u/100}\right) \quad u > 0$$
$$s(x) = e^{-x/100} \quad x > 0$$

Calcule el número de individuos entre las edades 25 y 50 en el tiempo 100.

18.4. Calcule el número de vidas que alcanzarán edad 25 entre el tiempo 50 y 51 y morirán antes del tiempo 53. Use las funciones $b(u)$ y $s(x,u)$ especificadas en el Ejercicio 18.3. (Esta es una versión numérica del Ejemplo 18.1.)

18.5. Actualice el Ejemplo 18.2 suponiendo $s(x,u) = s(x)$ y $b(u) = l_0$.

18.6. Muestre las integrales para calcular el número de estos entre las edades 20 y 50 en el tiempo 0 quienes morirán a una edad menor a 80 y antes del tiempo 50.

18.7. a. Sea $N(t)$ que denota el número de miembros en una población estable en el tiempo t y demuestre que $dN(t)/dt = R\ N(t)$.

b. La razón de nacimientos y el tiempo t está definida como $b(t)/N(t)$. Para una población estable demuestre que la razón de nacimientos, denotada por $i(t)$, es

$$i(t) = \left[\int_0^\infty e^{-Rx}\, s(x)\, dx \right]^{-1}$$

18.8. Si $\mu_x = ax$, $a > 0$ y $b(u) = be^{Ru}$, exprese el tamaño de la población total en el tiempo t en los términos de $\Phi(z)$, la *f.d.* para una distribución $N(0,1)$.

18.9. Suponga una población estable y obtenga una expresión para la edad promedio de éstas, entre las edades a y r en el tiempo t. Vuelva a expresar suponiendo $R = 0$.

18.10. Si $\tilde{\mu}_x = \mu_x + 0.05/\overset{o}{e}_x$, Demuestre que $\tilde{p}_x = p_x \left(T_{x+1}/T_x\right)^{0.05}$.

18.11. Confirme que $s^*(x) = e^{-Rx} s(x)$, $R \geq 0$, es una función de supervivencia. Entonces

a. muestre la *f.d.p.* y *f.d.* asociada con $s^*(x)$

b. demuestre que la esperanza de vida completa de la edad x_0 asociada con la función de supervivencia $s^*(x)$ es $\overline{a}'_{x_0}$ y que la varianza del tiempo hasta la muerte es $2\ \left(\overline{I}\,\overline{a}\right)'_{x_0} - \overline{a}'^2_{x_0}$.

18.12. La tasa de mortalidad bruta en el tiempo t está definida por

$$\frac{\int_0^\infty l(x, t-x)\, \mu(x, t-x)\, dx}{\int_0^\infty l(x, t-x)\, dx}$$

Si la población es estable, demuestre que la tasa de mortalidad bruta es igual a $i(t) - R$ donde $i(t)$ es la tasa de natalidad definida en el Ejercicio 18.7(b).

Sección 18.5

18.13. Suponga una población estacionaria con función de supervivencia $s(x)$ y que ésta misma función de supervivencia es usada en la evaluación de funciones actuariales. Verifique e interprete la ecuación.

$$l_r\,\bar{a}_r + \delta \int_r^\infty l_x\,\bar{a}_x\,dx = T_r$$

18.14. Suponga una población estable con función de supervivencia $s(x)$ y que esta misma función de supervivencia es usada en la evaluación de funciones actuariales. Confirme e interprete las siguientes identidades.

a. $$l(a,t-a)\,\bar{a}_{\overline{a:r-a}|} + \delta \int_a^r l(x,t-x)\,\bar{a}_{\overline{x:r-x}|}\,dx$$
$$= \int_a^r l(x,t-x)\,dx + R\int_a^r l(x,t-x)\,\bar{a}_{\overline{x:r-x}|}\,dx$$

[Sugerencia: Aplique (5.3.26).]

b. $$l(a,t-a)\,\bar{A}_a + \delta \int_a^\infty l(x,t-x)\,\bar{A}_x\,dx$$
$$= \int_a^\infty l(x,t-x)\,\mu_x\,dx + R\int_a^\infty l(x,t-x)\,\bar{A}_x\,dx$$

18.15. Si $b(u)=100e^{0.01u}$, edad $a=0$ y $s(x)=e^{-x/50}$, calcule las tasas promedio, π_t, para encontrar un sistema de seguro de vida completa como en el Ejemplo 18.5.

18.16. La proporción de ancianos con edad dependiente para una población en el tiempo t es

$$f(t)=\frac{\int_{65}^\infty l(x,t-x)\,dx}{\int_{20}^{65} l(x,t-x)\,dx}$$

Para una población estable demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial R}\log f(t) = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

donde $\overline{x}_1$ es la edad promedio de éstos, entre las edades 20 y 65 en el tiempo t y $\overline{x}_2$ es la edad promedio de éstas, superiores a edad 65 en el tiempo t.

Sección 18.6

18.17. Dada la función de maternidad neta

$$\phi(x) = x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

a. calcule R
b. ¿es la población estable o estacionaria si $\alpha = 2$ y $\beta = 1$?

Misceláneos

18.18. Suponga que el número en una población en el tiempo t satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{c}{a}\left\{N(t)\left[a - N(t)\right]\right\} \quad a > 0$$

Note que $N(t)$ aproxima a a, la razón de cambio del tamaño en la población es 0. Cada uno de los modelos incorpora límites alrededor en el crecimiento de una población.

a. Verifique que la función $N(t) = a\left[1 + be^{-ct}\right]^{-1}$, $b > 0$, satisface la ecuación diferencial. Esta es llamada la ***función logística.***
b. Si $c > 0$, calcule $\lim_{t\to\infty} N(t)$ y esboce la curva de $N(t)$.
c. Determine la abscisa del punto de inflexión de $N(t)$.

18.19. Si la fuerza de mortalidad es estrictamente creciente, demuestre

a. $s(x)s(y) \geq s(x+y),\ x \geq 0,\ y \geq 0$

b. $s(x)\int_0^\infty s(y)\,dy \geq \int_0^\infty s(x+y)\,dy$

c. $s(x)\int_0^\infty s(y)\,dy \geq \int_x^\infty s(w)\,dw$

d. $\int_0^\infty s(y)\,dy \geq \int_x^\infty \frac{s(w)}{s(x)}\,dw$

e. $\overset{0}{e}_0 \geq \overset{0}{e}_x$

18.20. En el Ejercicio 18.19, multiplique por v^y y demuestre que $\bar{a}_0 \geq \bar{a}_x$.

18.21. a. Demostre que $\overline{P}(\overline{A}_x)$ puede ser escrita como el peso promedio de la fuerza de mortalidad μ_{x+t} donde el peso de la función es

$$w(t,\delta) = \frac{v^t{}_t p_x}{\bar{a}_x}$$

b. Verifique que

(i) $\int_0^\infty w(t,\delta)\,dt = 1$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t} w(t,\delta) \leq 0$

(iii) $\frac{\partial}{\partial \delta} w(t,\delta) = \frac{v^t{}_t p_x \left[-t\,\bar{a}_x + (\bar{I}\,\bar{a})_x\right]}{(\bar{a}_x)^2}$

c. Si la fuerza de mortalidad es estrictamente creciente, use los resultados (b)(ii) y (b)(iii) para demostrar que un incremento en la fuerza de interés incrementa el peso apegado a valores pequeños de la fuerza de mortalidad y decrecimiento del peso apegado a valores grandes de la fuerza de mortalidad. Por tanto, si la fuerza de mortalidad es estrictamente creciente, un incremento en la fuerza de interés decrecerá $\overline{P}(\overline{A}_x)$.

TEORÍA DE FINANCIAMIENTO DE PENSIONES

19.1 Introducción

En el Capítulo 10 estudiamos el valor presente actuarial de beneficios y contribuciones con respecto a un participante en un plan de pensiones. Estos valores presentes actuariales para participantes individuales son necesariamente incluidos en el proceso para determinar el valor presente actuarial total para el plan. Estos valores totales conjuntamente con los bienes actuales son compensados con los valores presentes totales de contribuciones futuras. El diseño para las contribuciones totales requeridas para compensar los pagos por beneficio es determinado por un ***costeo actuarial*** o ***método de financiamiento.*** En este capítulo en resumen están definidas las funciones útiles para el estatus de financiamiento para un plan de pensiones. Estas funciones son entonces usadas para definir los métodos de costeo actuarial y para examinar las propiedades de estos métodos.

Para ello asumiremos algo de teoría de población del Capítulo 18. Aquí el estudio será similar a lo desarrollado en los Ejemplos 18.4, 18.5, 18.6 y 18.7 para reserva alternativa o métodos presupuestados en el reconocimiento para el sistema de seguro de vida para una población.

Al ordenar la integración de ideas para este capítulo desarrolladas anteriormente, el lector podrá tener presente algunas limitaciones básicas en las ideas presentadas aquí:

- a fin que de proteger los intereses de los participantes y para limitar el monto de renta en las cuales los impuestos son aplazados (porque esta es contribuida a un plan de pensiones), para regularlos los gobiernos han elegido los métodos de costeo actuarial. Estas regulaciones son importantes en la práctica, pero no serán tratados aquí.

- Los planes de pensiones frecuentemente proveen diferentes tipos de beneficios. En adición para la renta por jubilación, muerte y beneficios por incapacidad son comunes y en muchas jurisdicciones son requeridos los beneficios reservados. La determinación del valor presente actuarial de algunos de estos beneficios se cubrió en el Capítulo 10. En este capítulo, el modelo usado provee sólo para las rentas por beneficio de jubilación. Esta simplificación es adoptada de modo que la atención puede ser enfocada en las propiedades de varios métodos de costeo actuarial. Aunque la mayoría de los planes de pensiones proporcionan rentas de jubilación y una tasa dependiente en alguna forma de renta fija antes de la jubilación, el modelo usado en este capítulo específica un beneficio de pensión inicial tasa dependiente sólo en la tasa de renta pagada al retiro. Una vez más ésta simplificación es hecha para permitir concentración en los métodos de costeo actuarial.

- Continuando el tema de este trabajo es el valor presente actuarial que requiere la aplicación de factores de intereses y probabilidades de pagos futuros contingentes. En este capítulo los pagos futuros dependerán de un gran número de eventos inciertos. Sin embargo, en concordancia con nuestro objetivo para estudiar los métodos de costeo actuarial, una observación determinística es adoptada en este capítulo.

19.2 El modelo

Consideramos una población compuesta por miembros entrando a edad a, jubilándose a edad r y sujeto a una función de supervivencia, $s(x)$, $x \geq a$ con $s(a) = 1$. Para $a \leq x < r$, el decremento puede ocurrir por mortalidad o por otras causas, pero para $x \geq r$ la mortalidad puede ser sólo causa de decremento. La densidad de nuevos participantes a edad a en el tiempo u puede ser dado como $n(u)$ y la densidad de éstos alcanzando edad x en el tiempo t por

$$l(x,u) = n(u)\, s(x) \tag{19.2.1}$$

Donde $u = t - x + a$ es el tiempo de entrada en el plan. La Fórmula (19.2.1) es relacionada con (18.3.1) excepto que el año de nacimiento ocurre a la edad a para comenzar un participante en el plan. Asumimos que la función de supervivencia no depende de u.

También asumimos que la tasa salarial para cada miembro a edad x en el tiempo 0 es $w(x)$, $a \le x < r$. La función $w(x)$ expresa la experiencia individual y los componentes principales del cambio de salario. Las tasas salariales también cambian por un factor de año de experiencia, $g(t)$, reflejando la inflación y los cambios en la productividad de todos los participantes. Este factor no depende de la edad del individuo. Así la tasa de salario anual esperada en el tiempo t para un miembro de edad x esta dado por la fórmula

$$w(x)\, g(t) \quad a \le x < r \tag{19.2.2}$$

Esto puede compararse con el modelo simple usado en (10.2.1) donde los cambios de salario considerados, están en función de sólo edades alcanzadas.

Comparando con (18.3.5), identificamos que la tasa total salarial en el tiempo t para la $l(x,t-x+a)dx$ miembros entre las edades x y $x+dx$ es $l(x,t-x+a)w(x)g(t)dx$ y la tasa salarial anual total en el tiempo t es

$$W(t) = \int_a^r l(x, t-x+a)\, w(x)\, g(t)\, dx \tag{19.2.3}$$

La Fórmula (19.2.3) incorpora una notación convencional usada en el resto de este capítulo. Un símbolo remarcado representa una cantidad para todos los participantes. Así $W(t)$ representa la nómina total de la tasa de pagos en el tiempo t.

El modelo del plan de pensiones considerado en este capítulo proporciona sólo anualidades pagaderas anualmente antes de conseguir su retiro a edad r. La tasa anual de pensión inicial es una fracción f de la tasa del salario final. Así para un miembro retirado en el tiempo t, la tasa de pago proyectada es

$$f\, w(r)\, g(t) \tag{19.2.4}$$

Para un jubilado a edad x en el tiempo t, la tasa anual del pago de pensión es proyectada como

$$f\, w(r)\, g(t-x+r)\, h(x) \quad x \ge r \tag{19.2.5}$$

Donde $h(x)$ representa un factor de ajuste aplicado a la tasa de pago de pensión inicial de $f\, w(r)g(t-x+r)$ para quien se retira $x-r$ años atrás. Notemos que $h(r)=1$. Como ejemplo, $h(x)$ puede ser la función exponencial $\exp\left[\beta(x-r)\right]$ donde β es una tasa constante de incremento (posiblemente vinculada a la tasa de inflación esperada).

El modelo del plan será el centro de nuestra discusión de métodos de costeo actuarial es un **plan de beneficio definido**. El plan de beneficios definidos es recibido por los participantes jubilados, y podrá concentrarse en describir los métodos de costeo actuarial que producirá una corriente de contribuciones e ingresos por inversiones para el balance de beneficios pagados. En los **planes de contribución definida** el punto inicial varía. La contribución realizada en nombre de cada participante es establecida, tal vez como una constante o como una fracción del salario. El problema actuarial es entonces, calcular el nivel del beneficio que producirá un valor presente actuarial igual al valor presente actuarial de las contribuciones. Esto puede ser determinado en el tiempo de retiro por utilizar las contribuciones acumuladas proporcionando un equivalente de jubilación anual, o en una base año por año, de acuerdo a una anualidad de jubilación diferida es conseguida por la contribución de cada año.

19.3 Reserva terminal

Bajo el **método de reserva terminal** las pensiones no son fondeadas por las contribuciones durante el periodo activo del miembro del grupo. En su lugar las contribuciones sencillas son hechas para la reserva en el tiempo de retiro. La tasa contribución requerida, o **tasa de costo normal**, bajo el método de reserva terminal en el tiempo t, denotado por ${}^{T}P(t)$, es la tasa en la cual el valor presente actuarial de pensiones futuras para los miembros alcanzando edad r es incluido en el tiempo t. Para determinar ${}^{T}P(t)$ en el modelo del plan, asumimos los intereses son devengados y una fuerza anual de δ y denotamos por $\overline{a}_r^h$ el valor presente actuarial de una anualidad pagadera continuamente para una vida a edad r con tasa de ingreso $h(x)$ por año cuando (r) alcance edad x. Por tanto,

$$\overline{a}_r^h = \int_r^\infty e^{-\delta(x-r)}\, h(x)\frac{s(x)}{s(r)}\,dx \qquad (19.3.1)$$

Para (18.3.2), tenemos $l(r,t-r+a)dt$ miembros alcanzando edad r entre el tiempo t y $t+dt$, y por (19.2.4) se acumularán las pensiones en una tasa inicial promedio de $f\,w(r)g(t)$. Por tanto,

$$^T P(t) = f\,w(r)\,g(t)\,l(r,t-r+a)\,\overline{a}_r^h \qquad (19.3.2)$$

Observaremos que $^T P(t)$ tiene una construcción básica para las varias funciones usadas para describir las operaciones de financiamiento para el modelo del plan.

Para ilustrar la teoría, nos referiremos con frecuencia al **caso exponencial** teniendo las siguientes características:

- $n(u) = ne^{Ru}$, $n>0$. Puesto que hemos asumido que la función de supervivencia es independiente en el tiempo, como vemos para (18.4.3) y la forma de $n(u)$ que el tamaño de la población esta cambiando exponencialmente a una tasa R, pero con una distribución de edad estable dentro de la población.
- $g(t) = e^{\tau t}$; esto es, los salarios están cambiando exponencialmente a una tasa τ
- $h(x) = e^{\beta(x-r)}$; esto es, las pensiones son ajustadas para una tasa anual constante de β.

Estudiando antes el caso exponencial podremos entender sus limitaciones. Es claro que para las condiciones de crecimiento exponencial o u otro no podrá existir indefinidamente. Cuando el caso exponencial se realiza aproximadamente, las tres tasas económicas, interés δ, salarios τ y pensión ajustada β son interrelacionadas. Por ejemplo, si β es relacionada con la inflación, es convencional al asumir que $\delta > \beta$ incluso a pesar que han sido periodos de inflación inesperada donde los cambios se mantienen. (si $\beta > \tau$, la consecuencia será una mejora en la posición económica de salidas relativas de vidas para vidas activas, y por tanto $\beta \le \tau$ es asumida usualmente.)

Ejemplo 19.1

En el caso exponencial, demostrar que ${}^{T}P(t+u) = e^{\rho u}\,{}^{T}P(t)$ donde $\rho = \tau + R$.

Solución:
Por (19.2.1) tenemos

$$l(r, t+u-r+a) = n\,s(r)\,e^{R(t+u-r+a)}$$

y de (19.3.1)

$$\overline{a}_r^{h} = \int_r^{\infty} e^{-(\delta-\beta)(x-r)}\,\frac{s(x)}{s(r)}\,dx = \overline{a}_r^{'}$$

Donde $\overline{a}_r^{'}$ es valuada y la fuerza de interés $\delta - \beta$. Entonces usando (19.3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} {}^{T}P(t+u) &= f\,w(r)\,e^{\tau(t+u)}\,n\;s(r)e^{R(t+u-r+a)}\,\overline{a}_r^{'} \\ &= e^{(\tau+R)u}\,f\,w(r)e^{\tau t}\,n\;s(r)e^{R(t-r+a)}\,\overline{a}_r^{'} = e^{\rho u}\,{}^{T}P(t) \end{aligned}$$

Diversos términos en este desarrollo pueden ser interpretados independientemente. La tasa $\rho = \tau + R$ puede ser interpretada como un crecimiento económico total o tasa descompuesta. El término $n\,s(r)$ puede ser interpretado como l_r, el número de sobrevivientes a edad r de n miembros en un grupo de sobrevivientes a edad a controlado por la función de supervivencia de decrementos múltiples $s(x)$, $a \le x \le r$. ▼

19.4 Acumulación de pasivo actuarial.

Los diferentes métodos de costeo actuarial por la tasa y las obligaciones de pensiones prospectivas son reconocidos durante el periodo activo de los participantes. El método de costeo actuarial terminal descrito en la Sección 19.3 no reconoce la reserva hasta llegar a la edad de retiro r. Para expresar la acumulación de reserva actuarial para una pensión comenzando en la edad r, definimos por un método de costeo una ***función acumulativa*** $M(x)$. Aquí $M(x)$ representa una fracción del valor actuarial de pensiones futuras acumuladas como una reserva actuarial a edad x bajo el método de costeo actuarial. La función $M(x)$ es no decreciente, función continua por la derecha para la edad variable con $0 \le M(x) \le 1$ para toda $x \ge a$. Bajo la **reserva**

inicial todo el pasivo para la pensión futura es conocida cuando los participantes que entran a edad a, así $M(x)=0$ para $x<a$ y $M(x)=1$ para $x\geq a$. Para otros métodos de costeo actuarial puede asumir que $M(a)=0$. Para métodos de reserva requiriendo acumulación o reconocimiento de pasivo total para edad r, $M(x)=1$ para $x\geq r$.

La función $M(x)$ puede ser también definida en términos de una ***función de densidad acumulativa de pensiones*** denotada por $m(x)$ cada una como

$$M(x)=\int_a^x m(y)\,dy \quad x\geq a \tag{19.4.1}$$

Notemos la analogía entre $M(x)$ y $m(x)$ y la función de distribución, $F(x)$, y la función de densidad probabilidad, $f(x)$. En general podemos asumir que $m(x)$ continua para $a<x<r$, continua por la derecha en a y continua por la izquierda en r, y en $m(x)=0$ para $x>r$. En el caso continuo tenemos por (19.4.1) que

$$m(x)=M'(x) \quad a<x<r \tag{19.4.2}$$

En los puntos de discontinuidad de $M'(x)$, la densidad $m(x)$ no esta definida y podemos asignar de manera arbitraria valores para esto, por ejemplo, el límite por la izquierda o por la derecha.

La ventaja de introducir la función de acumulación es que uno puede desarrollar simultáneamente la teoría de pensión para toda una familia de métodos de costeo actuarial en lugar de separadamente para cada método.

Ejemplo 19.2

Para $M(x)=\bar{a}_{a:\overline{x-a}|}/\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}$, $a\leq x\leq r$, verificar que

a. $M(x)$ tiene las propiedades de una función acumulativa

b. $M(x)_{r-x|}\bar{a}_x$ es igual para la reserva a la edad x en una prima anual de vida continua diferida emitida a edad a y pagando una anualidad continua de 1 por año comenzando en r.

Solución:

a. $$M(x)=\frac{\int_a^x e^{-\delta(y-a)}\,s(y)\,dy}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)}\,s(y)\,dy}$$

así

$$M'(x)=m(x)=\frac{e^{-\delta(x-a)}s(x)}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)}\,s(y)\,dy}>0 \qquad (19.4.3)$$

$M(a)=0$ y $M(r)=1$ confirmando que $M(x)$ tiene las propiedades de una función acumulativa.

b. Una fórmula retrospectiva da la reserva a edad x como

$$\begin{aligned}\overline{P}\left({}_{r-a|}\overline{a}_a\right)\overline{s}_{\overline{a:\,x-a|}} &= \frac{{}_{r-a|}\overline{a}_a}{\overline{a}_{\overline{a:\,r-a|}}}\overline{s}_{\overline{a:\,x-a|}} \\ &= \frac{{}_{x-a}E_a\;{}_{r-x|}\overline{a}_x\;\overline{a}_{\overline{a:\,x-a|}}}{\overline{a}_{\overline{a:\,r-a|}}\qquad {}_{x-a}E_a} \\ &= {}_{r-x|}\overline{a}_x\,M(x)\end{aligned}$$

▼

19.5 Funciones básicas para miembros activos

En esta sección definimos un número de funciones básicas relacionadas a la reserva de beneficios pensionables en el modelo del plan. Las funciones relacionarán al grupo activo y serán denotadas en los símbolos con el prefijo a.

19.5.1 Valor presente actuarial en el tiempo t para pensiones futuras del grupo activo, $(aA)(t)$

Los $l(x,t-x+a)dx$ miembros entre las edades x y $x+dx$ en el tiempo t, al final de $r-x$ años, costeo de reserva terminal de ${}^{T}P(t+r-x)dx$. Por lo tanto

$$(aA)(t)=\int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P(t+r-x)\,dx \tag{19.5.1}$$

Ejemplo 19.3

Demuestra que

$$\frac{d}{dt}(aA)(t)=e^{-\delta(r-a)}\,{}^{T}P(t+r-a)-{}^{T}P(t)+\delta(aA)(t) \tag{19.5.2}$$

Interprete la ecuación.

Solución:
Observamos que

$$\frac{\partial}{\partial t}{}^{T}P(t+r-x)=-\frac{\partial}{\partial x}{}^{T}P(t+r-x) \tag{19.5.3}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(aA)(t)&=\int_a^r e^{-\delta(r-x)}\frac{\partial}{\partial t}{}^{T}P(t+r-x)dx\\&=-\int_a^r e^{-\delta(r-x)}\frac{\partial}{\partial x}{}^{T}P(t+r-x)dx\\&=-e^{-\delta(r-x)}{}^{T}P(t+r-x)\Big|_{x=a}^{x=r}+\delta\int_a^r {}^{T}P(t+r-x)e^{-\delta(r-x)}dx\\&=e^{-\delta(r-a)}{}^{T}P(t+r-a)-{}^{T}P(t)+\delta(aA)(t)\end{aligned}$$

La tasa de cambio en el valor presente actuarial de pensiones futuras iguales al valor presente de la tasa de reserva terminal para nuevos entrantes (que se jubilarán $r-a$ años después) menos la tasa de reserva terminal para miembros

jubilados en este momento más la tasa de intereses de renta del valor presente actuarial en el tiempo t. ▽

19.5.2 Tasa de Costeo Normal, $P(t)$

Asumimos que un método de costeo actuarial con función acumulada $M(t)$ ha sido seleccionada. Buscamos para expresar la tasa de costo normal para el modelo del plan, esto es, para mostrar la función que, para nuestro modelo continuo, asignemos el valor presente actuarial de beneficios de pensiones futuras para varios tiempos de valuación de un participante en vida activa.

Como en (19.5.1) el costo de reserva terminal futura para miembros entre edades x y $x+dx$ en el tiempo t es ${}^{T}P(t+r-x)\,dx$. En la función de costo normal este pasivo es reconocido y en tasa $m(x)$. Tenemos

$$P(t)=\int_a^r e^{-\bar{\delta}(r-x)}\,{}^{T}P(t+r-x)\,m(x)\,dx \tag{19.5.4}$$

Al considerar los participantes que entran entre u y $u+du$. Uno puede visualizar como la tasa de costo normal, $P(t)$, $u\le t\le u+r-a$, complementando la reserva del beneficio de pensiones de un miembro que entran a edad a en el tiempo u y jubilados $r-a$ años después. Su tasa de costeo de reserva última terminal será ${}^{T}P(u+r-a)$. En el tiempo t, $u\le t\le u+r-a$, la densidad de contribuciones de este grupo para la integral definiendo $P(t)$ es

$$e^{-\bar{\delta}(r-x)}\,{}^{T}P(t+r-x)\,m(x)$$

donde $x=a+t-u$. En los $r-x$ años hasta que se incremente el retiro por el interés ganado, para

$${}^{T}P(t+r-x)\,m(x) \tag{19.5.5}$$

Y esta densidad en términos de u es ${}^{T}P(u+r-a)\,m(a+t-u)$. Integrando este interés de contribuciones acumuladas obtenemos

$$\int_u^{u+r-a}{}^{T}P(u+r-a)\,m(a+t-u)\,dt={}^{T}P(u+r-a)$$

la tasa de costeo de reserva terminal requerida.

Ejemplo 19.4

a. Demuestra que en el caso exponencial

$$P(t) = \exp\left\{-\delta\left[r - X(\theta)\right]\right\}\, {}_{T}P\left[t + r - X(\theta)\right] \tag{19.5.6}$$

donde

$$\theta = \delta - \rho = \delta - \tau - R$$

y

$$e^{\theta X(\theta)} = \int_a^r m(x)\, e^{\theta x}\, dx \tag{19.5.7}$$

b. Interpreta (19.5.6)

Solución:

a. Por (19.5.4) y la solución del Ejemplo 19.1 tenemos

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}_{T}P(t + r - x)\, m(x)\, dx \\ &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}_{T}P\left\{t + \left[X(\theta) - x\right] + r - X(\theta)\right\} m(x)\, dx \\ &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, e^{\rho\left[X(\theta)-x\right]}\, {}_{T}P\left[t + r - X(\theta)\right] m(x)\, dx \\ &= e^{\left[-\delta r + \rho X(\theta)\right]}\, {}_{T}P\left[t + r - X(\theta)\right] \int_a^r e^{(\delta-\rho)x}\, m(x)\, dx \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo $\delta - \theta$ por ρ y utilizando (19.5.7), tenemos

$$P(t) = e^{\left[-\delta r + (\delta-\theta)X(\theta)\right]}\, {}_{T}P\left[t + r - X(\theta)\right] e^{\theta X(\theta)}$$

la cual reduce a (19.5.6).

b. La tasa de costo normal anual en el tiempo t es suficiente con el interés que provee un costo de reserva terminal $r - X(\theta)$ años después. El número $X(\theta)$ tiene su existencia asegurada por el teorema del valor medio para integrales y puede ser interpretado como una edad promedio de pago de costo normal asociado con la función de densidad acumulada

$m(x)$ en el caso exponencial con $\theta = \delta - \tau - R$. Por lo tanto, $X(\theta)$ depende de la tasa de interés y del salario y tasas de cambio de la población. ∇

19.5.3 Pasivo actuarial acumulado, $(aV)(t)$

Asumiremos como en la Sección 19.5.2 que el método de costo actuarial con función acumulada $M(x)$ ha sido elegido. Por analogía con (19.5.4) tenemos que el pasivo actuarial acumulado para vidas activas en el tiempo t esta dado por

$$(aV)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{r-t}P(t+r-x)\, M(x)\, dx \tag{19.5.8}$$

En la integral estamos aplicando el concepto de que una fracción $M(x)$ del valor presente actuarial de una pensión futura acumulada como un pasivo actuarial para edad x.

Si rescribimos (19.5.4) de la forma

$$P(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{r-t}P(t+r-x)\, d\,M(x)$$

e integramos por partes, obtenemos, por usar a (19.5.3),

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-\delta(r-x)}\, {}^{r-t}P(t+r-x)\, M(x)\Big|_{x=a}^{x=r} \\ &\quad - \delta \int_a^r M(x)\, e^{-\delta(r-x)}\, {}^{r-t}P(t+r-x)\, dx \\ &\quad + \int_a^r M(x)\, e^{-\delta(r-x)}\, \frac{\partial}{\partial t}\, {}^{r-t}P(t+r-x)\, dx \\ &= {}^{r-t}P(t) - \delta(aV)(t) + \frac{d}{dt}(aV)(t) \end{aligned} \tag{19.5.9}$$

o

$$P(t) + \delta(aV)(t) = {}^{r-t}P(t) + \frac{d}{dt}(aV)(t) \tag{19.5.10}$$

La ecuación (19.5.10) puede ser interpretada desde el punto de vista de teoría de composición de intereses. Consideramos el pasivo actuarial acumulado,

$(aV)(t)$, como un fondo en costos normales, a una tasa $P(t)$, para los cuales los costos de reserva terminal son pagados y transferidos a una tasa ${}^{T}P(t)$, y son transferidos con miembros activos jubilados. El lado izquierdo de (19.5.10) es la tasa de renta para el fondo por costos normales e intereses. El lado derecho representa el reparto de las tasas de rentas para la tasa de reserva terminal de cambio en el tamaño de reserva.

Ejemplo 19.5

Demostrar que en el caso exponencial

a. $P(t+u)=e^{\rho u}P(t), \quad \rho=\tau+R$ (19.5.11)

b. $(aV)(t+u)=e^{\rho u}(aV)(t)$ (19.5.12)

c. $P(t)+\theta(aV)(t)={}^{T}P(t), \quad \theta=\delta-\rho$ (19.5.13)

d. $P(t)<{}^{T}P(t) \quad si \quad \theta>0$

$P(t)={}^{T}P(t) \quad si \quad \theta=0$ (19.5.14)

$P(t)>{}^{T}P(t) \quad si \quad \theta<0$

Solución:

a. En el Ejemplo 19.2 observamos que ${}^{T}P(t+u)=e^{\rho u}\,{}^{T}P(t)$. Entonces sustituyendo en (19.5.4), obtenemos

$$\begin{aligned} P(t+u) &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P(t+u+r-x)\,m(x)\,dx \\ &= e^{\rho u}\int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P(t+r-x)\,m(x)\,dx \\ &= e^{\rho u}\,P(t) \end{aligned}$$

b. La solución inicia con la definición de $(aV)(t)$ en (19.5.8) y siguen los mismos pasos como usamos en la parte (a).

c. Rescribiendo (19.5.12) como

$$\frac{(aV)(t+u)-(aV)(t)}{u}=\frac{e^{\rho u}-1}{u}(aV)(t)$$

y tendiendo $u \to 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(aV)(t) = \rho(aV)(t) \tag{19.5.15}$$

Ahora sustituyendo (19.5.15) en (19.5.10) produce (19.5.13).

c. Las desigualdades siguen para (19.5.13). Este ejemplo revela el papel crítico que $\theta = \delta - \tau - R$ juega en el caso exponencial.

∇

19.5.4 Valor presente actuarial de costos normales futuros, $(Pa)(t)$

En la Sección 19.5.1 denotamos que de $l(x,t+x-a)dx$ miembros entre las edades x y $x+dx$ en el tiempo t tendríamos un costo de reserva terminal de ${}^{T}P(t+r-x)dx$ cuando ellos se retiran $r-x$ años después. Como estos miembros pasan de edad y a $y+dy$, $x \le y < r$, el costo normal $e^{-\delta(r-y)}\,{}^{T}P(t+r-x)dx\,m(y)\,dy$ será pagado. El valor presente actuarial de este costo normal es

$$e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P(t+r-x)dx\,m(y)\,dy \tag{19.5.16}$$

Y el valor presente de costos normales futuros, denotados por $(Pa)(t)$, para todos los miembros activos es

$$(Pa)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P(t+r-x)\int_x^r m(y)\,dy\,dx \tag{19.5.17}$$

o

$$(Pa)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P(t+r-x)\left[1-M(x)\right]dx$$

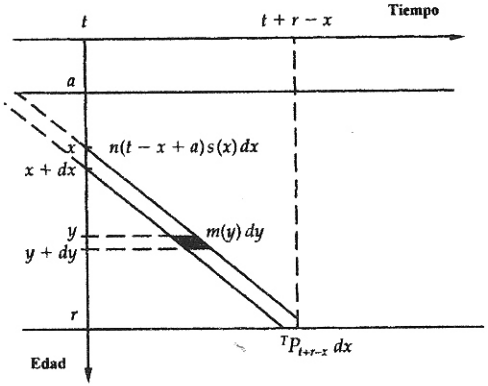


Figura 19.1 Formulación de $(Pa)(t)$

La Figura 19.1 ilustra las ideas en el desarrollo de $(Pa)(t)$. La expresión (19.5.16) representa el valor presente en el tiempo t para el elemento costo en el área sombreada. En (19.5.17), la integral interna representa la adición de elementos a lo largo de la diagonal y la integral del exterior el valor presente de costo normal futuro en el tiempo t para todas las edades.

Si seguimos para (19.5.17), (19.5.1) y (19.5.8) que

$$(Pa)(t) = (aA)(t) - (aV)(t) \tag{19.5.18}$$

o

$$(aV)(t) = (aA)(t) - (Pa)(t) \tag{19.5.19}$$

La Fórmula (19.519) expresa el mismo concepto como las fórmulas de reserva prospectiva del Capítulo 7 y es frecuentemente utilizado para definir $(aV)(t)$. Esto es,

(el pasivo actuarial en el tiempo t para miembros activos)

= (el valor presente actuarial de pensiones futuras de miembros activos)
- (el valor presente actuarial de costos normales futuros)

Por analogía con los conceptos del Capítulo 7, $V = A - Pa$ o $A = V + Pa$, uno puede argumentar que el valor presente actuarial de pensiones futuras para vidas activas es balanceado por el pasivo actuarial acumulado para vidas activas y el valor presente actuarial de costos normales futuros. Esto es,

$$(aA)(t) = (aV)(t) + (Pa)(t) \qquad (19.5.20)$$

La distribución de dos términos en el lado derecho de (19.5.20) es determinado por el método de costeo actuarial seleccionado como reflejo de la función acumulada $M(x)$.

Ejemplo 19.6

a. Considerar las dos funciones de densidad acumuladas, $M_I(x)$ y $M_{II}(x)$. Demostrar que si $D(x) = M_I(x) - M_{II}(x)$ es semejante que $D'(a) > 0$ y $D'(x) = 0$ tiene exactamente una solución, $a < x < r$, entonces $(aV)_I(t) > (aV)_{II}(t)$.

b. Si

$$M_I(x) = \frac{\overline{a}_{\overline{a:\,x-a|}}}{\overline{a}_{\overline{a:\,r-a|}}}$$

y

$$M_{II}(x) = \frac{x-a}{r-a}$$

Demuestra que

$$(aV)_I(t) > (aV)_{II}(t)$$

Solución:

a. Por propiedades de la función acumulada, $D(a) = D(r) = 0$. Se nos da que $D'(a) > 0$ y $D'(x) = 0$ para exactamente un valor de x, $a < x < r$, donde, $D(x) > 0$ para $a < x < r$. Entonces

$$(aV)_I(t) - (aV)_{II}(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)\,T} P(t+r-x)\, D(x)\, dx$$

es más grande que 0 y las desigualdades siguientes.

b. Tenemos

$$D'(x)=\frac{e^{-\delta(x-a)}\,s(x)}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)}\,s(y)\,dy}-\frac{1}{r-a}$$

Lo que es más, si $\delta>0$, $e^{-\delta(y-a)}\,s(y)$ es menor que 1 y entonces

$$\int_a^r e^{-\delta(y-a)}\,s(y)\,dy<\int_a^r dy=r-a$$

Por tanto

$$D'(a)=\frac{1}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)}s(y)dy}-\frac{1}{r-a}>0$$

Por un argumento similar, $D'(r)>0$. Como ambos $e^{-\delta(x-a)}$ y $s(x)$ son decrecientes pero funciones positivas de x, $D''(x)<0$ y por tanto $D'(x)=0$ para exactamente un valor de x, $a<x<r$. Entonces $(aV)_I(t)>(aV)_{II}(t)$ siguiendo para la parte (a).

En adición por (19.5.20), tenemos

$$(aA)(t)=(aV)_I(t)+(Pa)_I(t)=(aV)_{II}(t)+(Pa)_{II}(t)$$

así que

$$(Pa)_{II}(t)>(Pa)_I(t)$$ ∇

19.6 Métodos de costeo actuarial individual

El método generalizado de costeo actuarial definido por la función acumulada $M(x)$ o su derivada, la función de densidad acumulada, es un método de costeo actuarial en este sentido que $m(x)$ y $M(x)$ puede ser aplicado al producir la tasa de costeo normal y pasivo actuarial acumulado para cada participante la tasa de costo normal total y pasivo actuarial acumulado para vidas activas en el plan puede ser determinado por adición de los componentes atribuidos para cada participante.

Las funciones de reserva de pensión individual, para crear una anualidad a edad r una unidad de tasa de beneficio inicial para una vida activa a edad x, $a \le x < r$, esta definida como sigue:

El valor presente actuarial para los beneficios esta dado por

$$(aA)(x) = e^{-\delta(r-x)} \frac{s(r)}{s(x)} \overline{a}_r^h \tag{19.6.1}$$

La tasa de costo normal esta dado por

$$P(x) = (aA)(x)\, m(x) \tag{19.6.2}$$

El pasivo actuarial acumulado esta dado por

$$(aV)(x) = (aA)(x)\, M(x) \tag{19.6.3}$$

El valor presente actuarial de los costos normales futuros está definido por

$$(Pa)(x) = (aA)(x) - (aV)(x) = (aA)(x)\left[1 - M(x)\right] \tag{19.6.4}$$

Note que estas funciones son para una unidad de beneficio para (x), en lugar de agregar funciones de plan como en el tiempo t. El ejercicio 19.15 desarrolla los detalles de las relaciones entre estas funciones y las funciones básicas relacionadas en el grupo de entrada estudiado en la Sección 19.5.

En ***los métodos de costeo de beneficio acumulado***, $M(x)$ es directamente relacionada con el beneficio acumulado de un participante que ha adquirido a edad x bajo las disposiciones del plan. Observemos que hay tres posibilidades. Si el proyecto de beneficios acumulados uniformemente durante el servicio activo,

$$m(x) = \frac{1}{r-a} \tag{19.6.5}$$

Si la acumulación en los beneficios es una proporción al salario total cuando no es tiempo tenderá a afectar todos los salarios,

$$m(x)=\frac{w(x)}{\int_a^r w(y)\,dy} \tag{19.6.6}$$

Finalmente, si la acumulación de beneficios es una proporción del total de salarios con un tiempo exponencial tenderá al salario,

$$m(x)=\frac{w(x)\,e^{\tau x}}{\int_a^r w(y)\,e^{\tau y}\,dy} \tag{19.6.7}$$

Para el ***método de costeo edad de entrada***, los beneficios proyectados, son fondeados por una contribución que es además un porcentaje del monto de salario desde la edad de entrada hasta el retiro. Nuevamente observemos las tres posibilidades. El caso con un nivel de monto de contribuciones fue determinado en el Ejemplo 19.2. La Fórmula (19.4.3) muestra que

$$m(x)=\frac{e^{-\delta x}\,s(x)}{\int_a^r e^{-\delta y}\,s(y)\,dy} \tag{19.6.8}$$

Si la tasa de contribución es una fracción nivelada, π, del salario donde el tiempo no tiende ha afectar todos los salarios, igualando tenemos el valor presente actuarial de contribuciones para el valor presente actuarial de una unidad de beneficio, $(aA)(a)$,

$$\pi\int_a^r e^{-\delta(y-a)}\,s(y)\,w(y)\,dy=e^{-\delta(r-a)}\,s(r)\,\overline{a}_r^h \tag{19.6.9}$$

El pasivo actuarial acumulado para un individuo de edad x, esto es, la diferencia entre los valores presentes actuariales de beneficios y de contribuciones futuras, es

$$\begin{aligned}(aV)(x)&=e^{-\delta(r-x)}\frac{s(r)}{s(x)}\,\overline{a}_r^h-\pi\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\frac{s(y)}{s(x)}\,w(y)\,dy\\&=e^{-\delta(r-x)}\frac{s(r)}{s(x)}\,\overline{a}_r^h\left[1-\frac{\int_x^r e^{-\delta y}\,s(y)\,w(y)\,dy}{\int_a^r e^{-\delta y}\,s(y)\,w(y)\,dy}\right]\\&=(aA)(x)\,M(x)\end{aligned}$$

Por tanto

$$m(x) = \frac{e^{-\delta x}\, s(x)\, w(x)}{\int_a^r e^{-\delta y}\, s(y)\, w(y)\, dy} \qquad (19.6.10)$$

Por un proceso similar puede ser demostrado que si se asume que una exponencial tiende en salarios por tiempo, la función de densidad acumulada de pensión es

$$m(x) = \frac{e^{-\delta x}\, s(x)\, e^{rx}\, w(x)}{\int_a^r e^{-\delta y}\, s(y)\, e^{ry}\, w(y)\, dy} \qquad (19.6.11)$$

Es importante notar que la fracción de beneficios proyectados acumulados es un pasivo actuarial en el método de costeo actuarial edad de entrada, diferidos para la definición de los beneficios acumulados en la mayoría de los planes. Una definición de beneficios acumulados es requerida para regular los propósitos y para comunicar a los participantes acerca de que los beneficios son acumulados. La distinción aquí es similar para la distinción entre la reserva y el beneficio no perdido en un seguro ordinario.

También se puede notar que la tasa de contribución, pagada por un plan financiado que es seguido en un método de costeo actuarial individual, podría usualmente diferir para la tasa de costo normal total especificada por ese método. Hay dos razones para esto. Primero, en la inserción de un plan o en los tiempos cuando un plan es enmendado, los pasivos acumulados actuariales para un servicio prioritario pueden ser cambiados. Segundo, las suposiciones actuariales no podrán ser realizadas exactamente, por eso generando reservas ganadas o pérdidas. Las decisiones de como al ajustar la tasa de contribución para fondear estos cambios en el pasivo acumulado actuarial, o para modificar las ganancias o pérdidas, son importantes para el sujeto de regulación. Los ajustes particulares elegidos no son obligatorios por la elección del método de costeo actuarial individual.

19.7 Método de costeo agregado.

En esta sección consideraremos método de costeo actuarial agregado en las cuales contribuciones son determinados en una base colectiva y no tiene una suma de contribuciones para participantes individuales. Para la determinación de definiciones del método de costeo actuarial agregado, necesitamos tres funciones adicionales:

1. $(aF)(t)$, la reserva asignada para los miembros activos en el tiempo t,
2. $(aC)(t)$, la tasa de contribución anual en el tiempo t con respecto a los participantes activos,
3. $(aU)(t)$, el pasivo actuarial no fondeado con respecto a participantes activos en el tiempo t.

Por tanto,

$$(aU)(t) = (aV)(t) - (aF)(t) \tag{19.7.1}$$

La reserva para miembros activos en el tiempo t puede ser descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(aF)(t) = (aC)(t) + \delta(aF)(t) - {}^{T}P(t) \tag{19.7.2}$$

Con el valor inicial $(aF)(0)$. El elemento del lado derecho de (19.7.2) indica las dos fuentes de ingreso para la reserva y una fuente de salida, esto es, el transferir el costo de la reserva terminal para un fondo para miembros jubilados.

En la relación para un método de costeo actuarial, determinado por una función acumulada, las cuales implican una tasa de costo normal $P(t)$ [ver (19.5.4)] y el pasivo acumulado no financiado de miembros activos $(aU)(t)$ [ver (19.5.8) y (19.7.1)], una forma natural de tasa de contribución es

$$(aC)(t) = P(t) + \lambda(t)(aU)(t) \tag{19.7.3}$$

En (19.7.3) $\lambda(t)$ define el proceso para amortizar $(aU)(t)$.

En la ecuación (19.7.3) los puntos fuera tienen una característica de métodos de costeo actuarial total, no establecidos aquí. Estos métodos definen una tasa de contribución, $(aC)(t)$, que depende del nivel de fondeo, esto es, en la magnitud de $(aU)(t)$. Aquí los ajustes requeridos por los cambios de plan o por las ganancias o pérdidas pueden ser hechos automáticamente para seguir el método de costeo actuarial desde el valor de $(aU)(t)$ que reflejará cada cambio y ganancias y pérdidas.

Consideramos uno como un proceso de amortización, en el cual

$$\lambda(t)=\frac{1}{a(t)} \tag{19.7.4}$$

donde

$$a(t)=\frac{(Pa)(t)}{P(t)}$$

Por tanto $P(t)a(t)=(Pa)(t)$ así $a(t)$ es el valor de una unidad anual temporal para cada una de las anualidades temporales con tasa nivel de ingreso y el costo normal actual, $P(t)$, igualamos el valor presente actuarial de costos normales futuros para los miembros activos actuales, $(Pa)(t)$. En este caso la notación ha sido seleccionada motivando la idea sugerida.

La Fórmula (19.7.3) puede ser rescrita para este caso particular de $\lambda(t)$ como

$$\begin{aligned}(aC)(t)&=P(t)+\frac{(aV)(t)-(aF)(t)}{a(t)}\\&=\frac{(Pa)(t)+(aV)(t)-(aF)(t)}{a(t)}\\&=\frac{(aA)(t)-(aF)(t)}{a(t)}\end{aligned} \tag{19.7.5}$$

Haciendo uso de (19.5.20). Por tanto con $\lambda(t)$ dado por (19.7.4) tenemos

$$(aC)(t)\,a(t)=(aA)(t)-(aF)(t) \tag{19.7.6}$$

La interpretación de (19.7.6) es una anualidad temporal y la tasa de $(aC)(t)$ es equivalente al valor presente actuarial de beneficios futuros de miembros activos menos el fondeo para estos.

La fórmula controla el progreso del fondeo, (19.7.2), llegando a ser, para $\lambda(t)$ dado por (19.7.4),

$$\frac{d}{dt}(aF)(t) = P(t) + \frac{(aU)(t)}{a(t)} + \delta(aF)(t) - {}^{T}P(t) \tag{19.7.7}$$

Podemos escribir (19.5.10) como

$$\frac{d}{dt}(aV)(t) = P(t) + \delta(aV)(t) - {}^{T}P(t) \tag{19.7.8}$$

Por reducción (19.7.7) de (19.7.8), obtenemos

$$\frac{d}{dt}(aU)(t) = -\left(\frac{1}{a(t)} - \delta\right)(aU)(t) \tag{19.7.9}$$

La ecuación diferencial (19.7.9) puede ser resuelta remplazando t por u, integrando con respecto a u para 0 en t, y tomando exponenciales para obtener

$$(aU)(t) = (aU)(0)\exp\left[-\int_0^t \left[\frac{1}{a(u)} - \delta\right] du\right] \tag{19.7.10}$$

Una vez que sustituimos (19.7.1), obtenemos

$$\begin{aligned}(aF)(t) &= (aV)(t) \\ &\quad -\left[(aV)(0) - (aF)(0)\right]\exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{a(u)} - \delta\right) du\right]\end{aligned} \tag{19.7.11}$$

Siempre que $a(u)$ sea tan pequeño que $\bar{a}_{\overline{u}|} = 1/\delta$ así que

$$\frac{1}{a(u)} - \delta \geq \epsilon > 0$$

$$\exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{a(u)} - \delta \right) du \right] \to 0$$

como $t \to \infty$. Entonces $(aF)(t) \to (aV)(t)$

Aquí el método de costeo agregado con $\lambda(t) = 1/a(t)$ es equivalente asintóticamente al método de costeo individual definido por la función acumulada utilizada para evaluar $(aV)(t)$ y $P(t)$. Estas pueden ser varias funciones acumuladas que producen funciones tal que $(Pa)(u)/P(u)$ es suficientemente pequeño para asegurar la convergencia de $(aF)(t)$ a $(aV)(t)$. Cada una de estas funciones acumuladas puede producir un patrón diferente de contribuciones y un último modelo de financiamiento. Por complemento cuando referimos a un modelo de costeo agregado uno siempre podría específicamente usar la función acumulada. El método de costeo agregado con edad de entrada acumulada ha sido particularmente importante en la práctica.

Claramente hay varios casos posibles para la función $\lambda(t)$ en la tasa determinada de amortización de $(aU)(0)$. Si el objetivo es la complementación de la amortización para el final de n años para la suma inicial en el tiempo 0. Un caso para $\lambda(t)$ es

$$\lambda(t) = \frac{1}{\overline{a}_{\overline{n-t}|}} \qquad 0 < t < n \tag{19.7.12}$$

Entonces correspondiendo a (19.7.10) obtenemos

$$\begin{aligned} (aU)(t) &= (aU)(0)\exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\overline{a}_{\overline{n-u}|}} - \delta \right) du \right] \\ &= (aU)(0)\exp\left[-\int_0^t \frac{1}{\overline{s}_{\overline{n-u}|}} du \right] \end{aligned} \tag{19.7.13}$$

Esto puede mostrar (Ejercicio 19.17) que

$$-\int_0^t \frac{1}{\overline{s}_{\overline{n-u}|}}\,du = \log\frac{\overline{s}_{\overline{n}|} - \overline{s}_{\overline{t}|}}{\overline{s}_{\overline{n}|}}$$

Por tanto (19.7.13) llega a ser

$$(aU)(t) = (aU)(0)\frac{\overline{s}_{\overline{n}|} - \overline{s}_{\overline{t}|}}{\overline{s}_{\overline{n}|}} \qquad 0 \le t \le n$$

Y puede demostrarse que

$$(aC)(t) = P(t) + \frac{(aU)(0)}{\overline{a}_{\overline{n}|}} \qquad 0 \le t \le n$$

En el tiempo n, el objetivo financiado puede ser logrado con $(aU)(n) = 0$ y $(aC)(t)$ podría dejar a $P(t)$.

Ejemplo 19.7

Asumiendo un plan estacionario, esto es, $n(a) = l_a$, $g(t) = 1$ y $h(x) = 1$, con la función acumulada asociada con el nivel de monto del método de costeo actuarial edad de entrada, $M(x) = \overline{a}_{a:\,\overline{x-a}|} / \overline{a}_{a:\,\overline{r-a}|}$ (ver Ejemplo 19.2)

a. Exhibe λ
b. Calcula $(aC)(0)$ si $(aF)(0) = 0$

Solución:

a. La Fórmula (19.3.2) da, para el caso estacionario

$${}^{T}P(t) = f\, w(r)\, l_r \overline{a}_r$$

Para toda t. Entonces para (19.5.17)

$$(Pa)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} f\, w(r)\, l_r\, \overline{a}_r \left(1 - \frac{\overline{a}_{a:\,\overline{x-a}|}}{\overline{a}_{a:\,\overline{r-a}|}}\right) dx$$

Ahora $M'(x) = m(x) = {}_{x-a}E_a / \overline{a}_{a:\overline{r-a}|}$, así por (19.5.4)

$$P(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} f\, w(r)\, l_r\, \overline{a}_r \frac{{}_{x-a}E_a}{\overline{a}_{a:\overline{r-a}|}} dx$$

Por tanto, (19.7.4) da

$$a(t) = \frac{(Pa)(t)}{P(t)} = \frac{\int_a^r e^{\delta x}\, {}_{x-a}E_a\, \overline{a}_{x:\overline{r-x}|} dx}{\int_a^r e^{\delta x}\, {}_{x-a}E_a\, dx}$$

$$= \frac{\int_a^r l_x\, \overline{a}_{x:\overline{r-x}|} dx}{\int_a^r l_x\, dx}$$

y $\lambda = 1/a$

b. Sustituyendo en (19.7.5) de (19.5.1)

$$(aC)(0) = \frac{\int_a^r e^{-\delta(r-x)} f\, w(r)\, l_r\, \overline{a}_r dx}{a}$$

$$= \frac{f\, w(r)\, l_r\, \overline{a}_r\, \overline{a}_{\overline{r-a}|} \int_a^r l_x\, dx}{\int_a^r l_x\, \overline{a}_{x:\overline{r-x}|}\, dx}$$

19.8 Funciones básicas para miembros jubilados

En esta sección podremos discutir un número de funciones básicas definiendo varios conceptos principales para pensiones fondeadas vinculadas al grupo jubilado. Un prefijo r podrá ser usado en la notación para indicar en grupo jubilado.

19.8.1 Valor presente actuarial de beneficios futuros $(rA)(t)$.

Los miembros entre las edades x y $x+dx$ en el tiempo t, $l(x,t-x+a)dx$ jubilados hace $x-r$ años, con pensiones en una tasa anual inicial de $f\,w(r)\,g(t-x+r)$. Para cada unidad de pensión inicial de un jubilado, esta permanece al valor presente actuarial

$$\bar{a}_x^h = \int_x^\infty e^{-\delta(y-x)} h(y) \frac{s(y)}{s(x)} dy \quad y \geq r \tag{19.8.1}$$

donde $s(y)$ es una función de supervivencia de decremento simple basado sólo en la mortalidad. Por tanto,

$$(rA)(t) = \int_r^\infty l(x,t-x+a)\, f\, w(r)\, g(t-x+r) \bar{a}_x^h dx \tag{19.8.2}$$

Puesto que por (19.2.1) $l(x,t-x+a) = n(t-x+a)s(x)$, podemos, sustituyendo por (19.8.1), escribir una doble integral para $(rA)(t)$; esto es,

$$(rA)(t) = \int_r^\infty n(t-x+a)\, f\, w(r)\, g(t-x+r) \left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)} h(y) s(y) dy \right] dx \tag{19.8.3}$$

Continuando con nuestra suposición que $M(x)=1$ para $x \geq r$. Esto es un costo normal no futuro con respecto para el grupo cerrado de jubilados en el tiempo t. Por tanto, el pasivo actuarial acumulado, $(rV)(t)$, para miembros jubilados es igual al valor presente actuarial de sus pensiones futuras. Esto es,

$$(rV)(t) = (rA)(t) \tag{19.8.4}$$

En contraste para la situación de miembros activos indicados en (19.5.19).

19.8.2 Tasa de beneficios pagados, $B(t)$

Para los miembros jubilados hay una nueva función a considerar, $B(t)$, la tasa de beneficios que salen al tiempo t. En el desarrollo (19.8.2) para el valor presente actuarial de beneficios futuros para personas jubiladas, observemos que las pensiones para jubilados ahora entre las edades x y $x+dx$ fueron pagadas en la tasa inicial de $l(x,t-x+a)\,f\,w(r)\,g(t-x+r)\,dx$. Para edad x, esta tasa ha sido justificada por el factor $h(x)$. Así que

$$B(t)=\int_r^{\infty} l(x,t-x+a)\,f\,w(r)\,g(t-x+r)\,h(x)dx \tag{19.8.5}$$

La función alternativa, usando (19.2.1), para $B(t)$ es

$$B(t)=\int_r^{\infty} n(t-x+a)\,g(t-x+r)\,f\,w(r)\,s(x)\,h(x)dx \tag{19.8.6}$$

La diferenciación de $B(t)$, dada en (19.8.6), induce a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B(t) &= \int_r^{\infty} f\,w(r)\,s(x)\,h(x)\frac{\partial}{\partial t}\big[n(t-x+a)\,g(t-x+r)\big]dx \\
&= -\int_r^{\infty} f\,w(r)\,s(x)\,h(x)\frac{\partial}{\partial x}\big[n(t-x+a)\,g(t-x+r)\big]dx \\
&= -f\,w(r)\,s(x)\,h(x)n(t-x+a)\,g(t-x+r)\Big|_{x=r}^{x=\infty} \\
&\quad + \int_r^{\infty} f\,w(r)\,n(t-x+a)\,g(t-x+r)\big[s'(x)\,h(x) \\
&\quad + s(x)\,h'(x)\big]\,dx \\
&= \big[f\,w(r)\,l(r,t-r+a)\,g(t) \\
&\quad - \int_r^{\infty} f\,w(r)\,l(x,t-x+a)\,g(t-x+r)\,h(x)\,\mu_x\,dx\big] \\
&\quad + \int_r^{\infty} f\,w(r)\,l(x,t-x+a)\,g(t-x+r)\,h'(x)dx
\end{aligned} \tag{19.8.7}$$

Los términos dentro de los paréntesis del lado derecho de (19.8.7) miden el ***efecto de sustitución***. El primer término es la tasa y en la cual las pensiones iniciales para los nuevos miembros jubilados es incrementada a la tasa de pago

de los beneficios. El segundo término es la tasa a la el pago de beneficios es reducido por las muertes en el tiempo t. El término afuera de los paréntesis es conocido como el ***efecto de ajuste***. Estos miden el punto por el cuál la tasa de beneficio pagado esta comenzando ajustarse en el tiempo t.

19.8.3 La ecuación asignada

Estamos ahora en posición para establecer la fórmula para vidas jubiladas que es análogo a (19.5.10) para vidas activas,

$$ {}^{T}P(t)+\delta(rV)(t)=B(t)+\frac{d}{dt}(rV)(t) \tag{19.8.8}$$

Esta ecuación puede ser argumentada por la teoría del interés compuesto al considerar $(rV)(t)$ como una reserva dentro del cual los costos fondeados terminales e intereses son pagados y para las cuales las pensiones son pagadas. La diferencia entre la tasa total de ingreso y la tasa de salida determinan la tasa de cambio del tamaño de la reserva.

La verificación de (19.8.8) puede ser completada por diferenciación $(rA)(t)=(rV)(t)$, como se dio en (19.8.3). Tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(rV)(t)\\
&=\int_r^\infty f\,w(r)\frac{\partial}{\partial t}\left[n(t-x+a)\,g(t-x+r)\right]\left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}s(y)\,h(y)\,dy\right]dx\\
&=-f\,w(r)\int_r^\infty\left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}s(y)\,h(y)\,dy\right]\frac{\partial}{\partial x}\left[n(t-x+a)\,g(t-x+r)\right]dx\\
&=-f\,w(r)\Big\{n(t-x+a)\,g(t-x+r)\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\,s(y)\,h(y)\,dy\Big|_{x=r}^{x=\infty}\\
&\quad-\int_r^\infty\left[\delta\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}\,s(y)\,h(y)\,dy-s(x)\,h(x)\right]n(t-x+a)\,g(t-x+r)\,dx\Big\}\\
&={}^{T}P(t)+\delta(rV)(t)-B(t)
\end{aligned}$$

donde (19.8.6) es usada para identificar el término $B(t)$.

Ejemplo 19.8

Demuestre que para el caso exponencial

a. $B(t+u) = e^{\rho u} B(t), \quad \rho = \tau + R$ (19.8.9)

b. $(rV)(t+u) = e^{\rho u}(rV)(t)$ (19.8.10)

c. ${}^{T}P(t) + \theta(rV)(t) = B(t), \quad \theta = \delta - \rho$ (18.8.11)

${}^{T}P(t) < B(t) \quad si \quad \theta > 0$ (18.8.12)

d. ${}^{T}P(t) = B(t) \quad si \quad \theta = 0$

${}^{T}P(t) > B(t) \quad si \quad \theta < 0$

Solución:

a. Para (19.8.6)

$$\begin{aligned} B(t+u) &= \int_r^\infty n\, e^{R(t+u-x+a)} e^{\tau(t+u-x+r)} f\, w(r)\, s(x)\, e^{\beta(x-r)} dx \\ &= e^{(R+\tau)u} \int_r^\infty n\, e^{R(t-x+a)} e^{\tau(t-x+r)} f\, w(r)\, s(x)\, e^{\beta(x-r)} dx \\ &= e^{\rho u} B(t) \end{aligned}$$

b. Sustituyendo en (19.8.2) y siguiendo el patrón de la solución de la parte (a) produce el resultado.

c. Rescribiendo (19.8.10) como

$$\frac{(rV)(t+u) - (rV)(t)}{u} = \frac{e^{\rho u} - 1}{u}(rV)(t)$$

y tendiendo $u \to 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(rV)(t) = \rho(rV)(t) \tag{19.8.13}$$

Entonces sustituyendo (19.8.13) en (19.8.8) produce el resultado para la parte (c).

d. Las desigualdades seguidas para (19.8.11). Otra vez observamos el papel crítico jugado por $\theta = \delta - t - R$ en el caso exponencial. ∇

Ejemplo 19.9

Si el modelo del plan esta operando en una población estacionaria con salarios fijos y nivel de pensiones, desarrolle e interprete la fórmula

$$(rV)(t) = f\, w(r)\frac{T_r - l_r \bar{a}_r}{\delta} \tag{19.8.14}$$

Solución:

Aquí $h(x) = g(t) = 1$, $\theta = \delta$, $B(t) = f\, w(r)\, T_r$, ${}^{T}P(t) = f\, w(r)\, l_r \bar{a}_r$ y (19.8.14) sigue por sustitución en (19.8.11). Para interpretar este resultado, notemos que las pensiones de $f\, w(r)$ por año son pagaderos continuamente para todas las personas de edad r o mayores en la población estacionaria. Estas incluyen pensiones para nuevos jubilados futuros que llegan a ser elegibles a la tasa de l_r por año. Estas futuras pensiones pagaderas para una perpetuidad con valor presente igual a $f\, w(r)\, l_r \bar{a}_r / \delta$. La diferencia en los valores presentes de estas dos perpetuidades es el valor presente de las pensiones futuras para el grupo cerrado de nuevos participantes a edad r o jubilados, $(rV)(t)$. ∇

19.9 Funciones básicas para miembros activos y jubilados.

En las Secciones 19.5 y 19.8 desarrollamos funciones básicas separadas para miembros activos y jubilados. Esta es una división útil para varios propósitos. El sistema administrativo, los problemas de la valuación actuarial e incluso la póliza adquirida puede ser diferente para los dos grupos. Sin embargo, para otros propósitos es útil considerar funciones básicas para el grupo combinado de miembros activos y jubilados.

Las funciones básicas actuariales para el grupo combinado son las sumas de aquellos miembros activos dada en la Sección 19.5 y aquellas para los miembros jubilados dada en la sección 19.8. Estas son resumidas en la Tabla 19.1

Tabla 19.1
Funciones actuariales para activos, jubilados y grupos de miembros combinados de in plan de pensiones.

Función	Activos	Jubilados	Combinados
Valor presente actuarial en el tiempo t para pensiones futuras[1,2]	$(aA)(t)$	$(rA)(t)$	$A(t)=(aA)(t)+(rA)(t)$
Tasa de Costo Normal[3]	$P(t)$	0	$P(t)$
Pasivo acumulado actuarial[4,5]	$(aV)(t)$	$(rV)(t)$	$V(t)=(aV)(t)+(rV)(t)$
Valores presentes actuariales de costos normales futuros[6]	$(Pa)(t)$	0	$(Pa)(t)$

1. $(aA)(t)$ dado en (19.5.1)
2. $(rA)(t)$ dado en (19.8.2)
3. $P(t)$ dado en (19.5.4)
4. $(aV)(t)$ dado en (19.5.8)
5. $(rV)(t)$ dado en (19.8.4)
6. $(Pa)(t)$ dado en (19.5.17)

Podemos usar las ecuaciones de asignación de ingresos para miembros activos (19.5.10) y para miembros jubilados (19.8.8) para obtener cada una de las ecuaciones para grupos combinados. Por tanto,

$$\frac{d}{dt}V(t)=P(t)+\delta V(t)-B(t) \tag{19.9.1}$$

o

$$P(t)+\delta V(t)=B(t)+\frac{d}{dt}V(t)$$

En esta ecuación de costo normal e ingresos por intereses dentro de la reserva son asignados los pagos por beneficios pensionables y cambio en el pasivo actuarial acumulado.

Para obtener fórmulas para grupos combinados bajo las reservas agregadas asumiremos que las pensiones para miembros jubilados son totalmente fondeados así que $(rV)(t)=(rF)(t)$. Entonces (19.7.1) puede ser escrita como el pasivo actuarial fondeado para todos los miembros como

$$\begin{aligned} U(t) &= V(t) - F(t) \\ &= (aV)(t) + (rV)(t) - (aF)(t) - (rF)(t) \\ &= (aU)(t) \end{aligned} \tag{19.9.2}$$

Además, la tasa de contribución $C(t)$ para todos los miembros activos es igual a $(aC)(t)$, ya que la no contribución es requerida para miembros jubilados. En este caso (19.7.3) puede ser rescrito como

$$C(t) = P(t) + \lambda(t)U(t) \tag{19.9.3}$$

Si $\lambda(t) = 1/a(t)$, la tasa de contribución llega a ser

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{P(t)a(t) + V(t) - F(t)}{a(t)} \\ &= \frac{A(t) - F(t)}{a(t)} \end{aligned} \tag{19.9.4}$$

Por tanto cuando $(rF)(t)=(rV)(t)$, los resultados para el método de costeo agregado definido por miembros activos en el tiempo t por (19.7.5) son equivalentes para los resultados definidos para todos los miembros por (19.9.4).

19.10 Notas y referencias

Varias de las nociones fundamentales de la teoría de pensión fondeada aparecen en una publicación gubernamental conocida como Boletín en 23P. Charles Trowbridge (1952, 1963) quien creó una teoría matemática de pensiones fondeadas. El modelo más elaborado usado en este capítulo fue desarrollado por una serie de documentos escritos por Bowers, Hickman y Nesbitt (1976, 1979). El énfasis en las funciones separadas por vidas activas y jubiladas es dado por Kischuk (1976).

Diversos autores han estudiado los problemas creados para pensiones fondeadas e inflacionariamente influenciados en salarios, tasas de intereses y beneficios. Los documentos escritos por Allison y Winklevoss (1975) y Myers (1960) forman parte de esta sección. John Trowbridge (1977) provee varias observaciones en cambios en pensiones fondeadas en diferentes naciones en respuesta a la inflación.

Ejercicios.

Sección 19.2

19.1. En una población estacionaria con nivel de salarios y tasa w, ¿Cuál es la función de pago $W(t)$?

Sección 19.3

19.2. En el caso exponencial, ¿Cuál es la función de pago $W(t)$?

19.3. Asume que la tasa anual inicial de renta por retiro para una persona jubilada en el tiempo t es dada por

$$\frac{f}{b}\int_{t-b}^{t} w(r-t+y)\,g(y)\,dy \quad 0<b<r-a$$

Otros aspectos para el modelo del plan permanecen constantes. Para esta definición de beneficio, basado en una fórmula promedio final,

a. Demuestre que la tasa de beneficio inicial en el tiempo t esta dada por

$$\frac{f}{b}\int_{0}^{b} w(r-z)\,g(t-z)\,dz$$

b. Exhiba una fórmula para la tasa de costeo de reserva terminal en el tiempo t

c. Rescriba el Ejemplo 19.1

19.4. La tasa anual inicial de renta por retiro para una persona jubilada en el tiempo t esta dado por $c(r-a)we^{rt}$. Otros aspectos del modelo del plan permanecen constantes. Para esta tasa inicial de beneficio, basado en el producto de años por servicio y nivel de salario final,

a. Exhiba una fórmula para la tasa de costeo de reserva terminal en el tiempo t.

b. Rescriba el ejemplo 19.1

19.5 Si $s(x)=e^{-\mu(x-a)}$, $a \le x \le r$, Exhiba ${}^{T}P(t)$ en el caso exponencial.

Sección 19.4

19.6. ¿Cuál es $M(x)$ en el caso de reserva terminal?

Sección 19.5

19.7. Usando las suposiciones del ejercicio 19.5 con $m(x)=1/(r-a)$, determine $P(t)$.

19.8. a. Demuestre que

$$(aA)(t)=\int_t^{t+r-a} e^{-\delta(y-t)}\,{}^{T}P(y)dy$$

b. Derive la expresión del inciso (a) para obtener una solución alternativa para el ejemplo 19.3.

19.9 Si

$$e^{\theta X(\theta)}=\int_a^r e^{\theta x}m(x)dx$$

y

$$\mu=\int_a^r x\,m(x)dx$$

Demuestre que

a. $X(\theta) > \mu$ si $\theta > 0$

b. $X(\theta) < \mu$ si $\theta < 0$

[Sugerencia: Utilice la desigualdad de Jensen (1.3.2)].

19.10 En el caso exponencial, demuestre que

a. $P(t) = {}^{T}P(t)\exp\left\{-\theta\left[r - X(\theta)\right]\right\}$

b. $(aV)(t) = {}^{T}P(t)\bar{a}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta} = P(t)\bar{s}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta}$

19.11. a. ¿Qué Fórmula sería en el Ejercicio 19.10 si el modelo del plan opera en una población estacionaria con $g(t) = 1$?

b. ¿Cuál de las fórmulas en el ejercicio 19.10 llega a ser $\theta = \delta - \rho = 0$?

19.12. a. Deriva una tasa costo normal $\pi(u)$ que puede ser aplicada a todos los salarios de aquellos que entran en el tiempo. Otros aspectos del modelo plan son constantes.

b. Usando el resultado en (a), exhibe la función correspondiente $m(x,u)$

19.13. a. Para el modelo del plan demuestre que

$$P(t) = f\, w(r)\, s(r)\, \bar{a}_r^{h} \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, g(t+r-x)\, n(t-x+a)\, m(x)\, dx$$

b. Si $g(t) = 1$, $n(t) = l_a$, demuestre que

$$P(t) = f\, w(r) \int_a^r l_x\, {}_{r-x}E_x\, \bar{a}_r^{h}\, m(x)\, dx$$

Donde ${}_{r-x}E_x$ esta basado en la función de supervivencia $s(x)$ y en la fuerza de interés δ.

19.14. Si $g(t)=e^{rt}$, $n(t)=l_a$ y

$$m(x)=\frac{w(x)e^{rx}}{\int_a^r w(y)e^{ry}dy}$$

demuestra que

$$P(t+u)=e^{ru}P(t)$$

Sección 19.6

19.15 Asuma que la tasa de beneficio inicial proyectada al retiro para una vida a edad x en el tiempo t es $f\,w(r)\,g(t+r-x)$ y el número de vidas a edad x a $x+dx$ en el tiempo t es $n(t-x+a)\,s(x)\,dx$.

a. Verifique que $(aA)(t)$ dado por (19.5.1) es igual a

$$\int_a^r f\,w(r)\,g(t+r-x)\,n(t-x+a)s(x)(aA)(x)\,dx$$

b. Verifique que $P(t)$ dada por (19.5.4) es igual a

$$\int_a^r f\,w(r)\,g(t+r-x)\,n(t-x+a)s(x)\,P(x)\,dx$$

c. Verifica que $(aV)(t)$ dada por (19.5.8) es igual a

$$\int_a^r f\,w(r)\,g(t+r-x)\,n(t-x+a)s(x)(aV)(x)\,dx$$

d. Verifique que $(Pa)(t)$ dado por (19.5.17) es igual a

$$\int_a^r f\, w(r)\, g(t+r-x)\, n(t-x+a)\, s(x)\, (Pa)(x)\, dx$$

19.16. Verifique la fórmula (19.6.11)

Sección 19.7

19.17 Verificaque que

a. $-\int_0^t \frac{1}{\overline{s}_{\overline{n-y}|}} dy = \log \frac{\overline{s}_{\overline{n}|} - \overline{s}_{\overline{t}|}}{\overline{s}_{\overline{n}|}}$

b. $-\int_0^t \frac{1}{\overline{a}_{\overline{n-y}|}} dy = \log \frac{\overline{a}_{\overline{n}|} - \overline{a}_{\overline{t}|}}{\overline{a}_{\overline{n}|}}$

19.18 a. Obtenga una fórmula simplificada para $a(t)$ en el caso exponencial.

b. ¿ En el caso exponencial, cómo llega ser $a(t)$ si $\theta = \delta - \rho = 0$?

Sección 19.8

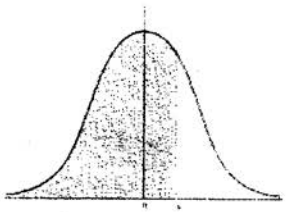
19.19. En el caso exponencial, demuestre que $B(t) = {}^{T}P(t)\left(\overline{a}_r^{th} / \overline{a}_r^{h}\right)$ donde

$$\overline{a}_r^{th} = \int_r^{\infty} e^{-(\rho-\beta)(x-r)} \frac{s(x)}{s(r)} dx$$

APENDICE

APENDICE I

TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL



Distribución Normal

La tabla siguiente, corresponde a valores de $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{\omega^2}{2}}\ d\omega$

x	0	1	2	3
0.0	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987
0.1	0.5398	0.8643	0.9821	0.9990
0.2	0.5793	0.8849	0.9861	0.9993
0.3	0.6179	0.9032	0.9893	0.9995
0.4	0.6554	0.9192	0.9918	0.9997
0.5	0.6915	0.9332	0.9938	0.9998
0.6	0.7257	0.9452	0.9953	0.9998
0.7	0.7580	0.9554	0.9965	0.9999
0.8	0.7881	0.9641	0.9974	0.9999
0.9	0.8159	0.9713	0.9981	1.0000

Puntos selectos de la Distribución Normal

$\Phi(x)$	x
0.800	0.842
0.850	1.036
0.900	1.282
0.950	1.645
0.975	1.960
0.990	2.326
0.995	2.576

APENDICE II

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES BÁSICAS

Edad	l_x	d_x	$1{,}000 \cdot q_x$
0	100 000.00	2 042.1700	20.4217
1	97 957.83	131.5672	1.3431
2	97 826.26	119.7100	1.2237
3	97 706.55	109.8124	1.1239
4	97 596.74	101.7056	1.0421
5	97 495.03	95.2526	0.9770
6	97 399.78	90.2799	0.9269
7	97 309.50	86.6444	0.8904
8	97 222.86	84.1950	0.8660
9	97 138.66	82.7816	0.8522
10	97 055.88	82.2549	0.8475
11	96 973.63	82.4664	0.8504
12	96 891.16	83.2842	0.8594
13	96 807.88	84.5180	0.8730
14	96 723.36	86.0611	0.8898
15	96 637.30	87.7559	0.9081
16	96 549.54	89.6167	0.9282
17	96 459.92	91.6592	0.9502
18	96 368.27	93.9005	0.9744
19	96 274.36	96.3596	1.0009
20	96 178.01	99.0569	1.0299
21	96 078.95	102.0149	1.0618
22	95 976.93	105.2582	1.0967
23	95 871.68	108.8135	1.1350
24	95 762.86	112.7102	1.1770
25	95 650.15	116.9802	1.2330
26	95 533.17	121.6585	1.2735
27	95 411.51	126.7830	1.3288
28	95 284.73	132.3953	1.3895
29	95 152.33	138.5406	1.4560

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES BÁSICAS

Edad	l_x	d_x	$1{,}000 \cdot q_x$
30	95 013.79	145.2682	1.5289
31	94 868.53	152.6317	1.6089
32	94 715.89	160.6896	1.6965
33	94 555.20	169.5052	1.7927
34	94 385.70	179.1475	1.8980
35	94 206.55	189.6914	2.0136
36	94 016.86	201.2179	2.1402
37	93 815.64	213.8149	2.2791
38	93 601.83	227.5775	2.4313
39	93 374.25	242.6085	2.5982
40	93 131.64	259.0186	2.7812
41	92 872.62	276.9271	2.9818
42	92 595.70	296.4623	3.2017
43	92 299.23	317.7619	3.4427
44	91 981.47	340.9730	3.7070
45	91 640.50	366.2529	3.9966
46	91 274.25	393.7687	4.3141
47	90 880.48	423.6978	4.6621
48	90 456.78	456.2274	5.0436
49	90 000.55	491.5543	5.4617
50	89 509.00	529.8844	5.9199
51	88 979.11	571.4316	6.4221
52	88 407.68	616.4165	6.9724
53	87 791.26	665.0646	7.5755
54	87 126.20	717.6041	8.2364
55	86 408.60	774.2626	8.9605
56	85 634.33	835.2636	9.7538
57	84 799.07	900.8215	10.6230
58	83 898.25	971.1358	11.5752
59	82 927.11	1 046.3843	12.6181
60	81 880.73	1 126.7146	13.7604
61	80 754.01	1 212.2343	15.0114
62	79 541.78	1 302.9994	16.3813
63	78 238.78	1 399.0010	17.8812
64	76 839.78	1 500.1504	19.5231
65	75 339.63	1 606.2618	21.3203
66	73 733.37	1 717.0334	23.2871
67	72 016.33	1 832.0273	25.4391
68	70 184.31	1 950.6476	27.7932
69	68 233.66	2 072.1177	30.3680

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES ACTUARIALES SOBRE UNA VIDA, $i = 6\%$

Edad	$\ddot{a}_x$	1,000 A_x	1,000 $\left({}^2A_x\right)$
0	16.80096	49.0025	25.9210
1	17.09819	32.1781	8.8845
2	17.08703	32.8097	8.6512
3	17.07314	33.5957	8.5072
4	17.05670	34.5264	8.4443
5	17.03786	35.5930	8.4547
6	17.01675	36.7875	8.5310
7	16.99351	38.1031	8.6666
8	16.96823	39.5341	8.8553
9	16.94100	41.0757	9.0917
10	16.91187	42.7245	9.3712
11	16.88089	44.4782	9.6902
12	16.84807	46.3359	10.0460
13	16.81340	48.2981	10.4373
14	16.77685	50.3669	10.8638
15	16.73836	52.5459	11.3268
16	16.69782	54.8404	11.8295
17	16.65515	57.2558	12.3749
18	16.61024	59.7977	12.9665
19	16.56299	62.4720	13.6080
20	16.51330	65.2848	14.3034
21	16.46105	68.2423	15.0569
22	16.40614	71.3508	15.8730
23	16.34843	74.6170	16.7566
24	16.28783	78.0476	17.7128
25	16.22419	81.6496	18.7472
26	16.15740	85.4300	19.8657
27	16.08733	89.3962	21.0744
28	16.01385	93.5555	22.3802
29	15.93683	97.9154	23.7900
30	15.85612	102.4835	25.3113
31	15.77161	107.2676	26.9520
32	15.68313	112.2754	28.7206
33	15.59057	117.5148	30.6259
34	15.49378	122.9935	32.6772
35	15.39262	128.7194	34.8843
36	15.28696	134.7002	37.2574
37	15.17666	140.9437	39.8074
38	15.06159	147.4572	42.5455
39	14.94161	154.2484	45.4833

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES ACTUARIALES SOBRE UNA VIDA, $i = 6\%$

Edad	$\ddot{a}_x$	1,000 A_x	1,000 $\left({}^2A_x\right)$
40	14.81661	161.3242	48.6332
41	14.68645	168.6916	52.0077
42	14.55102	176.3572	55.6199
43	14.41022	184.3271	59.4833
44	14.26394	192.6071	63.6117
45	14.11209	201.2024	68.0193
46	13.95459	210.1176	72.7205
47	13.79136	219.3569	77.7299
48	13.62235	228.9234	83.0624
49	13.44752	238.8198	88.7329
50	13.26683	249.0475	94.7561
51	13.08027	259.6073	101.1469
52	12.88785	270.4988	107.9196
53	12.68960	281.7206	115.0885
54	12.48556	293.2700	122.6672
55	12.27581	305.1431	130.6687
56	12.06042	317.3346	139.1053
57	11.83953	329.8381	147.9883
58	11.61327	342.6452	157.3280
59	11.38181	355.7466	167.1332
60	11.14535	369.1310	177.4113
61	10.90412	382.7858	188.1682
62	10.65836	396.6965	199.4077
63	10.40837	410.8471	211.1318
64	10.15444	425.2202	223.3401
65	9.89693	439.7965	236.0299
66	9.63619	454.5553	249.1958
67	9.37262	469.4742	262.8299
68	9.10664	484.5296	276.9212
69	8.83870	499.6963	291.4559
70	8.56925	514.9481	306.4172
71	8.29879	530.2571	321.7850
72	8.02781	545.5957	337.5361
73	7.75683	560.9339	353.6443
74	7.48639	576.2419	370.0803
75	7.21702	591.4895	386.8119
76	6.94925	606.6460	403.8038
77	6.68364	621.6808	421.0184
78	6.42071	636.5634	438.4155
79	6.16101	651.2639	455.9527

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES ACTUARIALES SOBRE UNA VIDA, $i = 6\%$

Edad	$\ddot{a}_x$	1,000 A_x	1,000 $\left({}^{2}A_x\right)$
80	5.90503	665.7528	473.5861
81	5.65330	680.0019	491.2698
82	5.40629	693.9837	508.9574
83	5.16446	707.6723	526.6012
84	4.92824	721.0431	544.1537
85	4.69803	734.0736	561.5675
86	4.47421	746.7428	578.7956
87	4.25710	759.0320	595.7923
88	4.04700	770.9244	612.5133
89	3.84417	782.4056	628.9163
90	3.64881	793.4636	644.9611
91	3.46110	804.0884	660.6105
92	3.28118	814.2726	675.8298
93	3.10914	824.0111	690.5878
94	2.94502	833.3007	704.8565
95	2.78885	842.1408	718.6115
96	2.64059	850.5325	731.8321
97	2.50020	858.4791	744.5010
98	2.36759	865.9853	756.6047
99	2.24265	873.0577	768.1330
100	2.12522	879.7043	779.0793
101	2.01517	885.9341	789.4400
102	1.91229	891.7573	799.2147
103	1.81639	897.1852	808.4054
104	1.72728	902.2295	817.0170
105	1.64472	906.9025	825.0563
106	1.56850	911.2170	832.5324
107	1.49838	915.1860	839.4558
108	1.43414	918.8224	845.8386
109	1.37553	922.1396	851.6944
110	1.32234	925.1507	857.0377

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES ACTUARIALES SOBRE VIDA CONJUNTAS, $i = 6\%$

Edad	$\ddot{a}_{xx}$	$1{,}000\,A_{xx}$	$1{,}000\,({}^2A_{xx})$	$\ddot{a}_{xx+10}$	$1{,}000\,A_{xx+10}$	$1{,}000\,({}^2A_{xx+10})$
0	16.13448	86.7274	50.8875	16.28443	78.2400	34.7076
1	16.71842	53.6745	17.4565	16.55328	63.0216	18.1309
2	16.70637	54.3565	16.9753	16.52270	64.7527	18.2195
3	16.68957	55.3072	16.6683	16.48839	66.6947	18.4277
4	16.66839	56.5060	16.5191	16.45053	68.8378	18.7468
5	16.64317	57.9339	16.5121	16.40925	71.1745	19.1700
6	16.61421	59.5733	16.6324	16.36464	73.6996	19.6923
7	16.58178	61.4085	16.8664	16.31677	76.4091	20.3096
8	16.54614	63.4258	17.2017	16.26571	79.2997	21.0188
9	16.50749	65.6137	17.6271	16.21147	82.3696	21.8172
10	16.46599	67.9626	18.1330	16.15408	85.6181	22.7036
11	16.42178	70.4655	18.7116	16.09353	89.0457	23.6776
12	16.37492	73.1176	19.3572	16.02977	92.6543	24.7402
13	16.32547	75.9170	20.0661	15.96277	96.4469	25.8935
14	16.27340	78.8643	20.8373	15.89244	100.4282	27.1413
15	16.21865	81.9632	21.6726	15.81866	104.6042	28.4891
16	16.16111	85.2203	22.5769	15.74131	108.9826	29.9441
17	16.10065	88.6424	23.5556	15.66025	113.5710	31.5141
18	16.03715	92.2366	24.6142	15.57534	118.3771	33.2071
19	15.97049	96.0099	25.7588	15.48645	123.4087	35.0317
20	15.90053	99.9697	26.9958	15.39343	128.6737	36.9970
21	15.82715	104.1234	28.3320	15.29615	134.1800	39.1126
22	15.75021	108.4786	29.7746	15.19448	139.9353	41.3884
23	15.66958	113.0429	31.3311	15.08826	145.9474	43.8349
24	15.58511	117.8241	33.0098	14.97738	152.2240	46.4632
25	15.49667	122.8299	34.8192	14.86169	158.7725	49.2847
26	15.40413	128.0682	36.7681	14.74106	165.6003	52.3114
27	15.30734	133.5468	38.8662	14.61538	172.7144	55.5555
28	15.20617	139.2737	41.1234	14.48452	180.1217	99.0301
29	15.10047	145.2564	43.5502	14.34836	187.8286	62.7483
30	14.99012	151.5028	46.1574	14.20681	195.8411	66.7238
31	14.87498	158.0203	48.9566	14.05976	204.1648	70.9706
32	14.75491	164.8162	51.9595	13.90712	212.8047	75.5028
33	14.62981	171.8977	55.1785	13.74882	221.7652	80.3352
34	14.44953	179.2716	58.6264	13.58478	231.0501	85.4824
35	14.36398	186.9444	62.3164	13.41497	240.6623	90.9593
36	14.22304	194.9221	66.2622	13.23933	250.6040	96.7805
37	14.07662	203.2104	70.4777	13.05785	260.8763	102.9610
38	13.92461	211.8144	74.9770	12.87052	271.4799	109.5154
39	13.76695	220.7386	79.7749	12.67736	282.4136	116.4579

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES ACTUARIALES SOBRE VIDA CONJUNTAS, $i = 6\%$

Edad	$\ddot{a}_{xx}$	$1{,}000\,A_{xx}$	$1{,}000\,(^2A_{xx})$	$\ddot{a}_{xx+10}$	$1{,}000\,A_{xx+10}$	$1{,}000\,(^2A_{xx+10})$
40	13.60357	229.9867	84.8858	12.47840	293.6755	123.8024
41	13.43441	239.5619	90.3247	12.27370	305.2625	131.5623
42	13.25943	249.4664	96.1061	12.06333	317.1700	139.7502
43	13.07861	259.7015	102.2457	11.84740	329.3924	148.3778
44	12.89194	270.2677	108.7571	11.62604	341.9222	157.4559
45	12.69943	281.1642	115.6552	11.39940	354.7507	166.9939
46	12.50112	292.3892	122.9537	11.16767	367.8678	177.0001
47	12.29706	303.9398	130.6661	10.93105	381.2615	187.4810
48	12.08733	315.8114	138.8051	10.68978	394.9184	198.4414
49	11.87202	327.9986	147.3826	10.44412	408.8233	209.8841
50	11.65127	340.4941	156.4093	10.19438	422.9597	221.8099
51	11.42522	353.2895	165.8951	9.94087	437.3092	234.2171
52	11.19405	366.3746	175.8482	9.68395	451.8518	247.1016
53	10.95797	379.7377	186.2752	9.42400	466.5661	260.4567
54	10.71721	393.3656	197.1814	9.16142	481.4292	274.2728
55	10.47203	407.2435	208.5696	8.89664	496.4168	288.5375
56	10.22273	421.3546	220.4410	8.63011	511.5030	303.2353
57	9.96964	435.6810	232.7940	8.36232	526.6612	318.3475
58	9.71308	450.2029	245.6250	8.09375	541.8633	333.8526
59	9.45345	464.8990	258.9275	7.82491	557.0805	349.7258
60	9.19114	479.7465	272.6922	7.55633	572.2833	365.9390
61	8.92659	494.7213	286.9070	7.28853	587.4417	382.4614
62	8.66024	509.7977	301.5568	7.02206	602.5251	399.2593
63	8.39257	524.9491	316.6234	6.75745	617.5030	416.2961
64	8.12406	540.1477	332.0853	6.49524	632.3449	433.5327
65	7.85522	555.3647	347.9183	6.23597	647.0206	450.9279
66	7.58658	570.5707	364.0947	5.98016	661.5006	468.4383
67	7.31867	585.7356	380.5839	5.72831	675.7560	486.0192
68	7.05202	600.8289	397.3525	5.48092	689.7590	503.6243
69	6.78718	615.8203	414.3642	5.23847	703.4830	521.2065
70	6.52467	630.6790	431.5803	5.00138	716.9030	538.7185
71	6.26504	645.3750	448.9598	4.77008	729.9954	556.1128
72	6.00881	659.8785	466.4595	4.54495	742.7386	573.3422
73	5.75650	674.1606	484.0346	4.32634	755.1127	590.3606
74	5.50858	688.1934	501.6393	4.11456	767.1002	607.1233
75	5.26555	701.9503	519.2266	3.90989	778.6857	623.5869
76	5.02783	715.4057	536.7489	3.71254	789.8559	639.7107
77	4.79586	728.5362	554.1588	3.52273	800.6001	655.4561
78	4.57002	741.3197	571.4091	3.34060	810.9096	670.7874
79	4.35066	753.7364	588.4536	3.16625	820.7782	685.6720

TABLA DE MORTALIDAD ILUSTRATIVA

FUNCIONES ACTUARIALES SOBRE VIDA CONJUNTAS, $i = 6\%$

Edad	$\ddot{a}_{xx}$	$1{,}000\,A_{xx}$	$1{,}000\,({}^{2}A_{xx})$	$\ddot{a}_{xx+10}$	$1{,}000\,A_{xx+10}$	$1{,}000\,({}^{2}A_{xx+10})$
80	4.13809	765.7683	605.2473	2.99977	830.2020	700.0806
81	3.93260	777.3999	621.7467	2.84117	839.1791	713.9874
82	3.73442	788.6175	637.9108	2.69046	847.7098	727.3701
83	3.54375	799.4102	653.7007	2.54760	855.7965	740.2101
84	3.36075	809.7690	669.0804	2.41251	863.4431	752.4921
85	3.18552	819.6876	684.0169	2.28509	870.6554	764.2049
86	3.01814	829.1617	698.4806	2.16521	877.4407	775.3401
87	2.85866	838.1892	712.4451	2.05273	883.8075	785.8931
88	2.70706	846.7701	725.8879	1.94748	889.7655	795.8619
89	2.56332	854.9067	738.7899	1.84925	895.3253	805.2478
90	2.42735	862.6027	751.1355	1.75786	900.4984	814.0543
91	2.29908	869.8636	762.9129	1.67309	905.2969	822.2875
92	2.17836	876.6967	774.1136	1.59471	909.7331	829.9554
93	2.06505	883.1102	784.7323	1.52251	913.8199	837.0680
94	1.95899	889.1137	794.7682	1.45626	917.5703	843.6367
95	1.85998	894.7179	804.2185	1.39571	920.9973	849.6744
96	1.76783	899.9341	813.0901	1.34065	924.1140	855.1951
97	1.68232	904.7742	821.3876	1.29084	926.9335	860.2140
98	1.60324	909.2506	829.1188	1.24605	929.4689	864.7475
99	1.53035	913.3762	836.2934	1.20604	931.7333	868.8126
100	1.46344	917.1638	842.9228	1.17060	933.7399	872.4279
101	1.40226	920.6266	849.0197	1.13946	935.5020	875.6129
102	1.34659	923.7777	854.5980	1.11241	937.0336	878.3888
103	1.29620	926.6301	859.6727	1.08917	938.3489	880.7785
104	1.25086	929.1969	864.2600	1.06949	939.4630	882.8066
105	1.21032	931.4911	868.3771	1.05308	940.3917	884.5002
106	1.17437	933.5261	872.0421	1.03965	941.1518	885.8881
107	1.14277	935.3151	875.2746	1.02889	941.7609	887.0017
108	1.11526	936.8720	878.0956	1.02047	942.2374	887.8735
109	1.09161	938.2110	880.5276	1.01406	942.6001	888.5376
110	1.07154	939.3470	882.5952	1.00934	942.8678	889.0280

TABLA DE SERVICIOS ILUSTRATIVA

Edad	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(\omega)}$	$d_x^{(i)}$	$d_x^{(r)}$	S_x
30	100 000	100	19 900	—	—	1.00
31	79 910	80	14 376	—	—	1.06
32	65 454	72	9 858	—	—	1.13
33	55 524	61	5 702	—	—	1.20
34	49 761	60	3 971	—	—	1.28
35	45 730	64	2 693	46	—	1.36
36	42 927	64	1 927	43	—	1.44
37	40 893	65	1 431	45	—	1.54
38	39 352	71	1 181	47	—	1.63
39	38 053	72	989	49	—	1.74
40	36 943	78	813	52	—	1.85
41	36 000	83	720	54	—	1.96
42	35 143	91	633	56	—	2.09
43	34 363	96	550	58	—	2.22
44	33 659	104	505	61	—	2.36
45	32 989	112	462	66	—	2.51
46	32 349	123	421	71	—	2.67
47	31 734	133	413	79	—	2.84
48	31 109	143	373	87	—	3.02
49	30 506	156	336	95	—	3.21
50	29 919	168	299	102	—	3.41
51	29 350	182	293	112	—	3.63
52	28 763	198	259	121	—	3.86
53	28 185	209	251	132	—	4.10
54	27 593	226	218	143	—	4.35
55	27 006	240	213	157	—	4.62
56	26 396	259	182	169	—	4.91
57	25 786	276	178	183	—	5.21
58	25 149	297	148	199	—	5.53
59	24 505	316	120	213	—	5.86
60	23 856	313	—	—	3 552	6.21
61	19 991	298	—	—	1 587	6.56
62	18 106	284	—	—	2 692	6.93
63	15 130	271	—	—	1 350	7.31
64	13 509	257	—	—	2 006	7.70
65	11 246	204	—	—	4 448	8.08
66	6 594	147	—	—	1 302	8.48
67	5 145	119	—	—	1 522	8.91
68	3 504	83	—	—	1 381	9.35
69	2 040	49	—	—	1 004	9.82
70	987	17	—	—	970	10.31